Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Tutorías y Guías del Curso

Semestre primavera 2025

Índice general

Subsucesiones y Continuidad

1.1 Subsucesiones

DEFINICIÓN (SUBSUCESIÓN) Sea (s_n) una sucesión. Sea $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ, a la sucesión (u_n), definida por:

$$u_n = s_{\varphi(n)}.$$

Ejemplo 1.1.

- Si $\varphi(n) = 2n$, entonces $u_n = s_{2n}$. $(u_n) = (s_0, s_2, s_4, s_6, s_8 \ldots)$.
- Si $\varphi(n) = 2n+1$, entonces $u_n = s_{2n+1}$. $(u_n) = (s_1, s_3, s_5, s_7, \ldots)$.

  En general, $(u_n) = (s_{\varphi(n)}) = (s_{\varphi(0)}, s_{\varphi(1)}, s_{\varphi(2)}, \ldots)$.

Observación: Aceptaremos que la función φ no este definida para un número finito de términos. Por ejemplo, si $\varphi(n) = n-5$, tenemos que (s_{n-5}) solo está definida para $n \geq 5$, y no lo está para $n = 1, 2, 3, 4$.

El siguiente teorema caracteriza la convergencia de una sucesión vía la de sus subsucesiones, mostrando que además éstas no pueden tener un límite distinto al de la original.

Teorema 1.1. *Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$s_n \to \ell \qquad \textit{si y solo si} \qquad \textit{Todas las subsucesiones de } (s_n) \textit{ convergen a } \ell.$$

DEMOSTRACIÓN. $(\Longleftarrow)$ Basta tomar $\varphi(n) = n$, con lo que $s_{\varphi(n)} = s_n \to \ell$.
$(\Longrightarrow)$ Sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |s_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Sea $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, estrictamente creciente y eventualmente no definida en un número finito de casos. P.d.q. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq k_0,\ |s_{\varphi(k)} - \ell| \leq \varepsilon$. Efectivamente, como φ no es acotada superiormente (¿por qué?), $\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \varphi(k_0) \geq n_0$. Y luego:

$$\forall k \geq k_0,\ \varphi(k) \geq \varphi(k_0) \geq n_0,$$

de donde $\forall k \geq k_0\ |s_{\varphi(k)} - \ell| \leq \varepsilon$. $\square$

Teorema 1.2 (Bolzano–Weierstrass). *Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

Demostración. La demostración se realiza mediante un método de *dicotomía*.
Sea (s_n) una sucesión acotada. Existen entonces $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_0 \leq s_n \leq b_0.$$

Llamemos $I_0 = [a_0, b_0]$.
Sea a continuación $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Es claro que en alguno de los intervalos $[a_0, c_0]$ y $[c_0, b_0]$, hay una infinidad de términos de la sucesión (s_n). Llamemos $I_1 = [a_1, b_1]$ a dicho intervalo.
Definimos entonces $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Nuevamente, debe haber una infinidad de términos de (s_n) en alguno de los intervalos $[a_1, c_1]$ y $[c_1, b_1]$. Llamamos a dicho intervalo $I_2 = [a_2, b_2]$ y proseguimos de la misma manera.
Así, se formará una colección de intervalos $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n, \ldots$ con las siguientes propiedades:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, el intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ contiene una cantidad infinita de términos de la sucesión (s_n).
- $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \supseteq I_{n+1}$. Cuando esta condición se satisface, se habla de una colección de intervalos *encajonados*.

Definamos entonces la siguiente subsucesión de (s_n) (denotada $(s_{\varphi(n)})$):

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid s_k \in I_1\}\\
\varphi(2) &= \min\{k > \varphi(1) \mid s_k \in I_2\}\\
\varphi(3) &= \min\{k > \varphi(2) \mid s_k \in I_3\}\\
\varphi(n+1) &= \min\{k > \varphi(n) \mid s_k \in I_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

Con esto la subsucesión $(s_{\varphi(n)})$ tiene la siguiente propiedad:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_{\varphi(n)} \in I_n,\ \text{o sea, } a_n \leq s_{\varphi(n)} \leq b_n. \tag{1.1}$$

Finalmente, es claro que las sucesiones (a_n) y (b_n) son monótonas ($a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$) y acotadas ($a_n, b_n \in [a_0, b_0]$), luego convergen a los reales a y b, respectivamente. Además como $a_n \leq b_n$, entonces $a \leq b$.
Por último, ya que $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$, entonces tomando límite se tiene que $b - a = 0$ o sea, $a = b$.
Luego, aplicando sandwich en la desigualdad de (1.1), se obtiene que $s_{\varphi(n)} \to a = b$. □

1.2 Funciones continuas

Sabemos, del semestre anterior, que si tenemos una sucesión $s_n \to \bar{x}$, entonces $\operatorname{sen}(s_n) \to \operatorname{sen}(\bar{x})$.
Es decir, la función seno satisface la siguiente propiedad:

$$s_n \to \bar{x} \implies f(s_n) \to f(\bar{x}).$$

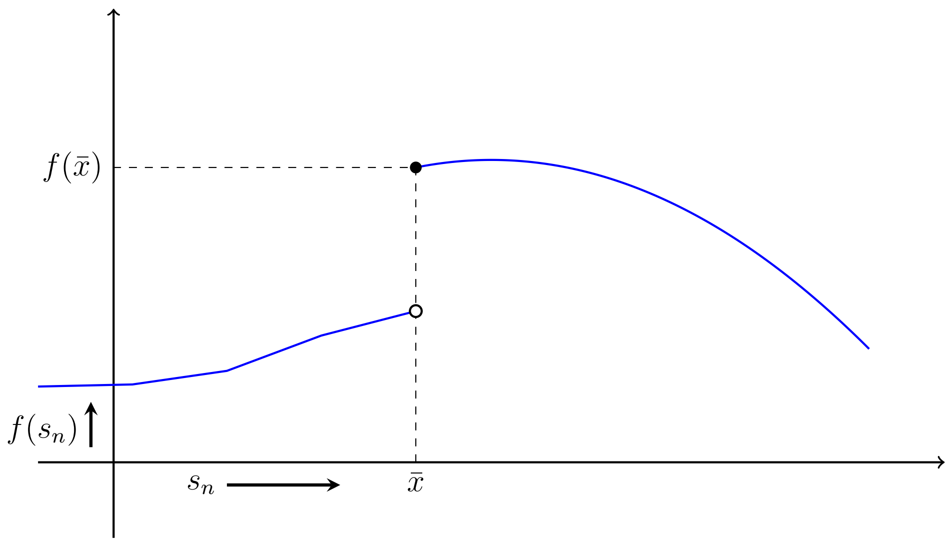


Figura 1: Para esta función f y la sucesión (s_n), $s_n \to \bar{x}$ pero $f(s_n) \not\to f(\bar{x})$.

Pero, ¿se tiene esta propiedad para cualquier función? Veamos la Figura 1.
En la función dibujada, si uno toma cualquier sucesión s_n que converge a $\bar{x}$ por la derecha, la sucesión de las imágenes $f(s_n)$ converge sin problemas al valor $f(\bar{x})$. Sin embargo, al tomar una sucesión s_n que converge a $\bar{x}$ por la izquierda, se tiene que la sucesión $f(s_n)$ converge a un valor $h < f(\bar{x})$.
La intuición nos dice que este fenómeno está relacionado de algún modo con el "salto" o *discontinuidad* que la función f posee. Formalicemos esto vía la siguiente definición.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO) Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una función **función continua en** $\bar{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A,\ x_n \to \bar{x} \implies f(x_n) \to f(\bar{x}).$$

Observación: Notemos que en la definición, la propiedad de ser verificada **para toda sucesión** que converge a $\bar{x}$ y con valores en A. Es decir, si somos capaces de probar que la propiedad es válida para alguna sucesión, eso no es suficiente para que la función sea continua.
Sin embargo, los valores de la sucesión deben estar en el dominio de la función, luego si el dominio es reducido, entonces el número de sucesiones test es pequeña.

Ejercicio 1.1: ¿Cómo se podría restringir el dominio de la función en la Figura 1, para que fuere continua en $\bar{x}$?

Ejemplo 1.2.
Consideremos la función f definida por la ley

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Probemos que f es continua en $\bar{x} = 0$ y en $\bar{x} = 1$.

2. Probemos que f no es continua en $\bar{x}$ si $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Solución.

1. Consideremos el caso $\bar{x} = 0$. Sea (x_n) una sucesión arbitraria que converge a 0.

   $$\text{P.D.Q: } f(x_n) \to f(0) = 0.$$

   En efecto, se tiene que

   $$f(x_n) = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ x_n^2 & \text{si } x_n \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

   donde se puede realizar el acotamiento siguiente:

   $$0 \leq |f(x_n)| \leq |x_n| + x_n^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Usando esta mayoración y el teorema del sandwich de sucesiones se obtiene el resultado buscado.

   Ahora consideremos el caso $\bar{x} = 1$. Sea (x_n) una sucesión arbitraria que converge a 1.

   $$\text{P.D.Q: } f(x_n) \to f(1) = 1.$$

   En efecto, se tiene que

   $$f(x_n) = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ x_n^2 & \text{si } x_n \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

   de donde se deduce que

   $$|f(x_n) - 1| = \begin{cases} |x_n - 1| & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ |x_n^2 - 1| & \text{si } x_n \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Por lo tanto, usando un acotamiento similar al del caso anterior, se obtiene:

   $$0 \leq |f(x_n) - 1| \leq |x_n - 1| + |x_n^2 - 1|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   El resultado buscado es nuevamente una consecuencia directa de esta mayoración y del teorema del sandwich de sucesiones.

2. Consideremos el caso $\bar{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$. En este caso se tiene que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

   Para demostrar que la función no es continua en este punto, debemos mostrar alguna sucesión (x_n) que converja a $\bar{x}$ pero para la cual se tenga que $f(x_n) \not\to \bar{x}$.

   Dada la fórmula de la función f, esto último lo hacemos con una sucesión de números irracionales.

Sea $x_n = \bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Claramente esta sucesión converge a $\bar{x}$. Sin embargo, la sucesión de las imágenes

$$f(x_n) = \left(\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^2 \to \bar{x}^2$$

y como $\bar{x} \notin \{0, 1\}$ se tiene que $\bar{x}^2 \neq \bar{x}$.

El caso $\bar{x} \notin \mathbb{Q}$ se propone como ejercicio. Para formar una sucesión de racionales que converja a $\bar{x}$, use para cada $n \in \mathbb{N}$ la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en el intervalo $(\bar{x}, \bar{x} + \frac{1}{n})$. $\square$

Ejemplo 1.3.
No es difícil probar que las siguientes funciones son continuas:

- $f(x) = c$ (constante) es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \cos(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = e^x$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \ln(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

Las demostraciones se proponen como ejercicios personales de comprensión.

Teorema 1.3 (Álgebra de funciones continuas). *Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones resultan ser continuas en $\bar{x}$:*

1. *$f + g$.*
2. *$f - g$.*
3. *λf, con $\lambda \in \mathbb{R}$.*
4. *$f \cdot g$.*
5. *f/g, cuando $g(\bar{x}) \neq 0$.*

Demostración. Probaremos la continuidad solo para 1 y 5, el resto se proponen como ejercicios. Para 1, debemos probar que si (x_n) es una sucesión en $\operatorname{Dom}(f + g) = A \cap B$ que converge a $\bar{x}$, entonces $(f + g)(x_n)$ converge a $(f + g)(\bar{x})$.
Esto último es cierto ya que $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$. Pero como f y g son continuas en $\bar{x}$, entonces $f(x_n) \to f(\bar{x})$ y $g(x_n) \to g(\bar{x})$, y por el teorema de álgebra de sucesiones

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = (f + g)(\bar{x}).$$

Para 5, sea (x_n) una sucesión con valores en $\mathrm{Dom}(f/g) = (A \cap B) \setminus Z(g)$ ($Z(g)$ es el conjunto de ceros de g), que converge a $\bar{x}$.
Nuevamente, por continuidad de f y g, $f(x_n) \to f(\bar{x})$ y $g(x_n) \to g(\bar{x})$ y usando el teorema de álgebra de sucesiones, resulta:

$$(f/g)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = (f/g)(\bar{x}).$$

□

Teorema 1.4 (Composición de funciones continuas). *Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Si f es continua en $\bar{x} \in A$ y g es continua en $f(\bar{x}) \in B$, entonces la función $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión con valores en $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ que converge a $\bar{x}$.
Recordemos que $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$. Con esto, como $x_n \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$, se tiene que $x_n \in \mathrm{Dom}(f)$ y $f(x_n) \in \mathrm{Dom}(g)$.
Por un lado, tenemos que, $x_n \in \mathrm{Dom}(f)$ y $x_n \to \bar{x}$. Luego, usando la continuidad de f en $\bar{x}$ se concluye que la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(\bar{x})$.
Ahora, tenemos que la sucesión $(f(x_n))$ cumple que $f(x_n) \in \mathrm{Dom}(g)$ y $f(x_n) \to f(\bar{x})$. Luego, por continuidad de g en $f(\bar{x})$, se deduce que

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(\bar{x})) = (g \circ f)(\bar{x}).$$

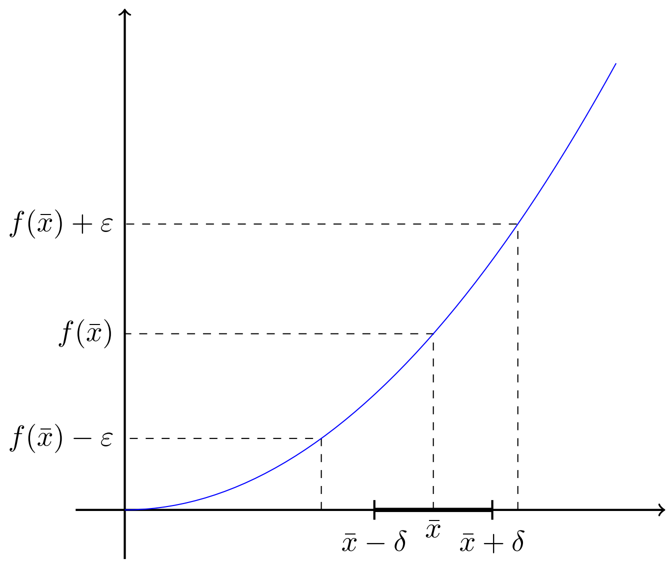
□

Ejemplo 1.4.
Gracias a los teoremas anteriores, se concluye que las siguientes funciones son continuas (pruébelo):

1. $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathrm{Dom}(f)$.
3. $f(x) = a^x$, con $a > 0$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$, $a \neq 1$, es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_+^*$.
5. $f(x) = x^x$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.
6. $f(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.
7. $f(x) = \tan(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 1.5 (Caracterización ε–δ). *Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ si y solo si se cumple que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \left\{ |x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon \right\} \tag{1.2}$$



Demostración. ($\Longrightarrow$) Razonemos por contradicción. Si la propiedad fuese falsa, significaría que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar $x \in A$ con $|x - \bar{x}| \leq \delta$ y $|f(x) - f(\bar{x})| > \epsilon$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $\delta = 1/n$ y encontrar $x_n \in A$ que cumple las propiedades

$$|x_n - \bar{x}| \leq 1/n \qquad \text{y} \qquad |f(x_n) - f(\bar{x})| > \varepsilon.$$

Claramente la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $\bar{x}$ y sin embargo $f(x_n) \not\to f(\bar{x})$ lo cual contradice la continuidad de f en $\bar{x}$.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que la propiedad es cierta y probemos la continuidad. Tomemos una sucesión cualquiera (x_n) con valores en A, tal que $x_n \to \bar{x}$. Debemos probar que $f(x_n) \to f(\bar{x})$. Para ello consideremos $\epsilon > 0$ arbitrario y sea $\delta > 0$ dado por la propiedad. Dado que $x_n \to \bar{x}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \bar{x}| \leq \delta$ para todo $n \geq n_0$. Usando la propiedad, se sigue que $|f(x_n) - f(\bar{x})| \leq \epsilon$ para $n \geq n_0$ con lo cual $f(x_n) \to f(\bar{x})$. □

Observación: Esta propiedad permite entre otras cosas, hacer la conexión entre los conceptos de continuidad y límite de funciones. En efecto, las caracterizaciones $\varepsilon - \delta$ de ambos conceptos son prácticamente los mismos, cambiando ℓ por $f(\bar{x})$ y autorizando a la variable x a tomar el valor $\bar{x}$.
De este modo podemos establecer que si el dominio de la función permite estudiar el límite de $f(x)$ cuando $x \to \bar{x}$ y $\bar{x} \in A$ se tiene que:

$$f \text{ es continua en } \bar{x} \text{ si y solo si } \lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Definición (Función continua) Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua.

