DESARROLLO AUX 2

APLICACIONES DE CONTINUIDAD

MA1002-8

2025-2

Profesora: M. Eugenia Martínez M.

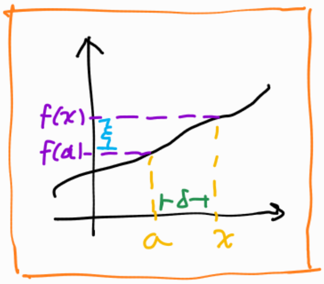
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

CONTINUANDO

Uniforme continuidad... ¿qué es?

La semana pasada se aprendió la noción de continuidad:



una función es continua si se puede controlar la distancia entre sus imágenes (fancy said as "tan cerca como se quiera" / "suficientemente cerca") en la medida que se controle la distancia entre preimágenes, en cada punto. O sea, es una noción PUNTUAL y LOCAL:

estudio los puntos x cercanos a a } LOCAL

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continua en } a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A): |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$$

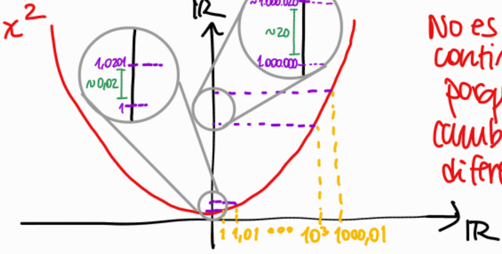
(en su defecto, no es continua cuando se pierde el control entre imágenes de valores cercanos)

Si se quisiera extender esta noción a algo GLOBAL, o sea que la distancia precisada entre preimágenes sea la misma siempre para controlar las imágenes, se hace con la continuidad uniforme:

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ uniformemente continua en } A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A): |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

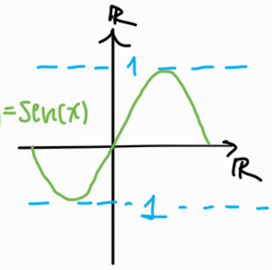
En su defecto, una función no es uniformemente continua cuando no hay forma de controlar la distancia entre imágenes de la misma forma en todos los puntos, como por ejemplo:

$f(x) = x^2$



No es uniformemente continua en $(0, +\infty)$ porque sus imágenes cambian a una magnitud diferente según puntos

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$



sí es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ porque sus imágenes siempre tendrían una distancia de 2 a lo mucho.

La intuición que deben guardarse es:

continuidad	v/s	continuidad uniforme
control local		control global
(control de imagen alrededor de a puede variar con a: $\delta = \delta(\varepsilon, a)$)		(control de imagen no varía entre puntos (es indep. de ellos): $\delta = \delta(\varepsilon)$)

P1 a) P.D.Q. $f(x)=\sqrt{x}$ es uniformemente continua (u.c.)

$\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x,y\in Dom(f)): |x-y|\leq\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$ ... def. (u.c.)

Para ver que una función es uniformemente continua, hay que hallar $\delta>0$ que no dependa del punto donde se quiere continuidad, si no que solo de $\varepsilon>0$

Recuerdo: En el aux pasado vimos que $\sqrt{x}$ es continua $(\forall a\in[0,+\infty))$, mostrando para $\varepsilon>0$, bastaba tomar $\delta=\varepsilon\sqrt{a}>0$ y así $|x-a|\leq\delta$ $(\forall x\in[0,+\infty))$ que permitía $|f(x)-f(a)|\leq\varepsilon$. O sea... era $\delta=\delta(\varepsilon,a)$!!! ¿Habrá $\delta=\delta(\varepsilon)>0$?

En efecto,

Sea $\varepsilon>0$.

