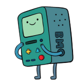
Auxiliar 3: Derivadas y teoremas 

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 27 de agosto de 2025

P1. [En teoría]

a) Demuestre que la función $f(x) = e^{-|x|}$ es continua pero no derivable en $x = 0$.

b) Sea $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

i) Calcule su derivada en cualquier punto. **ii)** Muestre que es continua pero no derivable en $x = 1$.

P2. [Diferente]

a) Calcule las siguientes derivadas:

i) $2x - \frac{4}{\sqrt{x}}$ **ii)** $\left(7x + \sqrt{x^2+3}\right)^6$ **iii)** $\frac{2x^4 + 3x^2 - 1}{x^2}$ **iv)** $(xe^x)^\pi$ **v)** x^x **vi)** $\sinh^{-1}(x)$

b) Verifique que la derivada de $f(x) = \arcsin(2x-1) + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)$ es nula en $[0, 1)$.

c) Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable con $g'(x) \neq 0$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$ y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(\mu g(x))$, $\mu \in \mathbb{R}$.

i) Demuestre que f, f', f'', g, g' y g'' satisfacen la ecuación $f'' - f'\frac{g''}{g'} + (\mu g')^2 f = 0$.

ii) Calcule $f^{(n)}(0)$ para $g(x) = x$.

d) Considere $h(x) = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$, con $a > 0$.

i) Indique dónde h es continua y derivable, y muestre que h' no depende de a.

ii) Demuestre que $\left(\forall\, x \in \left[0, \frac{1}{a}\right)\right) : h(x) = \arctan(x) + \arctan(a)$.

P3. [Aplicaciones]

a) Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), con $f(a) = 0 = f(b)$ y $f'(a) = 0$. **i)** Demuestre que existe $c \in (a, b)$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. **ii)** Analice qué pasa si $a = 0$.

b) Muestre que si para h derivable en $\mathbb{R}$ existen los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} h'(x)$, entonces el último es 0.

c) Sea f una función continua en $[0, +\infty)$, diferenciable en $(0, +\infty)$ y tal que $f(0) = 0$ y $f'(x)$ creciente en $\mathbb{R}^+$. Demuestre que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ en $\mathbb{R}^+$ y deduzca que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $\mathbb{R}^+$.

d) Sea g una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$ que satisface $g(0) = 0 = g'(0)$ y $a > 0$. Demuestre que existe $\xi \in (0, a)$ tal que $\frac{a^2}{2} g''(\xi) = g(a)$.

e) Sea g una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $g(x)\tan(x) \geq 0$ $\left(\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$. Demuestre que la derivada de g posee ceros en cada intervalo de la forma $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

P4. [Límite]

Calcule los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(e^{-x} + xe^{-x}\right)}{x^2}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$

Principales definiciones, propiedades y teoremas

Función derivable en un punto

$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ es **derivable** en $\overline{x} \in (a,b)$ si existe el siguiente límite, y se llama **derivada de f en $\overline{x}$**:

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x)-f(\overline{x})}{x-\overline{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}+h)-f(\overline{x})}{h} \equiv f'(\overline{x})$$

La derivada en un punto corresponde al valor de la pendiente de la recta tangente a la función en el punto.

Álgebra de derivadas

Sean $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\overline{x} \in (a,b)$. Entonces $f+g$, fg y $\frac{f}{g}$, si $g(\overline{x}) \neq 0$, son derivables, con:

- $(f+g)'(\overline{x}) = f'(\overline{x}) + g'(\overline{x})$
- $(fg)'(\overline{x}) = f'(\overline{x})g(\overline{x}) + f(\overline{x})g'(\overline{x})$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(\overline{x}) = \frac{f'(\overline{x})g(\overline{x}) - f(\overline{x})g'(\overline{x})}{g(\overline{x})^2}$