Guía de Ejercicios

1. ¿Cómo se podría restringir el dominio de la función en la Figura 1 de la tutoría, para que sea continua en $\bar{x}$?

2. Dadas $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Pruebe que las funciones $f - g$, λf (con $\lambda \in \mathbb{R}$) y $f \cdot g$ son continuas en $\bar{x}$.

3. Usando los teoremas de álgebra y composición de funciones continuas, pruebe que las siguientes funciones son continuas:

a) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathrm{Dom}(f)$.

c) $f(x) = a^x$, con $a > 0$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$, $a \neq 1$, es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

e) $f(x) = x^x$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.

f) $f(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.

g) $f(x) = \tan(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Consideremos la función f definida por la ley $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Termine el ejemplo de la tutoría, probando que f no es continua en $\bar{x}$ para todo $\bar{x} \notin \mathbb{Q}$. Recuerde la indicación: Para formar una sucesión de racionales que converja a $\bar{x}$, use para cada $n \in \mathbb{N}$ la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en el intervalo $(\bar{x}, \bar{x} + \frac{1}{n})$.

5. Pruebe que la función $f(x) = x \operatorname{sen}(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

6. Determine el valor que debemos dar a $f(0)$ para que $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ sea continua en $\bar{x} = 0$.

7. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = \alpha$. Demuestre que independiente del valor de α, f no es continua en 0.

8. Estudie la continuidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Analice por separado los casos $\bar{x} = 0$ y $\bar{x} \neq 0$.

9. Pruebe que la función dada por $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es continua en $\mathbb{R}$.

10. Determine el dominio y puntos de continuidad de las siguientes funciones

(a) $x \mapsto \operatorname{sen}(x)/\ln(1 + \exp(x))$

(b) $x \mapsto \sqrt{1 + \ln(1 + x^3)}$

(c) $x \mapsto \exp(x) x^{3/2}/\tan(x)$

11. Estudie dominio y continuidad de las funciones $\cot(x), \sec(x), \csc(x)$.

12. (a) Sean $f, g\colon A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, funciones continuas, tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in A$. Demuestre que la función $h(x) = g(x)^{f(x)}$ está bien definida y es continua en A.

(b) Estudie la convergencia de la sucesión $y_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\exp(1/n)}$.

Guía de Problemas

P1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x) < 0$ para todo $x < c$ y $f(x) > 0$ para $x > c$. Demuestre que $f(c) = 0$.

P2. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$. Supongamos que existe $L \geq 0$ tal que $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ para todo $x, y \in A$ (tal función se dice lipschitziana de parámetro L). Pruebe que f es continua en A.

P3. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, y $r_n > 0$ una sucesión tal que $r_n \to 0$. Pruebe que f es continua en $\bar{x}$ si y solamente si la sucesión

$$s_n := \sup_x \{|f(x) - f(\bar{x})| : |x - \bar{x}| \leq r_n\},$$

converge a cero.

P4. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}, q \neq 0$, p, q primos relativos, y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Pruebe que f es continua en todo punto $\bar{x} \notin \mathbb{Q}$ y discontinua en todo $\bar{x} \in \mathbb{Q}$.

P5. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $\bar{x} \in \mathbb{R}$, con $f(\bar{x}) > g(\bar{x})$. Pruebe que existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$. Indicación: puede ser conveniente analizar primeramente el caso $g \equiv 0$.

P6.

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe que

- (a) si $f(x + y) = f(x) + f(y), \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = ax$ con $a = f(1)$.
- (b) si $f(x + y) = f(x)f(y), \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = a^x$ con $a = f(1)$.

b) Sea $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in (0, \infty)$. Demuestre que $f(x) = \log_a(x)$ con $a = f^{-1}(1)$.

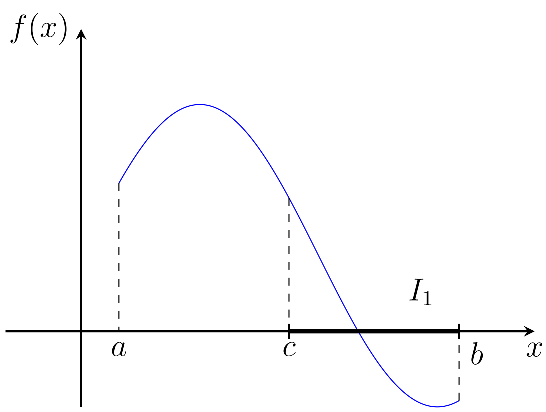
Continuidad. Los grandes teoremas

2.1 El teorema de los valores intermedios

Una propiedad muy útil para estudiar la imagen de una función continua de un intervalo es el hecho que una tal función que toma un par de valores, está obligada a tomar todos los valores intermedios. La esencia de esta propiedad la enunciamos en el siguiente resultado de existencia de raíces de ecuaciones.

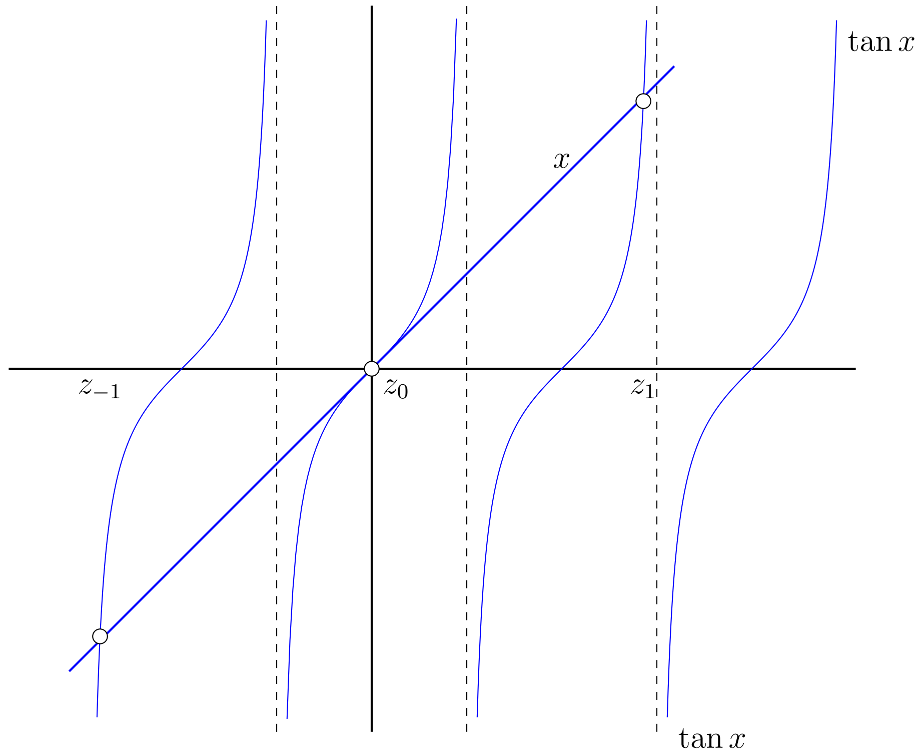
Teorema 2.1. *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua tal que* $f(a)f(b) \leq 0$. *Entonces existe* $\bar{x} \in [a,b]$ *tal que* $f(\bar{x}) = 0$.

Demostración. Consideremos el intervalo $I_0 = [a,b]$ y $c = (a+b)/2$ su punto medio.



Tomando $I_1 = [a,c]$ si $f(a)f(c) \leq 0$ o $I_1 = [c,b]$ si $f(c)f(b) \leq 0$, obtenemos un intervalo $I_1 = [a_1, b_1] \subseteq I_0$ con $f(a_1)f(b_1) \leq 0$ y largo $(b_1 - a_1) = (b-a)/2$. Iterando este procedimiento se obtiene una sucesión decreciente de intervalos $I_n = [a_n, b_n] \subseteq I_{n-1}$ tal que $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ y $(b_n - a_n) = (b-a)/2^n$. Por el Teorema de Intervalos Encajonados, las sucesiones a_n y b_n convergen hacia un mismo punto $\bar{x} \in [a,b]$, y pasando al límite en la desigualdad $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ se deduce $f(\bar{x})^2 \leq 0$, es decir $f(\bar{x}) = 0$. □

Ejemplo 2.1.
Estudiemos las soluciones de la ecuación $\tan(x) = x$. Gráficamente, se trata de encontrar las intersecciones de los gráficos de las funciones $x \mapsto \tan(x)$ y $x \mapsto x$ y, como muestra la siguiente figura, resulta intuitivo que la ecuación tiene infinitas soluciones $\cdots < z_{-2} < z_{-1} < z_0 = 0 < z_1 < z_2 < \cdots$.



Como las funciones $x \mapsto \tan(x)$ y $x \mapsto x$ son impares, es claro que si z es una solución de la ecuación, entonces $-z$ también. En el gráfico esto corresponde al hecho que $z_{-1} = -z_1, z_{-2} = -z_2, \ldots$. Probemos la existencia de una raíz z_1 en $(\pi/2, 3\pi/2)$. Para ello consideremos la función $f(x) = \tan(x) - x$ y notemos que $f(\pi) = -\pi < 0$. Por otra parte, tomando la sucesión $x_n = 3\pi/2 - 1/n$ se observa que $f(x_n) \to +\infty$ de modo que para algún $\bar{n} \in \mathbb{N}$ se tendrá $f(x_{\bar{n}}) > 0$. El teorema anterior nos permite concluir la existencia de un número $z_1 \in [\pi, x_{\bar{n}}]$ tal que $f(z_1) = 0$, esto es $\tan(z_1) = z_1$. Intentemos estimar z_1 con 6 decimales usando el algoritmo sugerido en la demostración del Teorema 2.1. Partamos con $a_0 = 4.4; b_0 = 4.5$ para los cuales se tiene $f(a_0) = -1.30$ y $f(b_0) = 0.14$.

n	$[a_n, b_n]$	$c_n = (a_n + b_n)/2$	$f(c_n)$
0	[4.400000,4.500000]	4.450000	-7.3e-01
1	[4.450000,4.500000]	4.475000	-3.4e-01
2	[4.475000,4.500000]	4.487500	-1.2e-01
3	[4.487500,4.500000]	4.493750	6.9e-03
4	[4.487500,4.493750]	4.490625	-5.5e-02
5	[4.490625,4.493750]	4.492188	-2.5e-02
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	[4.493409,4.493410]	4.493409	6.6e-07
21	[4.493409,4.493409]	4.493409	1.8e-07

Así, luego de 21 iteraciones obtenemos la estimación $z_1 \sim 4.49340946674347$ la cual posee al menos 6 decimales exactos. Como ejercicio haga un programa para estimar z_2 con 6 decimales.

Ejemplo 2.2.
Pruebe que todo polinomio cúbico tiene al menos una raíz real. En efecto, sea $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ con $d \neq 0$ un polinomio cúbico cualquiera. Observemos que $p(n)/n^3 \to d$ mientras que $p(-n)/n^3 \to -d$. De aquí se sigue que para n suficientemente grande $p(n)$ tiene el mismo signo que d, mientras que $p(-n)$ tiene el signo contrario. Como consecuencia del teorema anterior el polinomio debe tener una raíz en el intervalo $[-n, n]$. Generalice el argumento para probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real. Analice que ocurre en el caso de polinomios de grado par.

Como corolario inmediato del Teorema 2.1 se obtiene la Propiedad de Darboux o Teorema de los Valores Intermedios:

Teorema 2.2. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a,b])$ entonces para todo número e comprendido entre c y d, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = e$.*

Demostración. Sean a_0 y b_0 tales que $f(a_0) = c$ y $f(b_0) = d$. Sin perder generalidad podemos suponer $a_0 \leq b_0$. Aplicando el teorema anterior a la función $g\colon [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - e$ se obtiene la existencia de x tal que $g(x) = 0$, vale decir $f(x) = e$. $\square$

Ejemplo 2.3.
El Teorema 2.2 permite demostrar, por ejemplo, que la imagen de la función exp es $(0, +\infty)$. En efecto, dado que las sucesiones $\exp(-n)$ y $\exp(n)$ convergen hacia 0 y $+\infty$ respectivamente, cualquiera sea el número real $y > 0$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\exp(-n) < y < \exp(n)$. El teorema de los valores intermedios nos asegura la existencia de $x \in [-n, n]$ tal que $\exp(x) = y$. Por otra parte, como ya sabemos que $\exp(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se concluye que $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Recordemos que exp es estrictamente creciente con lo cual es inyectiva, de modo que $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es biyectiva. Su inversa, como ya vimos en capítulos anteriores, es la función $\ln\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

2.2 Máximos y mínimos: el teorema de Weierstrass

En esta sección probaremos otra propiedad importante de las funciones continuas: en un intervalo cerrado y acotado el máximo y el mínimo son alcanzados. Exactamente se tiene:

Teorema 2.3. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a,b]$.*

Demostración. Probemos la propiedad del mínimo (la propiedad del máximo se prueba de manera análoga y se deja como ejercicio).
Sea $m = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, eventualmente $m = -\infty$. Probaremos que existe $\bar{x} \in [a,b]$ tal que $f(\bar{x}) = m$ lo cual establece simultáneamente que el ínfimo es finito y que es alcanzado. Para ello consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f(x_n)$ converge hacia m. En virtud del Teorema de Weierstrass podemos extraer una subsucesión convergente $x_{n_k} \to \bar{x} \in [a,b]$. Por continuidad se tiene $f(x_{n_k}) \to f(\bar{x})$, de donde se deduce que $m = f(\bar{x})$ probando simultáneamente que m es finito (es decir, f es acotada inferiormente) y que el ínfimo es alcanzado (en el punto $\bar{x}$). $\square$

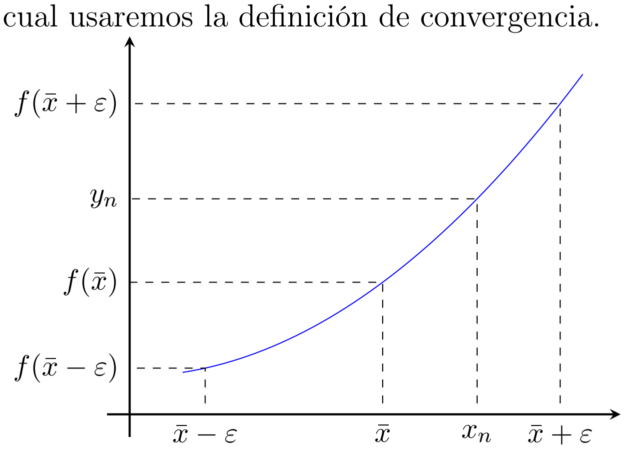
Observemos que en el resultado anterior todas las hipótesis son necesarias. La función $x \mapsto \exp(x)$, si bien tiene un ínfimo finito sobre $\mathbb{R}$, éste no es alcanzado: $\mathbb{R}$ no es acotado. Por otra parte, la función $x \mapsto x^2$ alcanza su mínimo pero no así el máximo en el intervalo $[0,1)$, el cual no es cerrado. Finalmente, la función definida por $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ no es acotada y no alcanza ni el mínimo ni el máximo en el intervalo $[-1,1]$. La dificultad en este caso proviene de la falta de continuidad en $\bar{x} = 0$.