Basta tomar $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ t.q. $\delta=\varepsilon^2$ y así $|x-y|\leq\delta$ $(\forall x,y\in[0,+\infty))$, pues notando que

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|^2=|\sqrt{x}-\sqrt{a}|\underbrace{|\sqrt{x}-\sqrt{a}|}_{\leq|\sqrt{x}+\sqrt{a}|\ (*)}$$

(dem. al final del ejercicio)

$$\leq|\sqrt{x}-\sqrt{a}|\,|\sqrt{x}+\sqrt{a}|$$

$$=|x-a|$$

$$\leq\delta=\varepsilon^2$$

Entonces, por transitividad: $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|^2\leq\varepsilon^2$

$$\Rightarrow|\sqrt{x}-\sqrt{a}|\leq\varepsilon$$

$$\iff|f(x)-f(a)|\leq\varepsilon$$

Sigue que f es uniformemente continua en $[0,+\infty)$. ▨

demostración de la prop. usada:

P.D.Q. $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| \leqslant \left|\sqrt{x}+\sqrt{a}\right| \quad (\forall x, a \in [0,+\infty))$

En efecto,

Llamando $\alpha := \sqrt{x}$, $\beta := \sqrt{a}$, $\alpha, \beta > 0$: (les pongo nombres solo para no escribir tantas raíces)

Siempre se tiene que:

* $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \leqslant \alpha^2 + \beta^2$, pues $-2\overbrace{\alpha\beta}^{+} < 0$ (i)
  ↳ sumar cantidad negativa a cantidad positiva, la hace menos positiva
* $\alpha^2 + \beta^2 \leqslant \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, pues $2\overbrace{\alpha\beta}^{+} > 0$ (ii)
  ↳ sumar cantidad positiva a cantidad positiva, la hace más positiva

Usando (i) y (ii), entonces $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \overset{(i)}{\leqslant} \alpha^2 + \beta^2 \overset{(ii)}{\leqslant} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

def. cuadrado de binomio

$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \leqslant \alpha^2 + \beta^2 \leqslant (\alpha+\beta)^2$$

transitividad

$$\Rightarrow (\alpha-\beta)^2 \leqslant (\alpha+\beta)^2$$

$$\overset{|\cdot|}{\Rightarrow} \left|(\alpha-\beta)^2\right| \leqslant \left|(\alpha+\beta)^2\right|$$

$|r^2| = |r|^2 \; (\forall r \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow |\alpha-\beta|^2 \leqslant |\alpha+\beta|^2$$

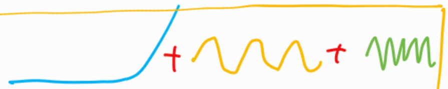
$$\overset{\sqrt{\cdot}}{\Rightarrow} |\alpha-\beta| \leqslant |\alpha+\beta|$$

$\alpha, \beta > 0 \Rightarrow \alpha+\beta > 0 \Rightarrow |\alpha+\beta| = \alpha+\beta$

$$\Leftrightarrow |\alpha-\beta| \leqslant \alpha+\beta \quad \blacksquare$$

(P2) b) ¿ $g(x) = e^{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ es uniformem. continua en $(0,1)$?

crecim. muy grande — oscilación — ritmo inverso y problemas en $x=0$

Por la forma de la función, se intuye que será como 

y eso "tiene pinta" de no ser uniform. continua al mostrar diferentes ritmos de cambio. Basta hallar un punto donde no lo sea!

Se verá que no es uniformem. continua.

$\iff \overline{(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x,y\in(0,1)): |x-y|\leq\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon}$

$\iff (\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x,y\in(0,1)): |x-y|\leq\delta \wedge |f(x)-f(y)|>\varepsilon$ } quiero ver que preimágenes están cerca pero imágenes no lo están

En efecto,

Tómese $\varepsilon=2>0$.

Sea $\delta>0$ arbitrario.