Regla de la cadena

Sea $f\colon (a,b) \to (c,d)$ derivable en $\overline{x} \in (a,b)$ y $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\overline{y} = f(\overline{x}) \in (c,d)$. Entonces la composición $g \circ f$ es derivable en $\overline{x}$ con

$$(g\circ f)'(\overline{x}) = g'(f(\overline{x})) \cdot f'(\overline{x})$$

Escrito con la notación de Leibnitz, si y es una función de u, i.e. $y = y(u)$, y u es una función de x, i.e. $u = u(x)$, entonces $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

Derivada de la función inversa

Sea $f\colon (a,b) \to (c,d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\overline{x} \in (a,b)$ con $f'(\overline{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1}\colon (c,d) \to (a,b)$ es derivable en $\overline{y} = f(\overline{x})$ con

$$\left(f^{-1}\right)'(\overline{y}) = \frac{1}{f'(\overline{x})} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(\overline{y})\right)}$$

Escrito con la notación de Leibnitz, si y es una función de u, i.e. $y = y(u)$, y u es una función de x, i.e. $u = u(x)$, entonces $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

Derivabilidad y continuidad

- derivable en punto $\implies$ continua en dicho punto

Puntos extremos de una función

Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$.

- $\overline{x}$ es **mínimo (máximo) global** de f i es el valor más bajo (alto) alcanzado por la función: $f(\overline{x}) \leq (\geq)\ f(x)\ (\forall\, x \in A)$.
- $\overline{x}$ es **mínimo (máximo) local** si es el valor más bajo (alto) alcanzado en una vecindad: $f(\overline{x}) \leq (\geq)\ f(x)\ (\forall\, x \in A \cap [\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta])$.

Todo punto extremo global es punto extremo local.

Puntos críticos de una función

Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función que admite derivada. $\overline{x} \in A$ es **punto crítico** si $f'(\overline{x})$ no existe o si $f'(\overline{x}) = 0$.

Condición para ser punto extremo

Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Entonces:

$\overline{x}$ es extremo de $f \wedge f'(\overline{x})$ existe $\implies f'(\overline{x}) = 0$

Teorema del Valor Medio (TVM)

Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0\ (\forall x \in (a,b))$.

$$\implies (\exists\, \xi \in (a,b)) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Teorema del Valor Medio (TVM) de Rolle

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces $f(a) = f(b) \implies (\exists\, \xi \in (a,b)) : f'(\xi) = 0$.

Teorema del Valor Medio (TVM) de Lagrange

Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces $(\exists\, \xi \in (a,b)) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema del Valor Medio (TVM) de Cauchy

Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces se cumple que:

$$(\exists\, \xi \in (a,b)) : f'(\xi)\,[g(b)-g(a)] = [f(a)-f(b)]\,g'(\xi)$$

Tabla de derivadas

Con a constante en $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ $(\mathbb{R})$, se tiene que:

$F(x)$	$F'(x)$	Restricciones	$F(x)$	$F'(x)$
x^n	nx^{n-1}			
$g(x)^n$	$ng(x)^{n-1}g'(x)$			
$\frac{1}{x^n}$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$	$x \neq 0$		
e^x	e^x			
$e^{g(x)}$	$g'(x)e^{g(x)}$			
a^x	$\ln(a)a^x$	$a > 1, a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$		
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$		
$\ln(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$			
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)}\frac{1}{x}$	$x \neq 0$		
$\sin(x)$	$\cos(x)$		$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$		$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$		$\tanh(x)$	$\mathrm{sech}(x)^2$
$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$		$\mathrm{csch}(x)$	$-\mathrm{csc}(x)\mathrm{coth}(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$		$\mathrm{sech}(x)$	$-\mathrm{sech}(x)\mathrm{tanh}(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$		$\coth(x)$	$-\mathrm{csch}(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$		
$\arc\cos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$		
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$			
$\mathrm{arccsc}(x)$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$		
$\mathrm{arcsec}(x)$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$		
$\mathrm{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$			