2.3 Continuidad de las funciones inversas

Para finalizar el estudio de las funciones continuas, probaremos un resultado de gran utilidad para establecer la continuidad de una función que es la inversa de una función continua.
Consideremos $f\colon I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo (finito o infinito, abierto o cerrado o semiabierto). Sea $J = f(I)$ su imagen. Recordemos que si f es estrictamente monótona (creciente o decreciente) entonces es inyectiva y en consecuencia posee una inversa $f^{-1}\colon J \to I$ (la cual tiene el mismo tipo de monotonía que f). El resultado anunciado es el siguiente:

Teorema 2.4. *Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente). Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1}\colon J \to I$ es continua.*

Demostración. El hecho que J es un intervalo se demuestra usando el Teorema 2.2 (ejercicio). Probemos que f^{-1} es continua en todo punto $\bar{y} \in J$. La demostración se separa en distintos casos según si f es creciente o decreciente, y según si $\bar{y}$ es un extremo del intervalo J o se encuentra en su interior. En todos los casos la idea de la demostración es básicamente la misma, de modo que nos limitaremos a analizar la situación más simple en que f es creciente e $\bar{y}$ se encuentra en el interior del intervalo J.
Sea $\bar{y}_n \in J$ tal que $y_n \to \bar{y}$. Sea $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ y $x_n = f^{-1}(y_n)$. Notemos que $\bar{x}$ se encuentra en el interior del intervalo I (ejercicio, usar la monotonía de f). Debemos probar que $x_n \to \bar{x}$, para lo cual usaremos la definición de convergencia.



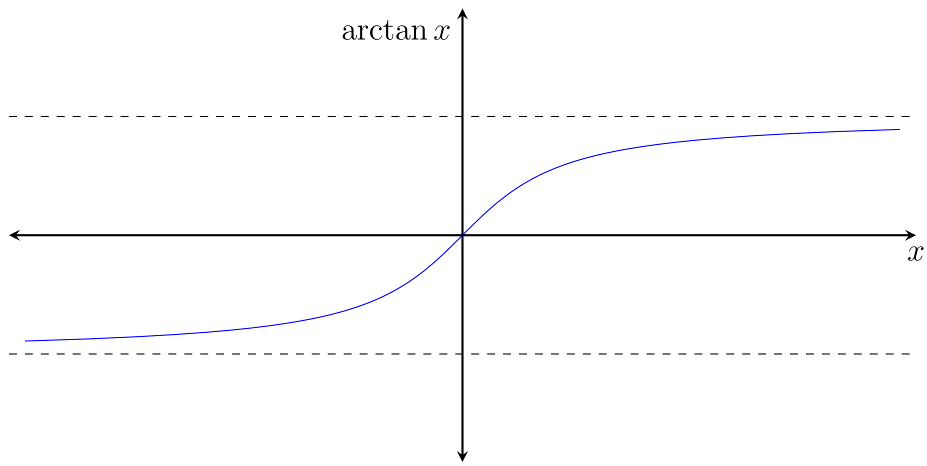
Sea $\varepsilon > 0$ pequeño tal que $[\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon] \subseteq I$. Como $\bar{x}-\varepsilon < \bar{x} < \bar{x}+\varepsilon$, la monotonía de f implica $f(\bar{x}-\varepsilon) < \bar{y} < f(\bar{x}+\varepsilon)$ y, por lo tanto, dado que $y_n \to \bar{y}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(\bar{x}-\varepsilon) < y_n < f(\bar{x}+\varepsilon)$$

para todo $n \geq n_0$. Como f^{-1} es también creciente, resulta $\bar{x}-\varepsilon < f^{-1}(y_n) < \bar{x}+\varepsilon$, es decir $x_n \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$. □

Ejemplo 2.4.
La función $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es la inversa de la función exp, y en consecuencia es continua. Esta es una demostración alternativa de la continuidad del logaritmo, que ya habíamos demostrado antes.

Ejemplo 2.5.
La función $x \mapsto \tan(x)$ no es biyectiva. Sin embargo, su restricción al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ es continua y estrictamente creciente, con imagen $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$. En consecuencia, posee una inversa que resulta ser continua, la cual denotaremos $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Aparte de ser continua, esta función es impar, creciente, $\arctan(0) = 0$, y satisface $-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A partir del gráfico de tan obtenemos un gráfico aproximado para arctan:



Ejemplo 2.6.
La función $\operatorname{sen}\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ es continua y creciente, con imagen igual a $[-1, 1]$. Su inversa es en consecuencia continua y creciente. Se denota $\operatorname{arc\,sen}\colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$. Similarmente, $\cos\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ es continua y decreciente, con imagen $[-1, 1]$. Su inversa $\operatorname{arc\,cos}\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ es por lo tanto continua y decreciente.

Ejemplo 2.7.
La función $\operatorname{senh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y creciente y su imagen es todo $\mathbb{R}$. Su inversa $\operatorname{senh}^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es por lo tanto continua y creciente. Del mismo modo, $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y creciente con $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$. Luego, su inversa $\tanh^{-1}\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ es continua y creciente.

2.4 Continuidad uniforme

A lo largo de este capítulo hemos analizado la noción de continuidad en términos de sucesiones: una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) es continua en el punto $\bar{x} \in A$ si toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ que converge hacia $\bar{x}$ es transformada por f en una sucesión $f(x_n)$ que converge hacia $f(\bar{x})$, es decir

$$(x_n \in A, x_n \to \bar{x}) \implies f(x_n) \to f(\bar{x}).$$

Vimos además, una caracterización sin usar sucesiones en el Teorema 1.5. Usando dicha caracterización ε–δ, es posible definir un criterio de continuidad más fuerte.

A modo de motivación, veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.8.
Ilustremos la caracterización ε–δ en un caso sencillo. Consideremos la función $f(x) = x^3$ y un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Sabemos que f es continua en $\bar{x}$ de modo que se debe tener la propiedad (1.2). Verifiquemos esta última de manera directa. Tomemos $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |x^3 - \bar{x}^3| \leq \varepsilon.$$

La condición $|x^3 - \bar{x}^3| \leq \varepsilon$ puede escribirse como $\sqrt[3]{\bar{x}^3 - \varepsilon} \leq x \leq \sqrt[3]{\bar{x}^3 + \varepsilon}$, la cual a su vez es equivalente a (ejercicio)

$$|x - \bar{x}| \leq \sqrt[3]{|\bar{x}|^3 + \varepsilon} - |\bar{x}|$$

de tal forma que basta tomar $\delta = \sqrt[3]{|\bar{x}|^3 + \varepsilon} - |\bar{x}|$.

Vale la pena notar que en general δ depende de ε pero también del punto $\bar{x}$ en consideración, vale decir, $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{x})$. En particular en el ejemplo anterior se observa que la cantidad δ se hace más pequeña a medida que se reduce $\varepsilon > 0$ y, asimismo, para un valor fijo de ε se tiene que δ tiende a 0 a medida que $|\bar{x}|$ crece. Esto último no siempre ocurre y para ciertas funciones es posible encontrar $\delta > 0$ que satisface la propiedad (1.2) *independientemente* del punto $\bar{x}$ en consideración.

Ejemplo 2.9.
Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$ definida en $[0, \infty)$ y $\bar{x} \geq 0$. Como f es continua en $\bar{x}$ se tiene la propiedad (1.2). Explícitamente, dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| \leq \varepsilon.$$

Usando la desigualdad $|\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| \leq \sqrt{|x - \bar{x}|}$ (ejercicio) se puede escribir la siguiente secuencia de desigualdades:

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| \leq \sqrt{|x - \bar{x}|} \leq \sqrt{\delta},$$

de tal forma que tomando $\delta = \varepsilon^2$, se obtiene la propiedad (1.2). Lo interesante de este cálculo es que δ no depende de $\bar{x}$ y la implicancia

$$(|x - \bar{x}| \leq \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2) \implies |\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| \leq \varepsilon$$

se satisface independientemente del $\bar{x}$ considerado. Esta propiedad de uniformidad de δ respecto del punto $\bar{x}$ se conoce como *continuidad uniforme*.

Definición La función $f\colon A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) se dice *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$(\forall x, y \in A) \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \tag{2.1}$$

En virtud del Teorema 1.5 es claro que una función uniformemente continua resulta ser continua en todo su dominio. La recíproca no es cierta en general como lo muestra el Ejemplo 2.8, a menos que el dominio de la función sea un intervalo cerrado y acotado como probamos a continuación.

Teorema 2.5. *Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ con $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y solo si es continua en todo punto $\bar{x} \in A$.*

Demostración. Basta probar la implicación $\Longleftarrow$. Supongamos por contradicción que f es continua en todo punto $\bar{x} \in A$ pero que no es uniformemente continua, esto es, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ podemos encontrar puntos $x, y \in A$ tales que $|x - y| \leq \delta$ y $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. En particular, tomando $\delta = 1/n$ encontraremos $x_n, y_n \in A$ tales que $|x_n - y_n| \leq 1/n$ y $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Ahora bien, puesto que A es acotado podemos extraer una subsucesión convergente de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_{n_k} \to \bar{x}$. Como $a \leq x_n \leq b$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bar{x} \in [a, b]$. En virtud de la desigualdad triangular se sigue que $y_{n_k} \to \bar{x}$. Con esto, usando la continuidad de f en el punto $\bar{x}$ obtenemos

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| = 0$$

lo que constituye una contradicción con el hecho que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Guía de Ejercicios

1. Pruebe el Teorema de Weierstrass en su versión para máximo. Es decir, dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su máximo en $[a,b]$.

2. Pruebe las propiedades de la función arctan enunciadas en el Ejemplo 1.6.

3. Pruebe que si $f\colon I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, es continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente), entonces $J = f(I)$ es un intervalo.

4. Pruebe la siguiente variante del Teorema 1.9: si $f\colon I \to J$ es estrictamente monótona y biyectiva con I y J intervalos, entonces f y f^{-1} son continuas.

5. Complete los ejemplos 1.9 y 1.10 de la tutoría.

6. Encuentre la imagen de las funciones

$$f(x) = \ln\left(2 + \exp(x)\right) \text{ y } f(x) = \operatorname{sen}\left((x^2-1)/(x^2+1)\right).$$

7. Demuestre que la ecuación $x \operatorname{sen}(x) = 2$ posee infinitas soluciones. Haga un programa para estimar una solución positiva de esta ecuación, con al menos 6 decimales de precisión.

8. Demuestre que la ecuación $\exp(x)\cos(x) + 1 = 0$ tiene infinitas raíces reales.
Indicación: Considere intervalos de la forma $[k\pi, (k+1)\pi]$ para aplicar el teorema del valor intermedio.

9. Si $h(x) = x^3 - x^2 + x$ demuestre que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h(x_0) = 10$. Justifique.

10. Sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ un polinomio de grado n, tal que $c_0 c_n < 0$. Demuestre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

Guía de Problemas

P1. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$.

(a) Pruebe que existen $\underline{x}, \overline{x} \in [a,b]$ tales que

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f(\overline{x}) \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in [a,b].$$

(b) Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a,b]$ cualesquiera existe $\beta \in [a,b]$ tal que

$$f(\beta) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

P2. Dado $a > 0$, sea $f\colon [0,2a] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(2a)$. Pruebe que $\exists \bar{x} \in [0,a]$ tal que $f(\bar{x}) = f(\bar{x}+a)$.

P3. Definimos la función $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

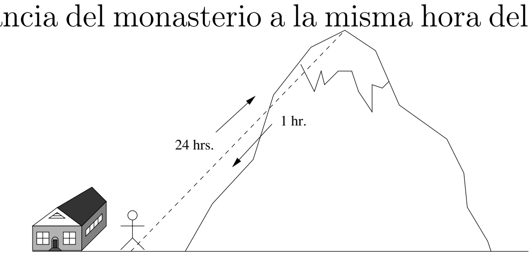
(a) Verifique que tanh es continua, que $\tanh(0) = 0$ y que $-1 < \tanh(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Pruebe que si $n \to \infty$ entonces $\tanh(n) \to 1$ y que $\tanh(-n) \to -1$.

(c) Usando el TVI, demuestre que $\forall y \in (-1,1)$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.
Indicación: analice separadamente los casos $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$.

(d) Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$.

P4. Un monje vive en un monasterio a los pies de una montaña. El día 7 de cada mes a las 00:00 hrs., el monje comienza una caminata de 24 horas hasta la cumbre de la montaña. Una vez ahí, medita durante 6 horas y luego baja la montaña de vuelta al monasterio. La bajada le toma 1 hora. Demuestre que existen dos instantes, uno en el día 7 y otro en el día 8, en los que el monje se encuentra a la misma distancia del monasterio a la misma hora del día.



P5. Un conductor demora 5 horas en recorrer los (aproximadamente) 500 kms. que separan Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje, de una longitud de 100 kms., que es recorrido en exactamente 1 hora.

P6. Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$, $a < b$ y tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$.Demuestre que $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x-a)^n$ y $g(x) = -(x-b)^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para este caso, el valor de $x_0 \in [a,b]$.

P7. **(a)** Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) > 0$. Pruebe que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

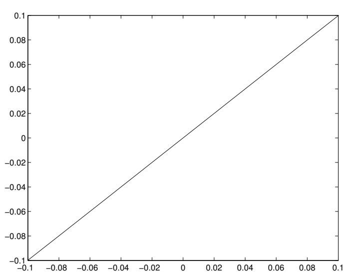
(b) Considere F y G continuas en x_0 y tales que $F(x_0) < G(x_0)$. Demuestre que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $F(x) < G(x)$.

P8. Sea $f\colon [a,b] \to [a,b]$ una función continua. Demuestre que existe $x \in [a.b]$ tal que $f(x) = x$ (un tal punto se llama *punto fijo* para la función $f(\cdot)$).
Indicación: Considere $g(x) = f(x) - x$.

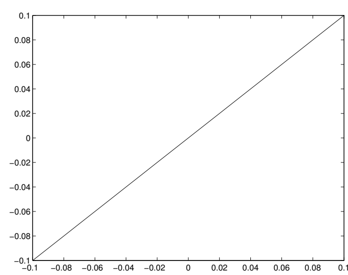
Derivadas

3.1 Funciones derivables

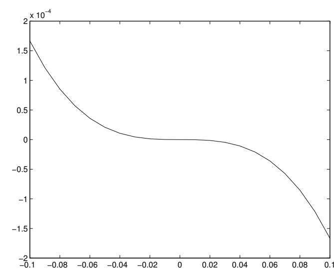
Las funciones más simples de analizar son las funciones afines $a(x) = n + mx$. Ahora bien, muchas funciones no lineales son "aproximadamente afines" cuando se las observa en una pequeña vecindad en torno a un punto. Por ejemplo, a simple vista, el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[-0.1, 0.1]$ es prácticamente indistinguible del gráfico de $a(x) = x$. De hecho, la diferencia máxima entre ambas funciones es del orden de 1.7e-04, vale decir menos del 0.1 % del largo del intervalo.