Sean $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi} \in (0,1)$.

quiero estudiar puntos cuya imagen puedo calcular; ejemplo: pares e impares de π

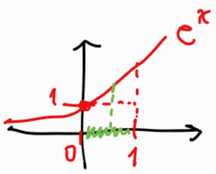
Notar que como $x_n\to 0$ y $y_n\to 0 \Rightarrow |x_n-y_n|\to 0$

Tomando en particular n suficientem. grande $\Rightarrow |x_n-y_n|\leq\delta$ //

Recordar noción de convergencia: puedo hallar cercanía que yo quiera si $n\to+\infty$

Pero $|f(x_n)-f(y_n)| = \left|e^{\frac{1}{2n\pi}}\underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} - e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\underbrace{\cos((2n+1)\pi)}_{=(-1)}\right|$

$$= \left|e^{\frac{1}{2n\pi}} + e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right| \geq 2 = \varepsilon \text{ //}$$

pues: 

$\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{(2n+1)\pi} \in (0,1) \Rightarrow e^{\frac{1}{2n\pi}}, e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}} \geq 1$

O sea, se ve que sus preimágenes están acotadas pero sus imágenes no!

Sigue que no es uniformemente continua. ☒

(P1) c) Estudiar continuidad uniforme de x^3 en $\mathbb{R}$ y de su inversa $\sqrt[3]{x}$

x^3 se ve como una función en que la diferencia entre sus imágenes cambia a diferente escala → intuición dice que quizás no sea uniformemente continua (pese a que es continua)

Para mostrar que algo no es unif. continuo, basta ver que haya dos puntos que estén "tan cerca como se quiera" pero sus imágenes no, una buena técnica es tomar sucesiones que su diferencia sea cero, y que tengan una forma conveniente para la imagen por la función.

En efecto,

Sean $x_n=(n+1)^{\frac{1}{3}}$, $y_n=n^{\frac{1}{3}}$.

Notar que
$$x_n-y_n=(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}\overset{\text{racionalizar}}{=}\left[(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}\right]\cdot\underbrace{\left[\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}\right]}_{1\text{ conveniente}}$$

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$

$$=\frac{\left((n+1)^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(n^{\frac{1}{3}}\right)^3}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}=\frac{(n+1)-n}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow |x_n-y_n|=\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow |x_n-y_n|\to 0$$

def. convergencia

$\Rightarrow |x_n-y_n|\leq\delta$ $(\forall\delta>0)$, algún $n\in\mathbb{N}$ suficienteм grande, fijo.

Pero $|f(x_n)-f(y_n)|=\left|\left((n+1)^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(n^{\frac{1}{3}}\right)^3\right|=|n+1-n|=1\geq 1=:\varepsilon$

O sea, se ve que sus preimágenes están acotadas pero sus imágenes no!

Sigue que no es uniformemente continua. ☒

x^3 es continua y monótona... tiene inversa → usar teo. inversa

En efecto,

Como x^3 es continua y monótona creciente, en virtud del Teo. de inversa, inversa $x^{\frac{1}{3}}$ es continua. ☒

este ejemplo es interesante porque vimos un caso de una función que no es uniformemente continua, pese a que es continua (entonces aprendimos que continua $\not\Rightarrow$ uniform continua); y también porque, independiente de lo anterior, la inversa es continua! (por monotonía)

P1 d) P.D.Q. $j(x) = \sqrt{1-x^2}\,\dfrac{\arctg(x)}{x}$ es uniformemente continua en $[-1,1]$

En virtud del resultado del auxiliar 1:

P6 a) iii) $h(x) = \sqrt{1-x^2}\,\dfrac{\arctg(x)}{x}$

En efecto,

El dominio es $[-1,1]\setminus\{0\} \subseteq \mathbb{R}$

Se quisiera definir h en 0 para que fuere continua.

Nota que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1-x^2}\,\dfrac{\arctg(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2} = 1$

$= \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}\,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctg(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctg(x)}{x}\ \left(=\dfrac{0}{0}\right)$ Forma de L'Hopital

álgebra de límites convergentes $= 1\cdot 1 = 1$; $\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$

Basta definir $h(x) \overset{!}{=} 1$. ▨

la función es continua, al definir $j(x=0)=1$.

