Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002-8 Cálculo $\frac{d}{dx}$ e $\int$ · Primavera 2025

Auxiliar 4: Derivadas y continuidad en acción

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 3 de septiembre de 2025

P1. [Acercándose]

a) Sean f, g dos funciones derivables en $\mathbb{R}$ tales que $f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si además $f(0) = 2$ y $g(0) = 0$, demuestre que $f^2(x) - g^2(x) = 4$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Sea $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos derivable en $\mathbb{R}$. Demuestre que si $\varphi(x) > 0$ y $\varphi(x)\varphi''(x) \geq (\varphi'(x))^2$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$, entonces la función definida en $\mathbb{R}$ por $\psi(x) = \ln(\varphi(x))$ es convexa.

c) Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x^2 + \beta\frac{1}{x^5}$, con $\beta > 0$. **i)** Demuestre que f es convexa en $(0,\infty)$. **ii)** Determine el punto de mínimo global de f. **iii)** Calcule el valor de β para que $\min\limits_{x\in(0,\infty)} f(x) = 28$.

P2. [Qué eficiencia]

A partir de un círculo de papel de radio R, se desea construir un cono, recortando del círculo el sector circular $\overset{\frown}{AOB}$ de ángulo central θ y juntando los trazos OA y OB de modo que coincidan. Se formará de esta manera un cono circular cuya base es un círculo de perímetro igual a la longitud del arco que queda después del corte, y su altura h. El objetivo de este problema es calcular el valor de ángulo θ de modo que el cono formado como se indicó tenga volumen máximo.

a) Haga un esquema para modelar el círculo y el cono.

b) Demuestre que el radio basal r del cono es $r = R\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)$ y que la altura h del cono es $h = R\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2}$.

c) Verifique que con la sustitución $x = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$ el volumen del cono queda $V(x) = \frac{1}{3}\pi R^3 x^2 \sqrt{1 - x^2}$.

d) Analice la función $V(x)$ indicando: dominio, ceros, signos, paridad, cálculo de derivada, crecimientos, y $\arg\max V(x)$.

e) Calcule volumen máximo del cono y ángulo θ que lo genera.

P3. [Ondulado]

Estudie completamente las función definidas a continuación:

a) $f(x) = e^{\sqrt{2}\sin(x)}$ **b)** $g(x) = e^{\frac{1}{\ln(x)}}$ **c)** $h(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ **d)** $j(x) = \dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

i) Dominio, ceros (si existen), signos, continuidad, paridad y periodicidad.

ii) Cálculo de f', crecimiento y valores extremos relativos y absolutos.

iii) Cálculo de f'', concavidad (convexidad) y puntos de inflexión.

iv) Tabla de valores principales, recorrido y bosquejo de gráfico.

P4. [De todo un poco]

Sea $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$, de clase $C^2(0,1)$ con $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $h(1) = 1$ y $h'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Demuestre que $h'(\xi) = \frac{3}{\pi}$ para algún $\xi \in (0,1)$.

Principales definiciones, propiedades y teoremas

Funciones de clase $C^{\cdot}$

Sea la función $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable k veces en (a,b). Entonces su derivada k-ésima se define recursivamente por $f^{(k)}(\overline{x}) := \left(f^{(k-1)}\right)'(\overline{x})$. Si es k veces derivable y su derivada k-ésima es continua, entonces $f \in C^k(a,b)$.

Puntos extremos de una función

Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, k veces derivable, y $\overline{x} \in A$, .

- $\overline{x}$ es **mínimo (máximo) GLOBAL** de f i es el valor más bajo (alto) alcanzado por la función: $f(\overline{x}) \leq (\geq)\ f(x)\ (\forall\, x \in A)$.
- $\overline{x}$ es **mínimo (máximo) LOCAL** si es el valor más bajo (alto) alcanzado en una vecindad: $f(\overline{x}) \leq (\geq)\ f(x)\ (\forall\, x \in A \cap [\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta])$.
  - Si $f^{(k)}(\overline{x}) > 0, k$ par $\implies \overline{x}$ es **mín. local**.
  - Si $f^{(k)}(\overline{x}) < 0, k$ par $\implies \overline{x}$ es **máx. local.**

Todo punto extremo global es punto extremo local.

Puntos críticos de una función

Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función que admite derivada. $\overline{x} \in A$ es **punto crítico** si $f'(\overline{x})$ no existe o si $f'(\overline{x}) = 0$.

Condición para ser punto extremo

Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Entonces:

$$\overline{x} \text{ es extremo de } f \wedge f'(\overline{x}) \text{ existe } \implies f'(\overline{x}) = 0$$

Teorema del Valor Medio (TVM) de Rolle

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces $f(a) = f(b) \implies (\exists\, \xi \in (a,b)) : f'(\xi) = 0$.

Teorema del Valor Medio (TVM) de Lagrange

Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces $(\exists\, \xi \in (a,b)) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema del Valor Medio (TVM) de Cauchy

Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces se cumple que: $(\exists\, \xi \in (a,b))$: $f'(\xi)\,[g(b)-g(a)] = [f(a)-f(b)]\,g'(\xi)$.

Regla de l'Hôpital

Sean $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a,b) tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ con $L = 0$ ó $L = \pm\infty$, $g'(x) \neq 0\ (\forall x \in (a,b))$. Entonces: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ siempre que el último exista. Notar que el límite puede ser hacia a^+, a^-, $+\infty$ o $-\infty$. Es una herramienta para calcular límites que "a primera vista" se indefinen.

Derivadas y monotonía

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $(\forall\, x \in (a,b))$ entonces:

- $f'(x) \geq 0 \iff f$ creciente en $[a,b]$
- $f'(x) \leq 0 \iff f$ decreciente en $[a,b]$

Si la desigualdad es estricta, la monotonía es estricta.

Convexidad y puntos de inflexión

Una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice **convexa** si:

$$f(z) \leq f(x) + \left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)(z-x)\ \ (\forall\, x < z < y)$$

$$\iff \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\ \ (\forall\, x < z < y)$$

La **convexidad** asegura que las rectas secantes al gráfico de la función queden por encima del gráfico. Un **punto de inflexión** es un punto de cambio de convexidad de la función.

Derivadas y convexidad

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

- f es **convexa** en $[a,b]$ ssi f' es creciente en (a,b), equivalentemente $f'' \geq 0$ en (a,b).
- f es **cóncava** en $[a,b]$ ssi f' es decreciente en (a,b), equivalentemtente $f'' \leq 0$.

Fórmula de Taylor (función = aprox. + error)

Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $k+1$ veces derivable en $\overline{x} \in (a,b)$. Su **desarrollo de Taylor de orden** n **en torno a** x_0 es: $T^n_{x_0}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Entonces $(\forall\, x > x_0)\ (\exists\, \xi \in (x_0, x))$ se satisface que

$$f(x) = T^n_{x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$