$f(x) = \operatorname{sen}(x)$



$a(x) = x$



$o(x) = \operatorname{sen}(x) - x$

El mismo ejercicio en el intervalo $[-0.01, 0.01]$ arroja diferencias inferiores al 0.001 % del largo del intervalo. Observando intervalos más y más pequeños en torno a 0 las discrepancias se hacen cada vez menos perceptibles, de manera que la función afín $a(x) = x$ es una muy buena aproximación de la función $\operatorname{sen}(x)$ cerca de 0. Esto corresponde simplemente al hecho que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)/x = 1$, lo cual se puede escribir también en la forma

$$\operatorname{sen}(x) = x + o(x)$$

donde el *"error"* $o(x)$ es pequeño comparado con x: $\lim\limits_{x\to 0} o(x)/x = 0$.

Más generalmente consideremos una función $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in (a, b)$. Supongamos que deseamos encontrar una función afín $a(x) = n + mx$ que sea una "buena" aproximación de $f(x)$ en torno a $\bar{x}$, es decir

$$f(x) \sim a(x) \quad \text{para} \quad x \sim \bar{x}.$$

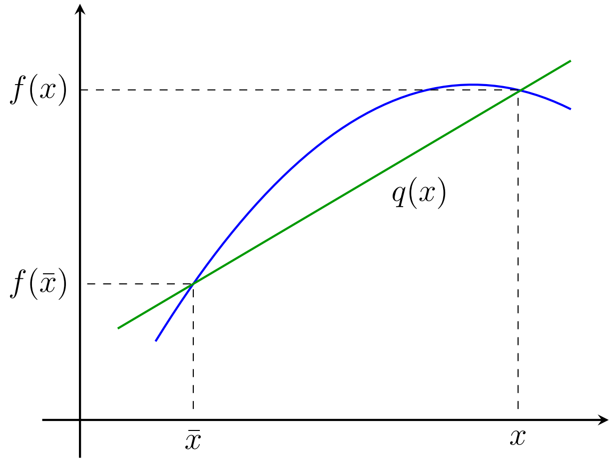
Es razonable imponer de partida que ambas funciones entreguen el mismo valor para $x = \bar{x}$, vale decir, a debe ser de la forma $a(x) = f(\bar{x}) + m(x - \bar{x})$. Con esto, la propiedad de aproximación se escribe

$$f(x) \sim f(\bar{x}) + m(x - \bar{x})$$

y por lo tanto la pendiente m debe ser tal que

$$m \sim q(x) := \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Dado que nos interesa la propiedad de aproximación para x cercano a $\bar{x}$, es razonable escoger m como el límite de los cuocientes $q(x)$ cuando x tiende a $\bar{x}$. Geométricamente, $q(x)$ corresponde a la pendiente de la recta secante al gráfico de f como muestra la figura, y el proceso límite se interpreta como la búsqueda de la recta tangente al gráfico de f en $\bar{x}$.



> Definición Diremos que $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a,b)$, si existe el límite
>
> $$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$
>
> Dicho límite se denota $f'(\bar{x})$ o bien $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\bar{x})$ y se llama *derivada de f en $\bar{x}$*.

De manera equivalente, f es derivable en $\bar{x}$ si existe una pendiente $m = f'(\bar{x})$ tal que la función afín $a(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$ es una aproximación de f en el sentido que

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})$$

con $\lim_{h \to 0} o(h)/h = 0$. Usando el cambio de variable $h = x - \bar{x}$, lo anterior puede escribirse equivalentemente

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}$$

o también

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h).$$

Notemos que si f es derivable en $\bar{x}$ entonces es continua en dicho punto pues

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \lim_{x \to \bar{x}} [f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})] = f(\bar{x}).$$

Ejemplo 3.1.
Una función afín $f(x) = a + bx$ es obviamente derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con $f'(\bar{x}) = b$. En particular las funciones constantes son derivables con derivada nula en todo punto.

Ejemplo 3.2.
La función $f(x) = |x|$ es derivable en todo punto $\bar{x} \neq 0$. De hecho, si $\bar{x} > 0$ la función f coincide con la función $g(x) = x$ en un entorno de $\bar{x}$ y por lo tanto $f'(\bar{x}) = 1$. Similarmente se tiene $f'(\bar{x}) = -1$ si $\bar{x} < 0$. Para $\bar{x} = 0$ la función $|x|$ no es derivable pues $\lim_{h \to 0} |h|/h$ no existe (los límites laterales son distintos).

Ejemplo 3.3.
La función definida por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, es continua en $\bar{x} = 0$ pero no es derivable en dicho punto pues $[f(h) - f(0)]/h = \operatorname{sen}(1/h)$ no converge cuando $h \to 0$.

Ejemplo 3.4.
La función $f(x) = x^2$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$, pues

$$\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = \frac{(\bar{x}+h)^2 - \bar{x}^2}{h} = \frac{2\bar{x}h + h^2}{h} = 2\bar{x} + h \longrightarrow 2\bar{x}$$

de modo que $f'(\bar{x}) = 2\bar{x}$.

Ejemplo 3.5.
El ejemplo de motivación del capítulo muestra que la función $\operatorname{sen}(x)$ es derivable en $\bar{x} = 0$ con $\operatorname{sen}'(0) = 1$. Más generalmente, esta función es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ y se tiene

$$\operatorname{sen}'(\bar{x}) = \cos(\bar{x}).$$

En efecto, la fórmula del seno de una suma de ángulos nos da

$$\frac{\operatorname{sen}(\bar{x}+h) - \operatorname{sen}(\bar{x})}{h} = \frac{\operatorname{sen}(\bar{x})(\cos(h) - 1) + \cos(\bar{x}) \operatorname{sen}(h)}{h}$$

de modo que la conclusión se sigue de los límites conocidos : $\lim\limits_{h\to 0}[\cos(h) - 1]/h = 0$ y $\lim\limits_{h\to 0} \operatorname{sen}(h)/h = 1$.
Similarmente, $\cos(x)$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ y se tiene

$$\cos'(\bar{x}) = -\operatorname{sen}(\bar{x}).$$

Esto resulta de la fórmula del coseno de una suma de ángulos que permite escribir

$$\frac{\cos(\bar{x}+h) - \cos(\bar{x})}{h} = \frac{\cos(\bar{x})(\cos(h) - 1) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \operatorname{sen}(h)}{h}.$$

Ejemplo 3.6.
La función $\exp(x)$ es derivable en todo punto $\bar{x}$ con

$$\exp'(\bar{x}) = \exp(\bar{x}).$$

En efecto, dado que $\lim_{h\to 0}[\exp(h) - 1]/h = 1$ (límite conocido), se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(\bar{x}+h) - \exp(\bar{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \exp(\bar{x}) \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(\bar{x}).$$

Asimismo, el límite $\lim_{u\to 0} \ln(1+u)/u = 1$ implica que $\ln(x)$ es derivable en todo punto $\bar{x} > 0$ con

$$\ln'(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\bar{x}+h) - \ln(\bar{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h/\bar{x})}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{\bar{x}u} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

3.2 Reglas de cálculo de derivadas

Álgebra de derivadas

Las propiedades algebraicas del límite nos permiten obtener reglas sencillas para calcular la derivada de una suma, producto y cuociente de funciones derivables.

Proposición 3.1. *Sean $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\bar{x} \in (a,b)$. Entonces:*

(a) $f+g$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(f+g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x}).$$

(b) fg es derivable en $\bar{x}$ con

$$(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x}).$$

(c) Si $g(\bar{x}) \neq 0$ entonces f/g es derivable en $\bar{x}$ con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}.$$

Demostración. La propiedad (a) resulta de la linealidad del límite junto con

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} + \frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Análogamente, para ver (b) basta usar la identidad

$$\frac{f(x)g(x) - f(\bar{x})g(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f(x)\frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}} + g(\bar{x})\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Observando que f es continua en $\bar{x}$ y usando álgebra de límites resulta que el primer término de la suma anterior converge a $f(\bar{x})g'(\bar{x})$, mientras que el segundo término tiende a $g(\bar{x})f'(\bar{x})$. La propiedad (c) se obtiene de manera similar usando la descomposición

$$\frac{f(x)/g(x) - f(\bar{x})/g(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{1}{g(x)g(\bar{x})}\left[g(\bar{x})\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f(\bar{x})\frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}}\right].$$ □

Ejemplo 3.7.
Para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, la función $f_n(x) = x^n$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con

$$f_n'(\bar{x}) = n\bar{x}^{n-1}.$$

Los ejemplos de la sección anterior muestran que la fórmula vale para $n = 0, 1, 2$. Probemos por inducción que la fórmula es cierta para todo $n \geq 1$. En efecto, si el resultado se tiene para un cierto $n \geq 1$ entonces, de acuerdo a la proposición anterior la función $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x = f_n(x) \cdot x$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$f'_{n+1}(\bar{x}) = f'_n(\bar{x}) \cdot \bar{x} + f_n(\bar{x}) \cdot 1 = n\bar{x}^{n-1} \cdot \bar{x} + \bar{x}^n = (n+1)\bar{x}^n$$

lo cual concluye el paso de inducción.
Con esto, la fórmula para la derivada de un cuociente implica que para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, la función $g_n(x) = x^{-n} = 1/x^n$ es derivable en todo punto $\bar{x} \neq 0$ con

$$g'_n(\bar{x}) = \frac{-n\bar{x}^{n-1}}{(\bar{x}^n)^2} = -n\bar{x}^{-n-1}.$$

Ejemplo 3.8.
Como corolario del ejemplo anterior se sigue que todo polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con

$$p'(\bar{x}) = a_1 + 2a_2\bar{x} + 3a_3\bar{x}^2 + \cdots + na_n\bar{x}^{n-1}.$$

Por ejemplo $p(x) = 1 + x^3 + 5x^7$ es derivable con $p'(\bar{x}) = 3\bar{x}^2 + 35\bar{x}^6$. Asimismo, toda función racional es derivable en su dominio. Por ejemplo $f(x) = x/(1 - x^2)$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$, con

$$f'(\bar{x}) = \frac{1 \cdot (1 - \bar{x}^2) - \bar{x} \cdot (-2\bar{x})}{(1 - \bar{x}^2)^2} = \frac{1 + \bar{x}^2}{(1 - \bar{x}^2)^2}.$$

Ejemplo 3.9.
Las funciones $\tan(x)$ y $\cot(x)$ son derivables en sus respectivos dominios y se tiene

$$\begin{aligned} \tan'(\bar{x}) &= \sec^2(\bar{x}), \\ \cot'(\bar{x}) &= -\csc^2(\bar{x}). \end{aligned}$$

La primera fórmula por ejemplo es válida para todo $\bar{x} \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, y se obtiene usando la fórmula de la derivada de un cuociente pues

$$\left(\frac{\mathrm{sen}}{\cos}\right)'(\bar{x}) = \frac{\mathrm{sen}'(\bar{x})\cos(\bar{x}) - \mathrm{sen}(\bar{x})\cos'(\bar{x})}{\cos^2(\bar{x})} = \frac{\cos^2(\bar{x}) + \mathrm{sen}^2(\bar{x})}{\cos^2(\bar{x})} = \frac{1}{\cos^2(\bar{x})}.$$

Ejemplo 3.10.
La regla del cuociente implica que $f(x) = \exp(-x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = -\exp(-x)$. De esto, usando álgebra de derivadas, se deduce

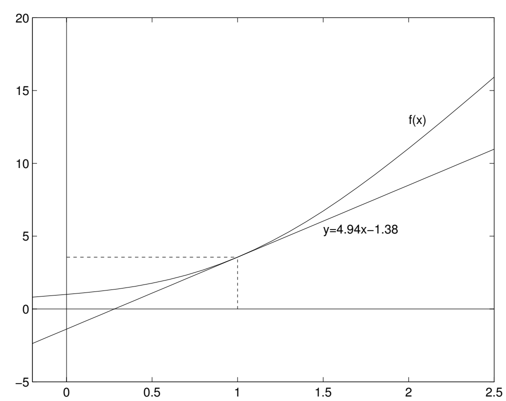
$$\begin{aligned}\operatorname{senh}'(\bar{x}) &= \cosh(\bar{x}),\\ \cosh'(\bar{x}) &= \operatorname{senh}(\bar{x}),\\ \tanh'(\bar{x}) &= 1/\cosh^2(\bar{x}).\end{aligned}$$

Ejemplo 3.11.
La función $f(x) = \exp(x) + x^2 \operatorname{sen}(x)$ es derivable en todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. En efecto, las funciones x^2 y $\operatorname{sen}(x)$ son derivables en todo $\mathbb{R}$, y por lo tanto lo mismo ocurre con su producto $x^2 \operatorname{sen}(x)$. La suma de esta última con la función derivable $\exp(x)$, nos da la función $f(x)$ la cual resulta por lo tanto derivable en todo $\mathbb{R}$. El álgebra de derivadas nos permite calcular

$$f'(\bar{x}) = \exp'(\bar{x}) + 2\bar{x}\operatorname{sen}(\bar{x}) + \bar{x}^2 \operatorname{sen}'(\bar{x}) = \exp(\bar{x}) + 2\bar{x}\operatorname{sen}(\bar{x}) + \bar{x}^2\cos(\bar{x}).$$

En particular $f'(1) \sim 4.9415$ y puesto que $f(1) \sim 3.5598$ se obtiene que la aproximación afín de $f(\cdot)$ en $\bar{x} = 1$ es la función

$$a(x) = 3.5598 + 4.9415(x-1) = 4.9415x - 1.3818.$$



Regla de la cadena

La composición de funciones derivables sigue siendo derivable y existe una fórmula sencilla para calcular su derivada: la regla de la derivación en cadena, o simplemente *regla de la cadena*.