Luego, j es continua en el cerrado y acotado $[-1,1]$

$\Longleftrightarrow$ j es uniformemente continua en $[-1,1]$. ▨

Teorema caract. uniforme continuidad en cerrados y acotados

P1 e) P.D.Q. h uniformemente continua en $(-\infty,0]$ y h uniformemente continua en $[0,+\infty)$

$\Rightarrow$ h uniformemente continua en $\mathbb{R}$ PROPUESTO

Reflexionar: ¿continuidad uniforme en conjuntos une asegura continuidad uniforme en la unión?

Para motivar esto... por ejemplo: x^2 es uniformemente continua en $[n,n+1]$, $n\in\mathbb{N}$.

¿Lo es en $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[n,n+1]$?

P2

RESOLVIENDO

Teorema del Valor Intermedio (TVI) y generalización (Darboux)

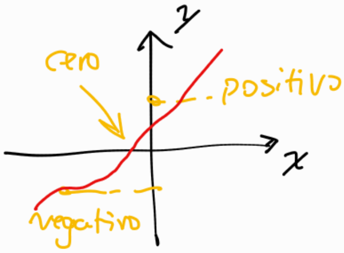
⚠ No le digan "...del valor ~~MEDIO~~" porque hay otro teorema con ese nombre y se van a confundir :

Lo que nos dice este Teorema es algo que pareciera "obvio" pero que Bolzano probó de manera formal, para funciones continuas:

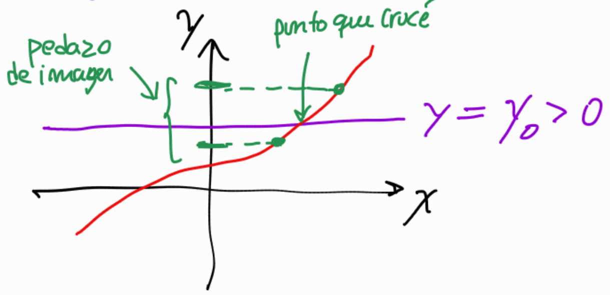
BERNARD BOLZANO

Teo. [del Valor Intermedio]

[Si tengo un cambio de signo, necesariamente pasé por el cero]



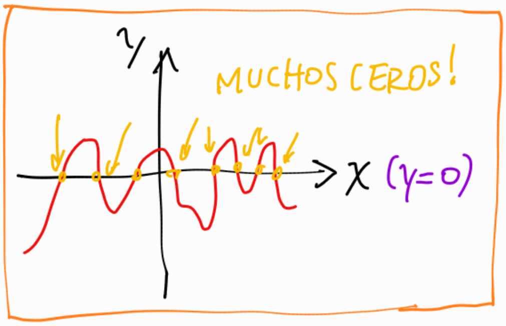
Luego, se generalizó para cualquier recta horizontal:

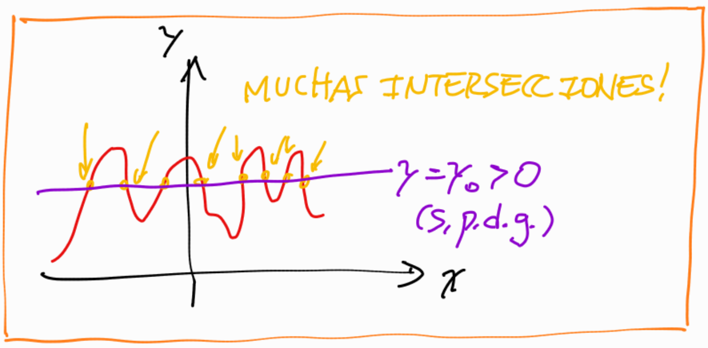


Teo. [generalización del TVI]

[Si tomo un pedazo de la imagen (de un cerrado y acotado), entonces, necesariamente pasé por un punto de ahí]

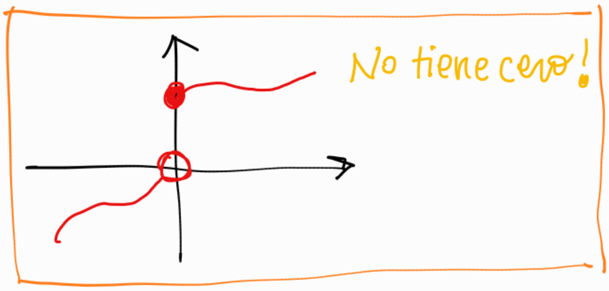
Observar que es posible que ocurran estos casos:





O sea... es un teorema de EXISTENCIA; no garantiza unicidad.

Además, si se da el caso:
O sea... la CONTINUIDAD es una hipótesis muy importante.

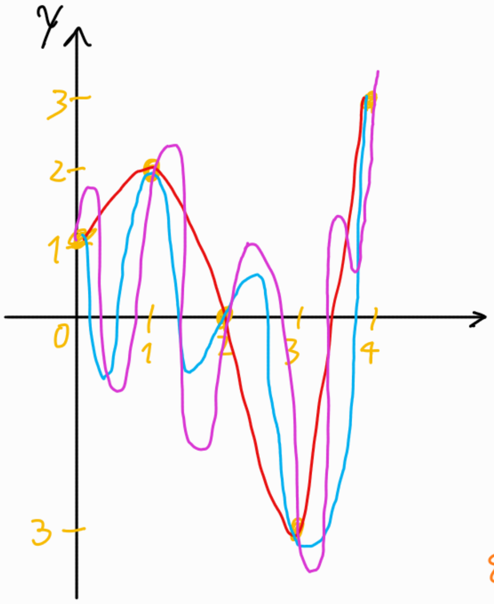


P2) a) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[0,4]$ cerrado y acotado
$f(0)=1$; $f(1)=2$; $f(2)=0$; $f(3)=-3$; $f(4)=3$
Comentar sobre los ceros.

> Recordar que una función puede tener más de un cero, y que si es continua y cambió de signo en $\substack{\text{cerrado}\\\text{acotado}}$ $\Rightarrow$ tocó cero (TVI)

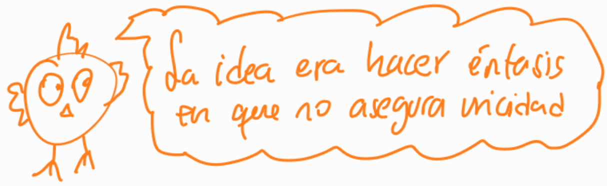
En efecto.

Notar que f luciría como:



* Como $[0,4]$ es cerrado y acotado y f es continua, en virtud del Teorema del Valor Intermedio, existe un punto en el que toca el cero.

↳ hay muchas formas que ocurra eso i.e. puede tener más de 1 cero!! //



P2) b) Justificar si las siguientes funciones admiten raíces, y dónde
(≡ ceros)

> El TVI regala ceros a funciones continuas en cerrados y acotados... entonces basta asegurar continuidad en cerrado y acotado!

P2) b) i) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

Notar que continuidad falla en los ceros del coseno $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
Como son infinitos, no se puede usar TVI porque no hay cerrados acotados donde no halla una discontinuidad y cambio de signo, simultáneamente.

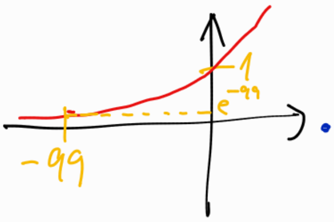
$\therefore \dfrac{1}{\cos(x)}$ no admite ceros en todo $\mathbb{R}$

P2 b) ii) $g(x) = x + \ln(|\ln(|x|)|)$

Notar que g es continua por álgebra y composición de funciones continuas

Notar que

$$\begin{cases} * \; g(e) = e + \ln(|\underbrace{\ln(|e|)}_{=1}|) \\ \quad = e + \underbrace{\ln(1)}_{=0} \\ \quad = e > 0 \,_{//} \\ * \; g\left(e^{e^{-99}}\right) = e + \ln\left(\left|\ln\left(\left|e^{e^{-99}}\right|\right)\right|\right) \\ \quad = e + \ln\left(\left|e^{-99}\right|\right) \\ \quad = \underbrace{e}_{\approx 2,7} + (-99) < 0 \,_{//} \end{cases}$$