Teorema 3.2. *Sea $f\colon (a,b) \to (c,d)$ derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ y $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c,d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con*

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x}).$$

Demostración. Definiendo $q(y) := [g(y) - g(\bar{y})]/[y - \bar{y}]$ si $y \neq \bar{y}$ y $q(\bar{y}) := g'(\bar{y})$ podemos escribir $g(y) - g(\bar{y}) = q(y)[y - \bar{y}]$ con $\lim_{y \to \bar{y}} q(y) = g'(\bar{y})$. De aquí resulta

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{g(f(x)) - g(f(\bar{x}))}{x - \bar{x}} = \lim_{x \to \bar{x}} q(f(x)) \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = g'(\bar{y}) f'(\bar{x}). \qquad \square$$

Observación: Usando la notación $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ para la derivada, la regla de la cadena adopta una forma más fácil de recordar: si $y = y(u)$ con $u = u(x)$ entonces

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Ejemplo 3.12.
Para $a > 0$, la función $f(x) = a^x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ con

$$f'(\bar{x}) = \ln(a)a^{\bar{x}}.$$

En efecto, por definición se tiene $f(x) = \exp(x\ln(a))$ la cual es la composición de la función exp con la función lineal $g(x) = x\ln(a)$. La regla de la cadena asegura que dicha composición es derivable y se tiene

$$f'(\bar{x}) = \exp'(\bar{x}\ln(a))g'(\bar{x}) = \exp(\bar{x}\ln(a))\ln(a) = \ln(a)a^{\bar{x}}.$$

Ejemplo 3.13.
Podemos también generalizar la regla de la derivada para las potencias al caso de potencias de exponente real. Sea $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. La función $f(x) = x^a$ definida para $x > 0$ es derivable en todo $\bar{x} > 0$ con

$$f'(\bar{x}) = a\bar{x}^{a-1}.$$

Para ver esto basta expresar $f(x) = \exp(a\ln(x))$ y aplicar la regla de la cadena para obtener

$$f'(\bar{x}) = \exp(a\ln(\bar{x}))\frac{a}{\bar{x}} = \bar{x}^a\frac{a}{\bar{x}} = a\bar{x}^{a-1}.$$

En particular $f(x) = \sqrt{x}$ es derivable en todo $\bar{x} > 0$ con

$$f'(\bar{x}) = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}}.$$

Ejemplo 3.14.
La función $f(x) = \tanh\left(\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x)}\right)$ es composición de funciones derivables. La regla de la

cadena nos permite calcular:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \tanh'\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right)\left[\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right]' \\
&= \frac{1}{\cosh^2\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right)}\frac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}}\left[1+\operatorname{sen}^2(x)\right]' \\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cosh^2\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right)\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}}.
\end{aligned}$$

Derivadas de funciones inversas

Teorema 3.3. *Sea $f\colon (a,b)\to(c,d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\bar{x}\in(a,b)$ con $f'(\bar{x})\neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1}\colon (c,d)\to(a,b)$ es derivable en $\bar{y}=f(\bar{x})$ con*

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}.$$

Demostración. Del capítulo anterior sabemos que la función inversa f^{-1} es continua. De este modo, definiendo $x(y)=f^{-1}(y)$ se tiene $\lim_{y\to\bar{y}} x(y)=\bar{x}$, y por lo tanto

$$\lim_{y\to\bar{y}}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(\bar{y})}{y-\bar{y}} = \lim_{y\to\bar{y}}\frac{x(y)-\bar{x}}{f(x(y))-f(\bar{x})} = \frac{1}{f'(\bar{x})}.$$ □

Observación: Nuevamente en la notación $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ el resultado anterior adopta una forma sugerente: si $y=y(x)$ y $x=x(y)$ representa la función inversa, entonces

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}.$$

Ejemplo 3.15.
La función $\operatorname{arc\,sen}\colon[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$, siendo la inversa de sen resulta derivable en todo punto $\bar{y}\in(-1,1)$. En efecto, en tal caso tenemos $\bar{x}=\operatorname{arc\,sen}(\bar{y})\in(-\pi/2,\pi/2)$ y se tiene $\operatorname{sen}'(\bar{x})=\cos(\bar{x})\neq 0$, con lo cual

$$\operatorname{arc\,sen}'(\bar{y}) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\bar{x})} = \frac{1}{\cos(\bar{x})} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\bar{x})}} = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{y}^2}}.$$

Ejemplo 3.16.
La función $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in (-\pi/2, \pi/2)$ con $\tan'(\bar{x}) = 1/\cos^2(\bar{x}) > 0$. Su inversa $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ es por lo tanto derivable en todo punto $\bar{y} = \tan(\bar{x})$ y se tiene

$$\arctan'(\bar{y}) = \frac{1}{\tan'(\bar{x})} = \cos^2(\bar{x}) = \frac{1}{1 + \tan^2(\bar{x})} = \frac{1}{1 + \bar{y}^2}.$$

Ejemplo 3.17.
La inversa de $\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ es derivable en todo punto $\bar{y} \in (-1, 1)$ con

$$(\tanh^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{\tanh'(\tanh^{-1}(\bar{y}))} = \cosh^2(\tanh^{-1}(\bar{y})) = \frac{1}{1 - \bar{y}^2}.$$

Guía de Ejercicios

1. Demuestre que $f(x) = x^3$ es derivable en todo punto y que $f'(\bar{x}) = 3\bar{x}^2$.

2. Encuentre la aproximación afín de $\operatorname{sen}(x)$ en el punto $\bar{x} = 3\pi/4$.

3. Pruebe que la función definida por $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es derivable en $\bar{x} = 0$ con $f'(0) = 0$.

4. Sea $f(x) = 1 - \cos(x)$ para $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ para $x \notin \mathbb{Q}$. Pruebe que f es derivable en $\bar{x} = 0$, y que $f'(0) = 0$.

5. Sean $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables en $a \in \mathbb{R}$ con $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$. Pruebe que toda función $h(\cdot)$ tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ es derivable en a con $h'(a) = f'(a) = g'(a)$.

6. Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en 0 tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es derivable en todo punto y que $f'(\bar{x}) = f'(0)f(\bar{x})$.

7. Usando álgebra de derivadas, demuestre por inducción que las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(nx)$ y $g(x) = \cos(nx)$ son derivables con $f'(x) = n\cos(nx)$ y $g'(x) = -n\operatorname{sen}(nx)$.

8. Encuentre la aproximación afín de $f(x) = [\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)]\exp(-x)$ en el punto $\bar{x} = -1$.

9. Pruebe que $\arccos \colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ es derivable en todo punto $y \in (-1, 1)$ con $\arccos'(y) = -1/\sqrt{1-y^2}$.

10. Pruebe que la función $\operatorname{senh}^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto $y \in \mathbb{R}$ con $(\operatorname{senh}^{-1})'(y) = 1/\sqrt{y^2+1}$.

11. Pruebe que $\cosh^{-1} \colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto $y > 1$ con $(\cosh^{-1})'(y) = 1/\sqrt{y^2-1}$. ¿Qué ocurre en $y = 1$?

Guía de Problemas

P1. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen lo siguiente:

a) $g(x) = xf(x) + 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

b) $g(a+b) = g(a)g(b)$.

Demuestre que $g'(x) = g(x)$.

P2. Sea $c > 1$. Pruebe que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en 0 entonces existe el límite

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{f(cx) - f(x)}{x}.$$

P3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f' = af(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, con a constante. Demuestre que $f(x) = f(0)e^{ax}$.
Indicación: Considere $g(x) = e^{-ax} f(x)$.

P4. Sean f_i funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (derivables), donde $i = 1, \ldots, n$. Sea

$$G_n = f_1(f_2(\cdots(f_n(x))\cdots)).$$

Demuestre que:

$$G_n'(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i'(f_{i+1}(f_{i+2}(\ldots(f_n(x))\ldots)))$$

P5. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable con $g'(x) \neq 0$ en todo $\mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(kg(x))$. Muestre que

$$f'' - f'\frac{g''}{g'} + (kg')^2 f = 0.$$

P6. Sea f derivable en x_0, calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

P7. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq a(x-y)^2 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

con $a \geq 0$. Pruebe que $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Derivadas: Los teoremas

4.1 Máximos y mínimos: la regla de Fermat

En lo que sigue presentaremos diversas aplicaciones de la derivada al estudio de funciones. La primera corresponde a la regla de Fermat que permite caracterizar los puntos donde una función derivable alcanza su mínimo y su máximo. Para enunciar el resultado de manera precisa definiremos que se entiende por puntos de mínimo o máximo, local o global de una función.

DEFINICIÓN (PUNTOS EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN) Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, donde A es su dominio. Sea $\bar{x} \in A$.

- Diremos que $\bar{x}$ es un punto de *mínimo global* de f, si $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in A$.

  De manera análoga se define un punto de *máximo global* de f.

- Diremos que $\bar{x}$ es un punto de *mínimo local* de f si $\exists \delta > 0$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta].$$

  De manera análoga se define un punto de *máximo local* de f.

Si se cumple cualquiera de de los 4 casos, diremos que $\bar{x}$ es un punto extremo de la función f.

Claramente, todo punto de mínimo global es un punto de mínimo local de f (análogo para máximos)

Teorema 4.1. *Si $\bar{x} \in A$ es un punto extremo de una función $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y f es derivable en $\bar{x}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\bar{x}$ es mínimo local, para x cercano a $\bar{x}$ se tiene $f(x) \geq f(\bar{x})$, con lo cual

$$f'(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}^-} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} \leq 0 \leq \lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} = f'(\bar{x}),$$

es decir $f'(\bar{x}) = 0$. El caso de un máximo local es análogo. □

Observación: El teorema se puede escribir en una línea del modo siguiente:

$$\bar{x} \text{ es extremo de } f \quad \wedge \quad f'(\bar{x}) \text{ existe} \quad \Longrightarrow \quad f'(\bar{x}) = 0.$$

Usando un poco de álgebra proposicional se sabe que

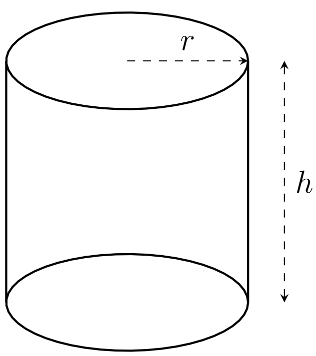
$$\begin{aligned} (p \wedge q \implies r) &\iff \overline{p \wedge q} \vee r \\ &\iff \overline{p} \vee \overline{q} \vee r \\ &\iff (p \implies \overline{q} \vee r). \end{aligned}$$

Por lo que el teorema también se puede escribir como

$$\bar{x} \text{ es extremo de } f \quad \Longrightarrow \quad f'(\bar{x}) \text{ no existe } \;\vee\; f'(\bar{x}) = 0.$$

El conjunto de puntos, donde o bien f no es derivable, o bien la derivada vale 0, son los famosos puntos críticos de una función. Usando este lenguaje, el teorema se lee diciendo que todo punto extremo es punto critico. Por lo tanto, para encontrar los puntos extremos de una función uno siempre comienza por buscar los puntos críticos de ella y después analiza cual de ellos es o no punto extremo. Después se puede seguir analizando la función, para determinar cual punto extremo es máximo o mínimo y cual de ellos es local o global.

Ejemplo 4.1.
Deseamos diseñar un cilindro de radio r y altura h cuyo volúmen $V = \pi r^2 h$ sea máximo, para una superficie total dada $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. De esta última relación se obtiene $h = S/2\pi r - r$, con lo cual obtenemos la expresión del volúmen exclusivamente en función del radio



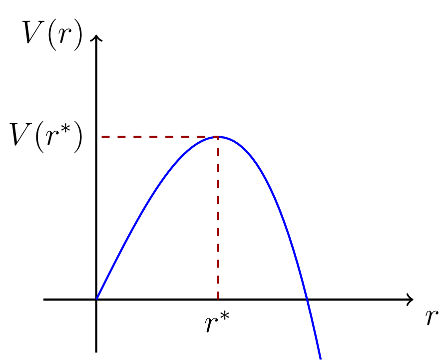
$$V(r) = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3.$$

El radio óptimo se obtiene de maximizar la función $V(r)$, para lo cual buscamos la solución de la ecuación $V'(r) = 0$, vale decir

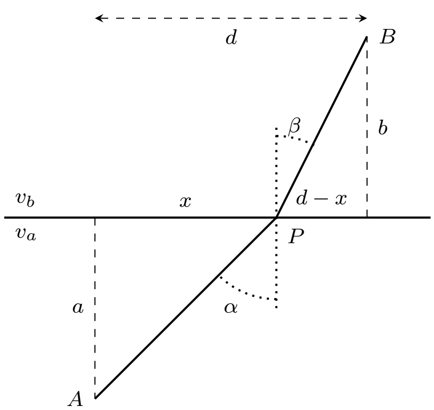
$$\frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$$

la cual tiene dos soluciones. Como nos interesan radios positivos, obtenemos $r^* = \sqrt{S/6\pi}$ al cual le corresponde un volúmen máximo $V(r^*) = \sqrt{S^3/54\pi}$ y una altura óptima $h^* = \sqrt{2S/3\pi} = 2r^*$.

En rigor aún no podemos asegurar que la solución encontrada corresponda efectivamente a un máximo del volumen, pues el criterio $V'(r) = 0$ no discrimina entre un mínimo y un máximo. Más adelante veremos criterios que permiten hacer tal distinción. Por el momento, para convencernos que la solución es un máximo, podemos hacer un gráfico aproximado de la función $V(r)$.



Ejemplo 4.2.
Un salvavidas A debe auxiliar a un bañista B. Corre desde A hasta un punto P al borde del mar, prosiguiendo a nado hasta B. Se desea determinar la posición de P que garantiza alcanzar B en el menor tiempo posible.



Suponiendo conocidas las velocidades en la tierra v_a y en el mar v_b, así como las distancias a, b, d, el tiempo se puede calcular como

$$T_{AB} = T_{AP} + T_{PB} = \frac{d_{AP}}{v_a} + \frac{d_{PB}}{v_b}$$

vale decir, en función de la variable x,

$$T_{AB}(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_a} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_b}.$$

Esta función es continua y en consecuencia alcanza su mínimo en $[0, d]$. Más adelante veremos herramientas que permiten probar que el mínimo es de hecho alcanzado en un único punto $x \in (0, d)$, el cual queda por lo tanto caracterizado por la ecuación $T'_{AB}(x) = 0$, vale decir

$$\frac{x}{v_a\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d-x)}{v_b\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0. \tag{4.1}$$

Este modelo tiene una importante aplicación física. En efecto, el *Principio de Fermat* en óptica establece que la luz viaja siguiendo trayectorias de tiempo mínimo. En un medio uniforme la velocidad de la luz es constante de modo que la trayectoria de tiempo mínimo entre dos puntos A y B coincide con la de longitud mínima, vale decir, el segmento de recta que une A con B. Cuando A y B se encuentran en medios caracterizados por distintas velocidades de la luz v_a y v_b (aire/agua por ejemplo), la trayectoria exhibe un quiebre al pasar de un medio al otro, fenómeno conocido como *difracción*. En este contexto la relación (4.1), llamada *Ley de Snell*, se expresa en función de los ángulos α y β como

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v_a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{v_b}.$$

4.2 El teorema del valor medio

Al iniciar el capítulo motivamos la noción de derivada observando que ciertas funciones f (las derivables) se “parecen” (localmente) a sus aproximaciones afines $a(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$. Es natural conjeturar entonces que, al menos localmente, las propiedades de una función y de su aproximación coincidan. Así por ejemplo, si la aproximación es creciente, esto es si $f'(\bar{x}) > 0$, esperamos que f sea también creciente en una vecindad de $\bar{x}$. Esta conjetura no es del todo cierta y requiere ser precisada. La técnica básica para relacionar las propiedades de f con las de sus aproximaciones afines es el Teorema del Valor Medio (no confundir con el Teorema de los Valores

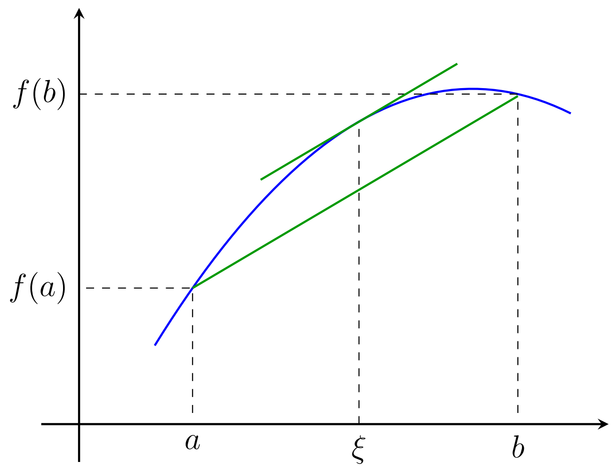
Intermedios).

Teorema 4.2 (TVM). *Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces, existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi).$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$



Demostración. Definiendo la función auxiliar $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mediante

$$h(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)][g(b) - g(a)],$$

el resultado se reduce a probar la existencia de $\xi \in (a,b)$ tal que $h'(\xi) = 0$.
Usando el Teorema 1.3 sobre álgebra de funciones continuas y la Proposición 3.1 sobre álgebra de funciones derivables, se deduce que h es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Además, por la propiedad de acotamiento de funciones continuas establecida en el Teorema 2.3, sabemos que h alcanza su mínimo y su máximo en $[a,b]$.
Además, un cálculo sencillo muestra que $h(a) = h(b) = 0$. Esto nos permite realizar el siguiente razonamiento:

- Si existiera algún $x \in (a,b)$ donde $h(x) > 0$, el máximo de h se alcanzaría en algún punto $\xi \in (a,b)$. Usando la regla de Fermat, deduciríamos que en ese punto $h'(\xi) = 0$.
- Análogamente, si para algún $x \in (a,b)$ se tuviese $h(x) < 0$, bastaría tomar el punto $\xi \in (a,b)$ donde h alcance su mínimo.
- Por último, si las dos propiedades previas fallaran, la función h sería idénticamente nula en el intervalo (a,b), y podemos tomar $\xi \in (a,b)$ arbitrario. □

4.3 Algunas aplicaciones de la derivada

En esta sección veremos la utilidad de la noción de derivada para el cálculo de límites, así como para estudio de la monotonía y convexidad de funciones.