Además: 

. O sea $e^{-99} < 1 \Rightarrow e^{e^{-99}} < e^{1}$ (e monótona)

O sea $\left[e^{e^{-99}}, e\right] \approx$ [cercano a 1 y menor, ≈ 2] define un cerrado y acotado

Como la función es continua, en virtud de TVI, $\left(\exists x_0 \in \left[e^{e^{-99}}, e\right]\right) : g(x_0) = 0.$ ■

P2 b) iii) $h(x) = 4x - 2 + e^{x}$

Notar que h es continua por álgebra y composición de funciones continuas

Notar que

$$\begin{cases} * \; h(0) = 0 - 2 + e^{0} = -2 + 1 = -2 < 0 \,_{//} \\ * \; h(1) = 4 - 2 + e^{1} = 2 + e^{1} > 0 \,_{//} \end{cases}$$

Luego, como $[0,1]$ define un cerrado y acotado, y la función es continua ahí, en virtud del Teorema del Valor Intermedio, $(\exists x_0 \in [0,1]) : h(x_0) = 0.$ ■

(P2) b) iv) $j(x) = e^{2x^3-4x+1} - 1$

Notar que j es continua por álgebra y composición de funciones continuas.

Notar que
$$\begin{cases} * \; j(0) = e^{0-0+1} - 1 = e^1 - 1 > 2 - 1 = 1 > 0 \,_{//} \\ * \; j(-3) = e^{2\cdot(-27)+12+1} - 1 = e^{-41} - 1 < 0 \,_{//} \end{cases}$$

$-41 < 0 \Rightarrow e^{-41} < 1 = e^0$

Luego, como $[-3,0]$ define un cerrado y acotado, y la función es continua ahí; en virtud del Teorema del Valor Intermedio: $(\exists x_0 \in [-3,0]): j(x_0) = 0$. ▨

(P2) c) Argumentar existencia (o ausencia) de solución de las ecuaciones:

> Resolver una ecuación $\underbrace{F(x)}_{\text{lado izquierdo eq.}} = \underbrace{f(x)}_{\text{lado derecho eq.}}$ es hallar x_0 que satisfaga la identidad. Más aún; $F(x) = f(x) \iff F(x) - f(x) = 0$, o sea basta encontrar un valor que haga cero la función $F - f \rightarrow$ TVI!

(P2) c) i) $5 - \operatorname{sen}(x) = x$

Considérese $f(x) = 5 - \operatorname{sen}(x) - x$, continua por álg. y composición de continuas.

Notar que
$$\begin{cases} * \; f(0) = 5 - 0 - 0 = 5 > 0 \,_{//} \\ * \; f(100) = 5 - \underbrace{\operatorname{sen}(100)}_{\approx 0{,}9 \approx 1} - 100 < 0 \,_{//} \end{cases}$$

Luego, como $[0,100]$ define un cerrado y acotado, y la función es continua ahí; en virtud del Teorema del Valor Intermedio: $(\exists x_0 \in [0,100]): f(x_0) = 0$

$\iff 5 - \operatorname{sen}(x_0) - x_0 = 0$

$\iff 5 - \operatorname{sen}(x_0) = x_0$ ▨

(P2) c) ii) $\cos(x) = x^4$ Propuesto

(P2) c) iii) $e^{5x} = x$

Considérese $f(x) = e^{5x} - x$, continua por álg. y composición de continuas.