La regla de l'Hôpital

Una primera consecuencia directa del TVM es la llamada *regla de l'Hôpital* para el cálculo de límites de la forma $0/0$ o ∞/∞.

Teorema 4.3. *Sean $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a,b), tales que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = L$$

con $L = 0$ o $L = \pm\infty$, y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.2}$$

siempre que este último límite exista.

Demostración. Para el caso $L = 0$, definiendo $f(a) = g(a) = 0$, el resultado es una aplicación directa del TVM y de la regla de composición para límites. El caso $L = \pm\infty$ es más delicado y se propone como ejercicio (difícil pero instructivo). □

Obviamente, la regla de l'Hôpital también se aplica para límites con $x \to a^-$, $x \to a$, e incluso para límites con $x \to \infty$: si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ o ∞ y $g'(x) \neq 0$ para x suficientemente grande, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-f'(1/y)/y^2}{-g'(1/y)/y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre que este último límite exista.

Ejemplo 4.3.
Veamos un límite conocido: $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(x))/x^2 = 1/2$. Este límite es de la forma $0/0$. El cuociente de derivadas es $\operatorname{sen}(x)/2x$ el cual converge a $1/2$, y por lo tanto podemos invocar la regla de l'Hôpital para concluir.
La regla de l'Hôpital nos permite ir un poco más lejos y probar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{x^4} = \frac{1}{24}.$$

En efecto, aplicando reiteradamente l'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{12x^2} = \frac{1}{24}.$$

Ejemplo 4.4.
Calculemos $\lim\limits_{x\to 0}[\exp(x) - 1 - x]/x^2$. La aplicación reiterada de la regla de l'Hôpital conduce a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 4.5.
Calculemos $\lim\limits_{x\to 1}[\ln(x)-1+x]/[\arctan(x)-\pi/4]$. Nuevamente estamos en presencia de un límite de la forma 0/0. L'Hôpital conduce a

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-1+x}{\arctan(x)-\pi/4}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x+1}{1/(1+x^2)}=4.$$

Ejemplo 4.6.
Consideremos el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+\exp(x))\,\mathrm{sen}(1/x)$, el cual puede escribirse como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\exp(x))}{1/\,\mathrm{sen}(1/x)}$$

que es de la forma ∞/∞. La regla de l'Hôpital conduce a estudiar el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\exp(x)/(1+\exp(x))}{\cos(1/x)/[x^2\,\mathrm{sen}^2(1/x)]}.$$

Usando álgebra de límites se ve que esta última expresión tiende a 1, de modo que

$$\lim_{x\to\infty}\ln(1+\exp(x))\,\mathrm{sen}(1/x)=1.$$

Ejemplo 4.7.
(Cálculo de asíntotas) Recordemos que $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ posee una recta asíntota $y=mx+n$ en ∞, si existen los límites $m=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)/x$ y $n=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-mx$. Observando la forma del límite que define la pendiente m, la regla de l'Hôpital nos permite deducir que si $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$ existe, entonces

$$m=\lim_{x\to\infty}f'(x).$$

Una observación análoga vale para el comportamiento asintótico de f en $-\infty$.
Consideremos por ejemplo la función $f(x)=\ln(1+\exp\sqrt{1+ax^2})$ donde $a>0$. Para determinar si existe asíntota en ∞ calculamos

$$f'(x)=\frac{\exp\sqrt{1+ax^2}}{1+\exp\sqrt{1+ax^2}}\frac{ax}{\sqrt{1+ax^2}}.$$

Dado que $\sqrt{1+ax^2}\to\infty$ y $\lim_{u\to\infty}\exp(u)/[1+\exp(u)]=1$, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\exp\sqrt{1+ax^2}}{1+\exp\sqrt{1+ax^2}}=1.$$

Por otra parte

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{1+ax^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1/x^2+a}}=\sqrt{a}$$

de modo tal que

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \sqrt{a}.$$

Como ejercicio, demuestre que $\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = 0$, de donde se sigue que f tiene una recta asíntota en ∞ descrita por la ecuación $y = \sqrt{a}x$.

4.4 Derivadas y monotonía

Para una función creciente, los cuocientes $(f(x) - f(\bar{x}))/(x - \bar{x})$ son no-negativos y por lo tanto, si f es derivable, se sigue que $f'(\bar{x}) \geq 0$. De igual forma, si f es decreciente se tiene $f'(\bar{x}) \leq 0$. El TVM permite probar las implicancias recíprocas.

Teorema 4.4. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) para todo $x \in (a,b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente) en $[a,b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.*

Demostración. Basta notar que si $x, y \in [a,b]$ con $y > x$, el TVM implica que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$ (resp $\leq, >, <$) para algún $c \in (x,y)$. □

Ejemplo 4.8.
Consideremos la función $f(x) = x\exp(-x)$ definida y derivable en todo $\mathbb{R}$. Dado que $f'(x) = (1-x)\exp(-x)$, observamos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 1)$ mientras que $f'(x) < 0$ para $x \in (1,\infty)$. En consecuencia f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 1]$ y estrictamente decreciente en $[1,\infty)$. En particular obtenemos que la función f alcanza su máximo en el punto $\bar{x} = 1$, tomando el valor $f(1) = 1/e$, vale decir $x\exp(-x) \leq 1/e$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Los cálculos anteriores se resumen convenientemente en la siguiente tabla de crecimiento:

	$-\infty$ 1	1 ∞
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Ejemplo 4.9.
Estudiemos el crecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$. La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$. Por lo tanto la tabla de crecimiento de f viene dada por

	$-\infty$ -1	-1 2	2 ∞
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

y en consecuencia f es creciente en $(-\infty, -1]$, decreciente en $[-1, 2]$, y nuevamente creciente en $[2,\infty)$. El punto $\bar{x} = -1$ corresponde a un máximo local, mientras que $\overline{x} = 2$ es un mínimo local.

Ejemplo 4.10.
Consideremos nuevamente el Ejemplo 4.1 y probemos que el valor $r^* = \sqrt{S/6\pi}$ corresponde efectivamente al radio del cilindro de superficie S que tiene volumen máximo. La función volumen viene dada por $V(r) = Sr/2 - \pi r^3$, cuya derivada es $V'(r) = S/2 - 3\pi r^2$. De este modo se tiene $V'(r) > 0$ para $r \in (0, r^*)$ y $V'(r) < 0$ para $r > r^*$. Por lo tanto la función V es creciente en $[0, r^*]$ y decreciente en $[r^*, \infty)$, de modo tal que r^* entrega efectivamente un máximo para $V(r)$.

Ejemplo 4.11.
Reconsideremos ahora el problema de trayectoria de tiempo mínimo del Ejemplo 4.2. Vimos que la función $T_{AB}(x)$ es derivable en todo punto $x \in (0, d)$, con

$$T'_{AB}(x) = \frac{x}{v_a\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d - x)}{v_b\sqrt{(d - x)^2 + b^2}}.$$

Dado que $T'_{AB}(0) < 0$ y $T'_{AB}(d) > 0$, el TVI asegura la existencia de algún $\bar{x} \in (0, d)$ tal que $T'_{AB}(\bar{x}) = 0$. Por otra parte la derivada de la función T'_{AB} está dada por

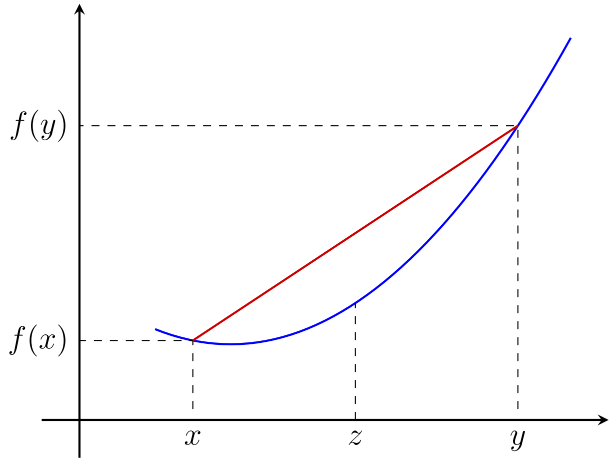
$$T''_{AB}(x) = \frac{a^2}{v_a[x^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{b^2}{v_b[(d - x)^2 + b^2]^{3/2}}$$

la cual es positiva, de modo que T'_{AB} es estrictamente creciente en $(0, d)$. Como $T'_{AB}(\bar{x}) = 0$, se sigue que $T'_{AB}(x)$ es negativa en $(0, \bar{x})$ y positiva en $(\bar{x}, d)$, y por consiguiente T_{AB} es decreciente en $(0, \bar{x})$ y creciente en $(\bar{x}, d)$. Esto prueba que $\bar{x} \in (0, d)$ es el único mínimo de la función T_{AB}.

4.5 Derivadas y convexidad

Una propiedad geométrica de las funciones, que permite hacerse una idea más precisa de la forma de su gráfico, es la convexidad o concavidad. Una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice *convexa* si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, vale decir

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x) \qquad \forall\ x < z < y. \tag{4.3}$$



La desigualdad (4.3) se puede escribir en la forma

$$[f(z) - f(x)](y - x) \leq \{[f(y) - f(z)] + [f(z) - f(x)]\}\,(z - x)$$

o también $[f(z) - f(x)](y - z) \leq [f(y) - f(z)](z - x)$, de modo que (4.3) equivale a

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \tag{4.4}$$

mostrando que la convexidad corresponde a la monotonía de las pendientes de las rectas secantes al gráfico de f. Esto conduce a la siguiente caracterización.

Teorema 4.5. *Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y solo si f' es creciente en (a, b).*

Demostración. Si f es convexa y $x < y$, tomando $z \in (x, y)$ y $v > y$ se obtiene

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Haciendo $z \to x^+$ y $v \to y^+$ se sigue $f'(x) \leq f'(y)$ de modo que f' es creciente. Recíprocamente, si f' es creciente y $x < z < y$, la desigualdad de convexidad (4.4) resulta de usar el TVM el cual permite encontrar $c \in (x, z)$ y $d \in (z, y)$ tales que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

□

Análogamente, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice *cóncava* si las rectas secantes quedan por debajo del gráfico de la función. Esto equivale a la convexidad de $-f$ y por lo tanto, en el caso derivable, a que f' sea decreciente.

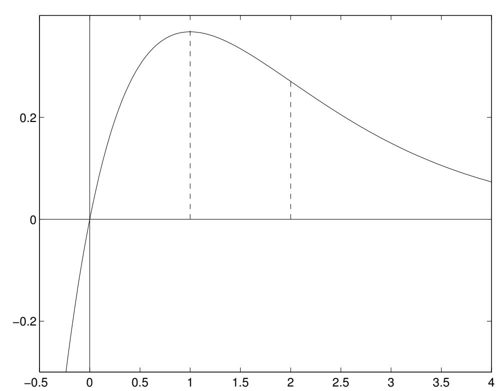
Ejemplo 4.12.
La función $f(x) = x^2$ tiene derivada $f'(x) = 2x$ la cual es creciente, y por lo tanto x^2 es convexa. Del mismo modo para $f(x) = \exp(x)$ se tiene que $f'(x) = \exp(x)$ es creciente y en consecuencia $\exp(x)$ es convexa. Para la función $f(x) = \ln(x)$ en cambio, se tiene que $f'(x) = 1/x$ la cual es decreciente en $(0, \infty)$ y por lo tanto ln es cóncava. Finalmente, para $f(x) = x^3$ se tiene $f'(x) = 3x^2$ la cual es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$, de modo que x^3 es cóncava en $(-\infty, 0]$ y convexa en $[0, \infty)$.

A diferencia de los ejemplos anteriores, en muchos casos la monotonía de $f'(x)$ no es evidente. Sin embargo, si la función $f'(x)$ es ella misma derivable, podemos estudiar su monotonía a través de los signos de su derivada, que denotamos $f''(x)$.

Ejemplo 4.13.
Consideremos la función $f(x) = x\exp(-x)$. Ya vimos en el Ejemplo 4.8 que $f'(x) = (1-x)\exp(-x)$ con lo cual obtuvimos que f es creciente en $(-\infty, 1]$ y decreciente en $[1, \infty)$. Para estudiar la convexidad de f debemos determinar el crecimiento de la función $g(x) = f'(x)$. Como esta última es derivable bastará estudiar los signos de su derivada $g'(x) = f''(x) = (x-2)\exp(-x)$. Claramente $g'(x) > 0$ si y solo si $x > 2$, de donde $g = f'$ es creciente en $[2, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 2]$. Concluimos que f es cóncava en $(-\infty, 2]$ y convexa en $[2, \infty)$. Los cálculos anteriores se resumen convenientemente en la tabla de convexidad:

	$-\infty$ 2	∞
$f''(x)$	$-$	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$\nearrow$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

Un gráfico aproximado de la función es el siguiente:



Derivadas de mayor orden

5.1 Derivadas de orden superior

En la sección anterior vimos la relación entre f' y la monotonía de f, así como entre f'' y la convexidad/concavidad de f. El significado geométrico de las derivadas de orden superior es menos evidente, pero ellas son útiles para construir aproximaciones polinomiales de la función, más precisas que la aproximación afín dada por la derivada primera. Las derivadas de orden superior se definen inductivamente por

$$f^{[k]}(\bar{x}) := (f^{[k-1]})'(\bar{x}).$$

con la convención $f^{[0]}(x) = f(x)$. En particular $f^{[1]}(\bar{x}) = f'(\bar{x})$, $f^{[2]}(\bar{x}) = f''(\bar{x}), \ldots$ Notar que para que f tenga una derivada de orden k en $\bar{x}$, $f^{[k-1]}(x)$ debe existir al menos en un intervalo $(\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon)$ y ser derivable en $\bar{x}$.
Si f admite una derivada de orden k en todo punto de un intervalo (a,b), entonces $f^{[k-1]}$ (e inductivamente todas las derivadas de orden inferior a k) son continuas en (a,b). Diremos que $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ es de clase $C^k(a,b)$ si es k veces derivable en todo punto del intervalo (a,b), y la función $f^{[k]}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ es continua. Si esto es cierto para todo k, diremos que f es de clase C^∞.

Ejemplo 5.1.
Las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ poseen derivadas de todos los órdenes y son de clase C^∞. En efecto, sabemos que $f'(\bar{x}) = \cos(\bar{x})$ y $g'(\bar{x}) = -\operatorname{sen}(\bar{x})$. De manera inductiva se encuentra que

$$\operatorname{sen}^{[k]}(\bar{x}) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\bar{x}) & \text{si } k \equiv 0 \mod 4, \\ \cos(\bar{x}) & \text{si } k \equiv 1 \mod 4, \\ -\operatorname{sen}(\bar{x}) & \text{si } k \equiv 2 \mod 4, \\ -\cos(\bar{x}) & \text{si } k \equiv 3 \mod 4, \end{cases}$$

y análogamente para las derivadas sucesivas de cos.