Notar que
$$\begin{cases} * \; x > 0 \Rightarrow e^{5x} \geq 1 \quad y \quad e^{5x} \geq x \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \\ * \; x \leq 0 \Rightarrow \underbrace{e^{5x}}_{\text{positivo}} = \underbrace{x}_{\text{negativo}} \end{cases}$$

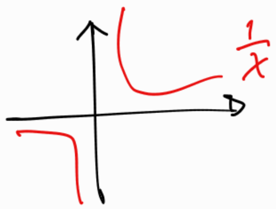
no puede ocurrir

De lo anterior se desprende que $e^{5x} - x$ es siempre positiva no nula.
O sea, no aplica el TVI! Pese a ser continua.
Sigue que la ecuación no tiene solución. $\blacksquare$

(P2) c) iv) $x 2^x = 1$ propuesto :)

(P2) c) v) $\frac{1}{x} = 0$

De Intro. al Cálculo...



$\Rightarrow$ no hay ceros! $\blacksquare$

(P2) d) $f : [0,3] \to [1,2]$ continua.
P.D.Q. $(\exists x_0 \in [0,3]) : f(x_0) = x_0$
Justificar que $x_0 \notin \{0, 3\}$

Regalo :)

La misma lógica ya trabajada $\rightarrow$ buscar cerrado y acotado conveniente, o sea, t.q. la función que se le busca ceros cambie de signo en los bordes.

Para argumentar porqué no puede ser 0 ó 3, usen que es punto fijo.

Google — Busquen el Teorema del Punto Fijo de Banach, es muy interesante :)

(P2) e) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua; $f(0)<0$; $f(1)>1$

$\beta\in\mathbb{R}$; $\begin{cases} g_\beta : [0,1] \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto g_\beta(x) = f(x) + \beta(1-2x) \end{cases}$

Encontrar valores de β t.q. g_β tenga al menos una raíz

💡 Imponer que la función sea cero y despejar!

En efecto,

Se busca que $(\exists x_0 \in [0,1]) : g_\beta(x_0) = 0$.

$f, 1, 2x, -, \circ$

Notar que g_β es continua en $[0,1]$ por álg. y comp. de fn's continuas.

Notar que $\begin{cases} * \; g_\beta(0) = f(0) + \beta(1-0) = f(0) + \beta \\ * \; g_\beta(1) = f(1) + \beta(1-2) = f(1) - \beta \end{cases}$

Para aplicar Teorema del Valor Intermedio, se busca que:

$$g_\beta(0)\, g_\beta(1) \leq 0$$

$$\iff (f(0)+\beta)(f(1)-\beta) \leq 0$$ → alguno es negativo

$$\Rightarrow \quad (i) \left\{ \begin{array}{l} f(0)+\beta \leq 0 \iff \beta \leq -f(0) \\ f(1)-\beta \geq 0 \iff f(1) \geq \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \leq \min\{-f(0), f(1)\}$$

$$(ii) \left\{ \begin{array}{l} f(0)+\beta \geq 0 \iff \beta \geq -f(0) \\ f(1)-\beta \leq 0 \iff f(1) \leq \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \geq \max\{-f(0), f(1)\}$$

calculando las constantes buscadas. ▨

P2 f) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

"valor medio"

P.D.Q. $(\exists x_0\in[a,b]): f(x_0)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$

si es continua es cerrado y acotado $\Rightarrow$ alcanza extremos

En efecto,

Como f es continua en el cerrado y acotado $[a,b]$,

Se puede definir $\begin{cases} * m := \min\{f(a), f(b)\} \\ * M := \max\{f(a), f(b)\} \end{cases}$.

También se puede definir $d=\frac{f(a)+f(b)}{2}\in[m,M]\subseteq f([a,b])$.

En virtud del Teorema Generalizado de Valor Intermedio:

$$(\exists x_0\in[a,b]): f(x_0)=d$$

$$\iff f(x_0)=\frac{f(a)+f(b)}{x_0} \quad \blacksquare$$

Más regalos

Para ver que $(\exists \mu\in[x_1,x_2]): f(\mu)=f(x_1)^t f(x_2)^{t-1}$

conviene trabajar con $g=\ln\circ f$, $Cod(f)=(0,+\infty)$

Sea $[u,v]=[\min\{x_1,x_2\}, \max\{x_1,x_2\}]\subseteq[a,b]$ y g es continua ahí.