5.2 Desarrollos limitados

Diremos que $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ posee un desarrollo limitado de orden k en torno al punto $\bar{x} \in (a,b)$ si existen constantes $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-\bar{x}) + a_2(x-\bar{x})^2 + \cdots + a_k(x-\bar{x})^k + o((x-\bar{x})^k).$$

con $\lim_{u\to 0} o(u^k)/u^k = 0$. Usando el cambio de variables $h = x - \bar{x}$, la propiedad se escribe de manera equivalente

$$f(\bar{x}+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_k h^k + o(h^k).$$

Un desarrollo limitado de orden k es por lo tanto una aproximación polinomial, cuyo error de aproximación es pequeño en comparación con $(x-\bar{x})^k$. La herramienta básica para obtener tales aproximaciones son los desarrollos de Taylor descritos a continuación.

Teorema 5.1. *Sea $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$, k-veces derivable en $\bar{x}\in(a,b)$, y sea*

$$T_f^k(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$. Entonces

$$f(x) = T_f^k(x-\bar{x}) + o((x-\bar{x})^k)$$

con $\lim_{h\to 0} o(h^k)/h^k = 0$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tal que f es $(k-1)$ veces derivable en $I_\epsilon = (\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon)$, y sea $\tilde{f}(x) := f(x) - T_f^k(x-\bar{x})$. Notando que $\tilde{f}(\bar{x}) = \tilde{f}'(\bar{x}) = \cdots = \tilde{f}^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$, al igual que para la función $g(x) := (x-\bar{x})^k$, podemos aplicar el TVM inductivamente $(k-1)$ veces y deducir que para todo $x\in I_\epsilon, x\neq\bar{x}$ existe $\xi = \xi(x)$ (en $(\bar{x},x)$ o $(x,\bar{x})$ según corresponda) tal que

$$\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}^{[k-1]}(\xi)}{g^{[k-1]}(\xi)} = \frac{1}{k!}\left[\frac{f^{[k-1]}(\xi) - f^{[k-1]}(\bar{x})}{\xi-\bar{x}} - f^{[k]}(\bar{x})\right].$$

Dado que $\xi = \xi(x)\to\bar{x}$, la regla de composición de límites implica que el lado derecho tiende a 0, lo que permite concluir. □

Observación: La recíproca es en general falsa: el hecho que una función admita un desarrollo limitado de orden k en $\bar{x}$ no implica la existencia de $f^{[k]}(\bar{x})$. Considerar por ejemplo la función $f(x) = x\operatorname{sen} x^2$ si $x\in\mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si no, la cual admite el desarrollo limitado $f(x) = x^3 + o(x^3)$ pero que solamente es derivable en $\bar{x}=0$ y por lo tanto no tiene derivada segunda ni menos tercera en dicho punto.

Ejemplo 5.2.
La función $f(x) = \exp(x)$ es de clase C^∞ con $f^{[k]}(0) = 1$ para todo k. Así, su desarrollo limitado de orden k en torno a 0 viene dado por

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + o(x^k).$$

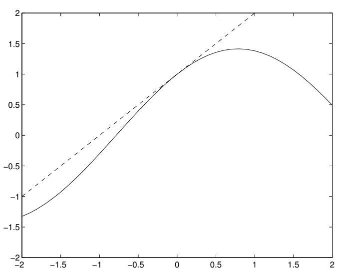
Ejemplo 5.3.
La función $f(x) = -\ln(1-x)$ es derivable en $(-\infty,1)$ con $f'(x) = 1/(1-x)$. Se sigue que $f''(x) = 1/(1-x)^2, f'''(x) = 2/(1-x)^3, \ldots, f^{[k]}(x) = (k-1)!/(1-x)^k$. En consecuencia f es de clase C^∞ en $(-\infty,1)$, y su desarrollo limitado de orden k en torno a 0 es

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^k}{k} + o(x^k).$$

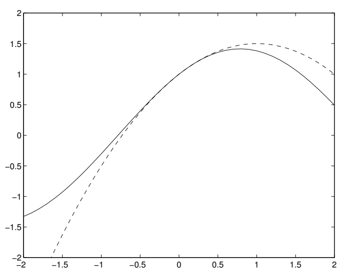
Ejemplo 5.4.
Sea $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$. Los desarrollos de Taylor de orden 1,2 y 3 en torno a 0 están dados por

$$T_f^1(x) = 1 + x$$
$$T_f^2(x) = 1 + x - x^2/2$$
$$T_f^3(x) = 1 + x - x^2/2 - x^3/6$$

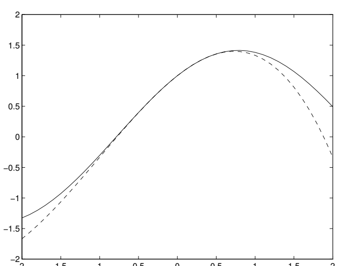
Los siguientes gráficos ilustran como los desarrollos de Taylor (linea discontinua) se aproximan cada vez mejor a la función original $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$.



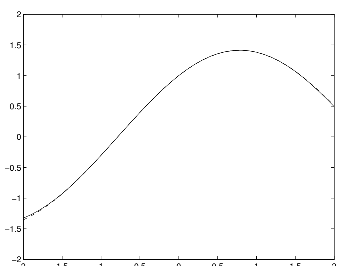
$T_f^1(x)$



$T_f^2(x)$



$T_f^3(x)$



$T_f^6(x)$

Los ejemplos que siguen ilustran como se pueden combinar desarrollos limitados conocidos para obtener desarrollos de funciones más complejas.

Ejemplo 5.5.
Los desarrollos limitados se pueden sumar y multiplicar, operando básicamente como si se tratara de polinomios. Consideremos por ejemplo los desarrollos limitados

$$\text{sen}(x) = x - x^3/6 + o(x^4)$$
$$\exp(-x) = 1 - x + x^2/2 - x^3/6 + o(x^3).$$

Usando el hecho que un término $o(x^m)$ es también $o(x^k)$ si $k \leq m$, se obtiene

$$\exp(-x) + \text{sen}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Asimismo, el hecho que $x^m = o(x^k)$ si $m > k$ y también $f(x)o(x^k) = o(x^{m+k})$ siempre que

$\lim_{x\to 0} |f(x)/x^m| < \infty$ (ejercicio), se obtiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x)\exp(-x) &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right] \cdot \left[1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{36} + o(x^4)\exp(-x) + o(x^3)\operatorname{sen}(x) \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4).\end{aligned}$$

Ejemplo 5.6.
Los desarrollos limitados también se pueden componer. Por ejemplo, para obtener un desarrollo limitado de orden 2 de $f(x) = \ln[1 + \exp(x)]$ en torno a $\bar{x} = 0$, podemos usar el desarrollo $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ que permite escribir

$$f(x) = \ln[2 + x + x^2/2 + o(x^2)].$$

Por otro lado, dado que

$$\ln[2 + z] = \ln 2 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + o(z^2)$$

reemplazando $z = x + x^2/2 + o(x^2)$ se obtiene

$$f(x) = \ln 2 + \frac{[x + x^2/2 + o(x^2)]}{2} - \frac{[x + x^2/2 + o(x^2)]^2}{8} + o([x + x^2/2 + o(x^2)]^2).$$

Finalmente, para obtener el desarrollo buscado es suficiente identificar los coeficientes de las potencias de x de grado menor o igual que 2, pues todos los términos restantes son de orden $o(x^2)$. Con esto se llega a

$$\ln[1 + \exp(x)] = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Obviamente este mismo resultado se obtiene de calcular el desarrollo de Taylor de orden 2, pues $f(0) = \ln 2$, $f'(0) = 1/2$ y $f''(0) = 1/4$.

Ejemplo 5.7.
Los desarrollos limitados también son útiles para calcular límites de la forma 0/0. En rigor, se trata de otra forma de la regla de l'Hôpital. Ilustremos esto a través de un ejemplo sencillo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\ln(1 + 2x^2)}.$$

La primera potencia (no nula) en el desarrollo limitado del denominador es x^2, más exactamente, $\ln(1 + 2x^2) = 2x^2 + o(x^2)$. Haciendo un desarrollo de orden 2 del numerador se obtiene $\exp(x) - \cos(x) - \operatorname{sen}(x) = x^2 + o(x^2)$, de modo que el límite buscado es

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\ln(1 + 2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + o(x^2)/x^2}{2 + o(x^2)/x^2} = \frac{1}{2},$$

resultado que se obtiene también fácilmente usando la regla de l'Hôpital (ejercicio).

5.3 Caracterización de puntos críticos

Otra aplicación importante de las derivadas de orden superior es que permiten discriminar si un punto crítico ($f'(\bar{x}) = 0$) es mínimo local, máximo local, o punto de inflexión (punto de cambio de convexidad de la función). El resultado preciso es el siguiente.

Proposición 5.2. *Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, k veces derivable en $\bar{x} \in (a,b)$, con $f'(\bar{x}) = \cdots = f^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$ y $f^{[k]}(\bar{x}) \neq 0$, $k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:*

(a) Si k es par y $f^{[k]}(\bar{x}) > 0$, $\bar{x}$ es un mínimo local.

(b) Si k es par y $f^{[k]}(\bar{x}) < 0$, $\bar{x}$ es un máximo local.

(c) Si k es impar, $\bar{x}$ es un punto de inflexión.

Demostración. Consideremos primero el caso en que k es par. Haciendo un desarrollo limitado de orden k para f en torno a $\bar{x}$ se obtiene

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{(x - \bar{x})^k} = \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}.$$

Se sigue que existe un intervalo I en torno a $\bar{x}$ en el cual $(f(x) - f(\bar{x}))/(x - \bar{x})^k$ tiene igual signo que $f^{[k]}(\bar{x})$. Como k es par se deduce que para todo $x \in I, x \neq \bar{x}$, se tiene $f(x) > f(\bar{x})$ en el caso (a) y $f(x) < f(\bar{x})$ en el caso (b).
Si k es impar, un desarrollo de orden $(k-2)$ de $g = f''$ conduce a

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f''(x)}{(x - \bar{x})^{k-2}} = \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{(k-2)!}.$$

Como antes, para x cercano a $\bar{x}$ el signo de $f''(x)/(x - \bar{x})^{k-2}$ es igual al de $f^{[k]}(\bar{x})$ y, dado que $k-2$ es impar, se deduce que $f''(x)$ cambia de signo entre $x < \bar{x}$ y $x > \bar{x}$, de modo que la convexidad de f cambia al cruzar $\bar{x}$. □

5.4 Fórmula de Taylor

La siguiente generalización del TVM permite calcular el error de aproximación que se comete al reemplazar una función por su desarrollo de Taylor.

Teorema 5.3. *Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a,b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\bar{x} \in (a,b)$. Entonces, para todo $x > \bar{x}$ (resp. $x < \bar{x}$) existe $\xi \in (\bar{x}, x)$ (resp. $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que*

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - \bar{x})^{k+1}. \tag{5.1}$$

Demostración. Análoga al Teorema 5.1: aplicando el TVM inductivamente $(k+1)$ veces, para $x > \bar{x}$ (resp. $x < \bar{x}$) se encuentra $\xi \in (\bar{x}, x)$ (resp. $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que

$$\frac{f(x) - T_f^k(x - \bar{x})}{(x - \bar{x})^{k+1}} = \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}.$$

□

Ejemplo 5.8.
Retornado el Ejemplo 5.2 y usando el Teorema anterior, el error cometido al reemplazar $\exp(x)$ por su desarrollo de orden k se expresa como

$$\exp(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} = \frac{\exp(\xi)}{(k+1)!} x^{k+1}$$

con $\xi \in (0, x)$ si $x > 0$, o bien $\xi \in (x, 0)$ si $x < 0$. En ambos casos se obtiene

$$\left| \exp(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \right| \leq \exp(|x|) \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!},$$

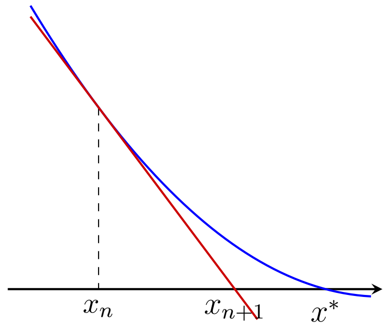
y puesto que $|x|^{k+1}/(k+1)! \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$, se deduce

$$\exp(x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Material Extra

5.5 El método de Newton

Consideremos la ecuación $f(x) = 0$ donde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f(a)f(b) < 0$. En el capítulo de continuidad vimos que existe una solución $x^* \in (a, b)$, la cual podemos aproximar mediante el método de bisección. Dicho método, a pesar que nos asegura converger hacia x^*, es relativamente lento.
Usando la noción de derivada podemos construir un método iterativo más eficiente. Supongamos que disponemos de una aproximación de la solución $x_0 \sim x^*$. Si en la ecuación $f(x) = 0$ reemplazamos la función $f(\cdot)$ por su aproximación afín en torno a x_0, obtenemos la ecuación lineal $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. Si $f'(x_0) \neq 0$, la solución de esta ecuación linealizada es $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$, la cual podemos considerar como una nueva aproximación de x^*, que esperamos sea más precisa.



La iteración de este procedimiento a partir de la nueva aproximación conduce a un método iterativo de la forma

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

el cual estará definido mientras se tenga $f'(x_n) \neq 0$. Esta iteración se conoce como el *Método de Newton* (para ecuaciones).

Ejemplo 5.9.
Para la ecuación $x^2 = a$, la iteración de Newton toma la forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

la cual fué estudiada en detalle anteriormente, donde probamos que converge para todo punto de partida $x_0 > 0$. En esa ocasión se constató que la convergencia era muy rápida.

El siguiente resultado explica el origen de la rapidez del método de Newton.

Teorema 5.4. *Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y supongamos que $x^* \in (a,b)$ es una solución de la ecuación $f(x^*) = 0$ tal que $f'(x^*) \neq 0$. Entonces existen constantes $\epsilon > 0$ y $M > 0$ tales que para todo punto de partida $x_0 \in I_\epsilon := (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ el método de Newton está bien definido y converge hacia x^* con*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2.$$

Demostración. Sea M tal que $|f''(x^*)| < M|f'(x^*)|$ y escojamos $\epsilon \in (0, 1/M)$ de modo tal que se tenga $|f'(x)| > |f'(x^*)|/2$ y $|f''(x)| \leq M|f'(x^*)|$ para todo $x \in I_\epsilon$.
Si para un determinado n se tiene $x_n \in I_\epsilon$, entonces x_{n+1} está bien definido y

$$x_{n+1} - x^* = x_n - f(x_n)/f'(x_n) - x^* = \frac{f(x^*) - f(x_n) - f'(x_n)(x^* - x_n)}{f'(x_n)}.$$

Usando el Teorema de Taylor podemos encontrar $\xi \in I_\epsilon$ tal que

$$|x_{n+1} - x^*| = \left|\frac{f''(\xi)(x^* - x_n)^2}{2f'(x_n)}\right| \leq M|x_n - x^*|^2 \leq M\epsilon|x_n - x^*|$$

y como $M\epsilon < 1$ se sigue que $x_{n+1} \in I_\epsilon$. Esto permite razonar inductivamente a partir de x_0 para deducir $|x_n - x^*| \leq (M\epsilon)^n|x_0 - x^*| \to 0$. □

Gruesamente, la desigualdad $|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2$ nos dice que el número de decimales exactos en la aproximación se duplica en cada iteración, lo cual es muy satisfactorio. Desafortunadamente el resultado anterior es de carácter local: solo asegura la convergencia si partimos suficientemente cerca de x^*, cuestión que no podemos saber *a priori* pues en general desconocemos x^*! Existen resultados más explícitos, como el Teorema de Newton–Kantorovich, pero caen fuera de los objetivos de este curso. Nos limitaremos a ilustrar el teorema anterior a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.10.
Consideremos la ecuación $\tan(x) = x$ del Ejemplo 2.1. Nos interesa la solución de esta ecuación en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$. El método de Newton conduce a la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\tan(x_n) - x_n}{\tan^2(x_n)}.$$

Iterando a partir de $x_0 = 4.45$ se obtiene

n	x_n	$f(x_n)$
0	4.450000	-7.3e-01
1	4.502423	1.9e-01
2	4.493791	7.7e-03
3	4.493410	1.4e-05
4	4.493409	4.5e-11
5	4.493409	8.9e-16

llegando a la estimación $x^* \sim 4.49340945790906$. Se aprecia la clara superioridad del método de Newton que en 5 iteraciones alcanza una precisión de 10^{-15}, respecto del método de bisección que toma 21 iteraciones para una precisión de apenas 10^{-6}.