Notar que la combinación convexa $\lambda := t\,g(u)+(1-t)g(v)$ es t.q. $g(u)\leq\lambda\leq g(v)$

Luego, por TVM generalizado $(\exists\mu\in[u,v]): g(\mu)=\lambda$.

S.p.d.g. $x_1<x_2\Rightarrow(\exists\mu\in[x_1,x_2]): g(\mu)=\lambda$.

Para ver que $(\exists\xi\in[x_1,x_2]): \frac{1}{f(\xi)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}\right)$

conviene trabajar con $g=\frac{1}{f}$, $Cod(f)=(0,+\infty)$

análogo al primero. (Literal). Se llama "norma armónica"

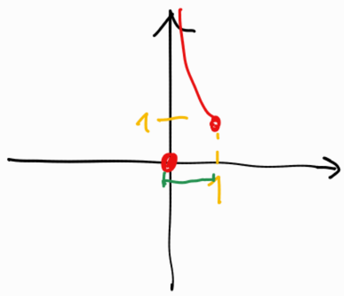
P3

EXTREMOS

P3 Estudiar existencia de máximos y mínimos de estas funciones:

> El teorema de Valores extremos asegura que una función CONTINUA alcanza su máximo y mínimo en un cerrado acotado...

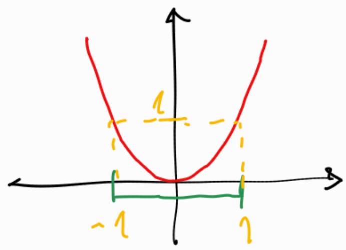
P3 a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$ en $[0,1]$



No es continua en $x=0$! (límites laterales no coinciden) (les dejo el cálculo ☺)

Como no es continua en $[0,1]$, entonces no alcanza su valor extremo.

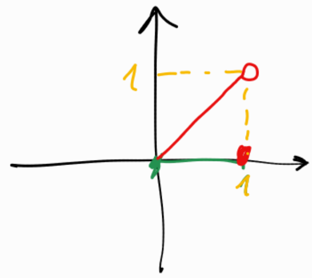
P3 b) $g(x)=x^2$ en $(-1,1)$



$(-1,1)$ no es cerrado y acotado, entonces no aplica el Teorema, porque no se cumplen las hipótesis.

↳ no aplica en el sentido de que su resultado no se puede asegurar pues se carecen las hipótesis

P3 c) $h(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$ en $[0,1]$



No es continua en $x=1$! (límites laterales no coinciden) (les dejo el cálculo ☺)

Como no es continua en $[0,1]$, entonces no alcanza su valor extremo.

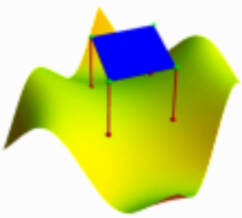
¿Alguno contradice el Teo. de Weierstrass?

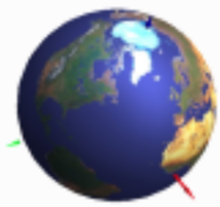
Nop!

1°) Los Teoremas no se contradicen, pues tienen valor veritativo Verdadero.

2°) Si un resultado difiere con el del Teorema, no es que "se rompa", o algo por el estilo: si no se cumplían todas las hipótesis del Teorema, no se puede deducir lo que indica. ☺

P4





Son problemas entretenidos!
Y aplicaciones directas en el mundo real, de los Teoremas

Les recomiendo que busquen al respecto, hay material interesante!!

Google

Saben quién es?? cierto?...

Continuidad en acción 8)

La idea de estos problemas es que viesen algunas de las utilidades de la continuidad en funciones!

Es una característica muy poderosa, que como vimos, dota de propiedades útiles a la función:

* tener inversa continua
* tener ceros, si cambia de signo
* ser acotada (alcanza valores extremos)

Espero que les hayan gustado los problemas!!

Siempre atenta a sus dudas :) (bianca.zamora@ug.uchile.cl → cursos)

Buena semana y éxito en su estudio!!

— Bianca