Guía de Ejercicios

1. Pruebe que una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) es Lipschitz de constante L si y solamente si $|f'(x)| \leq L$ para todo $x \in (a,b)$.

2. Sean $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables con $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Pruebe que f y g difieren en una constante.

3. Sea $p(x)$ un polinomio con k raíces reales distintas. Muestre que si $\alpha \neq 0$, $q(x) = p(x) - \alpha p'(x)$ posee al menos k raíces reales distintas.
Indicación: Considere la función $f(x) = \exp(-x/\alpha)p(x)$ y note que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4. Estudie el crecimiento y convexidad de las funciones

$$\text{(i)} \quad \frac{(x-1)^2}{x}\exp(1/x) \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}} \qquad \text{(iii)} \quad x\operatorname{sen}(\ln(x))$$

5. Pruebe que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene $0 \leq e^t - 1 - t \leq t^2 e^{|t|}/2$.

6. Determine el menor valor $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x+1)^x \leq x^{x+1}$.

7. Estudie la convexidad de las funciones $\exp(-x^2)$ y $x^2 \ln x$.

8. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ convexa y derivable en $\bar{x} \in (a,b)$. Pruebe que

$$f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Deduzca que si $f'(\bar{x}) = 0$ entonces $\bar{x}$ es un mínimo global de f en $[a,b]$.

9. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que f'' se anula exactamente en n puntos ($n \in \mathbb{N}, n > 0$). Pruebe que el número de intersecciones del gráfico de f con una recta dada es a lo sumo $n+2$.

10. Estudie completamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6}$.

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$.

c) $f(x) = x^{1/x}$ para $x > 0$.

d) $f(x) = x\ln^2(x)$ para $x > 0$.

11. Encuentre el desarrollo limitado de orden 4 en torno a 0 para las funciones

$$\text{(i)} \quad \exp(x^2)[x\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)] \qquad \text{(ii)} \quad \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{x}\right)/\sqrt{x(1+x)}.$$

12. Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\operatorname{sen} x} - (\operatorname{sen} x)^x}{x^{\operatorname{senh} x} - (\operatorname{senh} x)^x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{2x} + 1)^{1/x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{-2}\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\tanh(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right)$.

13. Demuestre que la función definida por $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es de clase C^∞ y que $f^{[k]}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Notar que los desarrollos limitados de todos los órdenes en torno a 0 son nulos, a pesar que la función no es nula.

14. Pruebe que la ecuación $\cot(x) = \ln(x)$ posee una única solución x_n en $(n\pi, (n+1)\pi)$, y que $x_n - n\pi \sim 1/\ln(n)$, es decir, existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n)[x_n - n\pi].$$

15. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^k tal que $f^{[k]}(\cdot)$ es una función constante. Demuestre que f es necesariamente un polinomio de grado k.

16. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! + \cdots \\
\cos(x) &= 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! + \cdots \\
\operatorname{senh}(x) &= x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + x^9/9! + \cdots \\
\cosh(x) &= 1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + x^8/8! + \cdots
\end{aligned}$$

17. Encuentre un desarrollo limitado para $\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ en torno a 0, cuyo error máximo de aproximación en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ sea inferior a 10^{-3}.

18. Use el método de Newton para estimar el mínimo de $f(x) = \exp(x) + x + x^2$.

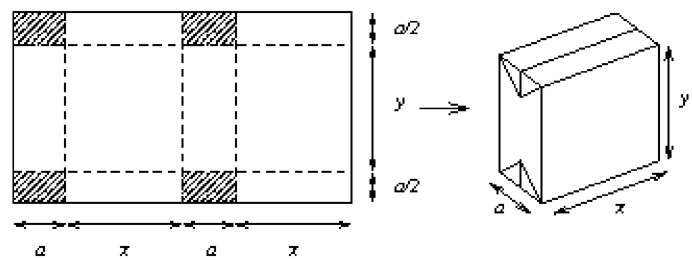
19. En el Teorema 2.10 suponga f de clase C^k con $f''(x^*) = \cdots = f^{[k-1]}(x^*) = 0$ y $f^{[k]}(x^*) \neq 0$. Demuestre que existe una constante M tal que

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^k.$$

20. Demuestre que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente convexa, la ecuación $f(x^*) = 0$ tiene a lo más 2 soluciones. Suponiendo que existe al menos una solución, pruebe que el método de Newton converge hacia una de ellas a partir de cualquier punto inicial x_0, salvo que x_0 sea el mínimo de f (necesariamente único).

Guía de Problemas

P1. Un envase TetraPak se fabrica plegando un rectángulo de cartón como indica la figura (las regiones achuradas corresponden a los pliegues de las esquinas).



Se desean determinar las dimensiones óptimas a, x, y que minimicen la superficie del rectángulo original para un volumen total de 1000 (un litro).

(i) Encuentre una expresión de la superficie sólo en términos de las cantidades a, x.

(ii) Tomando a como parámetro conocido, demuestre que el valor $x = x(a)$ que minimiza dicha superficie es $x = \sqrt{\frac{1000}{a}}$. Justifique que se trata de un mínimo.

(iii) Use **(ii)** para obtener una expresión $S(a)$ para la superficie en función solamente de a y luego determine el valor mínimo de esta función (justifique por qué es mínimo). Explicite los valores óptimos de a, x, y.

P2. La función $f\colon [a,b] \to (0,\infty)$ se dice log-convexa si $\ln(f(x))$ es convexa.

(i) Pruebe que si f es log-convexa entonces es convexa, y buscar un contraejemplo que muestre que la recíproca es falsa.

(ii) Pruebe que f es log-convexa si y solo si f^α es convexa para todo $\alpha > 0$.

P3. Considere la función $f(x) = (x+1)\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Encuentre ceros y signos de f.

(b) Estudie las asíntotas horizontales de f. Encuentre los límites laterales cuando $x \to 0^\pm$ y $x \to 1^\pm$ y ya sea, repare la función para que sea continua, o bien, detecte si hay asíntotas verticales.

(c) Use el Teorema del valor medio en la función auxiliar $g(x) = \ln|x|$ en el intervalo $[x, x+1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty,-1) \cup (0,\infty).$$

(d) Calcule la primera derivada de f.

(e) Use el resultado de la parte P**(c)** para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty,-1)$ y en $(0,\infty)$.

(f) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa.

(g) Estudie los límites de $f'(x)$ cuando $x \to 1^+$ y cuando $x \to 0^-$.Usando el signo de la segunda derivada en $(-1,0)$ concluya cobre la monotonía de f en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$.

(h) Bosqueje el gráfico de f.

P4. **(a)** Una planta productora de cobre con capacidad instalada máxima de 9ton/día, puede producir x toneladas de cobre corriente e y toneladas de cobre fino diarias. Si se sabe que las producciones diarias de cobre fino y corriente cumplen la relación $y = \frac{40-5x}{10-x}$ y que el precio de venta del cobre fino es 3.6 veces el precio del cobre corriente, se pide determinar cuál es la producción diaria que proporciona un ingreso máximo.

(b) Sea f continua en $[0,\infty)$, derivable en $(0,\infty)$ y tal que $f(0) = 0$ y f' es creciente en $\mathbb{R}^+$.

1) Use el teorema del Valor Medio para probar que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ en $\mathbb{R}^+$.
2) Deduzca que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $\mathbb{R}^+$.

P5. **(a)** Sean $g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones crecientes y derivables de signo constante: $g < 0$ y $h > 0$. Dadas las constantes $a, b, c > 0$, estudie la monotonía de

$$f(x) = g(b - ax^3) \cdot h(\arctan(cx)).$$

Nota: Los paréntesis denotan composición.

(b) Usando el Teorema de Valor Medio, demuestre que

$$1 + \ln x < (x+1)\ln(x+1) - x\ln x < 1 + \ln(x+1), \quad \forall x > 0.$$

(c) Deduzca de **(a)** la desigualdad

$$n\ln n - (n-1) \leq \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < (n+1)\ln(n+1) - n, \quad \forall n \geq 1.$$

SEMANA 6

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Primitivas

Definición (Primitiva) Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $\operatorname{int}(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I si y solo si

$$\forall x \in \operatorname{int}(I),\ F'(x) = f(x).$$

Observación:

1. Sean F_1 y F_2 dos primitivas de una función f sobre I, entonces:

$$\begin{aligned} F_1' = f \wedge F_2' = f &\implies (F_1 - F_2)' = 0 \\ &\implies F_1 - F_2 = \text{cte} = c \end{aligned}$$

   En consecuencia dos primitivas de una función difieren a lo más en una constante.

2. Además si F es una primitiva de f, entonces la función $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria, es otra primitiva de f.

Notación: Una primitiva "arbitraria" de f se anotará como $\int f$. Si F es una primitiva de f, entonces notaremos:

$$\int f = F + c.$$

Es habitual,usar la notación clásica:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,$$

donde $\mathrm{d}x$ corresponde a un símbolo que sirve para identificar a la variable.
También suele llamarse *integral indefinida de f* a $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

6.1 Primitivas o integrales indefinidas inmediatas

A continuación se presentan algunas primitivas cuyo cálculo es elemental:

1. $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ \forall n \neq -1.$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c = \ln K|x|, \ K > 0.$
3. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c.$
4. $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + c.$
5. $\displaystyle\int e^{ax} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax} + c.$
6. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x \,\mathrm{d}x = \cosh x + c.$
7. $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \operatorname{senh} x + c.$
8. $\displaystyle\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + c.$
9. $\displaystyle\int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = \cot x + c.$
10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + c.$
11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + c.$
12. $\displaystyle\int \frac{-x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + c$

Observación:

1. $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c, \qquad \int f' = f + c.$
2. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x), \qquad \left(\int f\right)' = f.$

Proposición 6.1. $\displaystyle\int$ *es un* operador lineal, *es decir:*

1. $\displaystyle\int f \pm g = \int f \pm \int g.$

2. $\displaystyle\int \alpha f = \alpha \int f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Demostración. 1. Sean $F + c = \int f$ y $G + k = \int g$, entonces $F' = f$ y $G' = g \implies (f \pm g) = (F \pm G)'$. Luego $(F \pm G)$ es primitiva de $f \pm g$, es decir:

$$\int f \pm g = \int f \pm \int g.$$

2. Sea $F + c = \int f$, entonces $F' = f$ y por ende $(\alpha F)' = \alpha f$. Así, $\alpha F = \int \alpha f$, de donde se concluye que

$$\int \alpha f = \alpha \int f.$$

□

6.2 Teorema de cambio de variable

Teorema 6.2 (Cambio de variable). *Si $u = g(x)$, entonces*

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = \int (f\circ g)(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{o, equivalentemente} \qquad \int f = \int (f\circ g)\cdot g'.$$

Demostración. Sea F una primitiva de f, es decir $F'(u) = f(u)$. Como $u = g(x)$, entonces $F(u) = (F\circ g)(x)$.
Calculemos:

$$(F\circ g)'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x),$$

por lo tanto: $(F\circ g)$ es una primitiva de $f(g(x))g'(x)$.
Es decir,

$$F(u) = \int f(u) \quad \text{y} \quad (F\circ g) = \int (f\circ g)\cdot g'.$$

Pero $F(u) = (F\circ g)(x)$, luego $\displaystyle\int f(u)\,\mathrm{d}u = \int (f\circ g)(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. □

Ejemplo 6.1.

1. $I = \displaystyle\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$. Usamos

$$u = \operatorname{sen} x \qquad\qquad \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$$

   y resulta $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan u + c = \arctan(\operatorname{sen} x) + c.$

2. $I = \displaystyle\int \left(\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$. Usamos

$$u = \arctan x \qquad\qquad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

   y resulta $I = \displaystyle\int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + c = e^{\arctan x} + c.$

3. $I = \displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$. Usamos

$$u = \cos x \qquad\qquad \mathrm{d}u = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

   y resulta $I = \displaystyle\int \frac{-\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c.$

4. $I = \displaystyle\int \cot x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$. Usamos

$$u = \operatorname{sen} x \qquad\qquad \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$$

   y resulta $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + c = \ln|\operatorname{sen} x| + c.$

5. $I = \int \sec x \, \mathrm{d}x = \int \dfrac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \mathrm{d}x$. Usamos

$$u = \sec x + \tan(x) \qquad\qquad \mathrm{d}u = \sec x(\sec x + \tan x)\, \mathrm{d}x$$

y resulta

$$I = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c.$$

6. $I = \int \csc x \, \mathrm{d}x = \int \dfrac{\csc x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x}\, \mathrm{d}x$. Usamos

$$u = \csc x - \cot(x) \qquad\qquad \mathrm{d}u = \csc x(\csc x - \cot x)\, \mathrm{d}x$$

y resulta $I = \int \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + c = \ln|\csc x - \cot x| + c$.

7. $I = \int (ax+b)^n \, \mathrm{d}x$. Usamos

$$u = ax + b \qquad\qquad \mathrm{d}u = a\mathrm{d}x$$

y resulta $I = \int u^n \dfrac{\mathrm{d}u}{a} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)} + c = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$.

8. $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3}\, \mathrm{d}x$. Usamos

$$u = 3x - 7 \qquad\qquad \mathrm{d}u = 3\mathrm{d}x$$

y resulta $I = \int u^{3/5} \dfrac{\mathrm{d}u}{3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{u^{8/5}}{8/5} + c = \dfrac{5}{24} u^{8/5} + c = \dfrac{5}{24}(3x-7)^{8/5} + c$.

9. $I = \int \dfrac{f'(x)\, \mathrm{d}x}{f(x)}$. Usamos

$$u = f(x) \qquad\qquad \mathrm{d}u = f'(x)\, \mathrm{d}x$$

y resulta $I = \int \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + c = \ln|f(x)| + c$.

6.3 Integración por partes

Proposición 6.3 (Fórmula de integración por partes). *Sean u y v dos funciones de x, entonces:*

$$\int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x$$

$$o,\ \textit{equivalentemente,} \qquad \int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que,

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Luego, gracias a la Proposición 6.1, se tiene

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x,$$

y despejando, se concluye que

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Observación: Usualmente la fórmula de integración por partes se escribe de manera más compacta como

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u,$$

donde $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$.

Ejemplo 6.2.

1. $I = \int xe^x\,\mathrm{d}x$. Usamos

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= e^x\,\mathrm{d}x & v &= e^x \end{aligned}$$

y resulta $I = e^x - \int e^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x + c$.

2. $I = \int \ln x\,\mathrm{d}x$. Usamos

$$\begin{aligned} u &= \ln x & \mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

y resulta $I = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c$.

3. $I_n = \int x^n \ln x \, \mathrm{d}x$, con $n \in \mathbb{N}$. Usamos

$$\begin{aligned} u &= \ln x & \mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= x^n\,\mathrm{d}x & v &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

y resulta $I_n = \dfrac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \left(\dfrac{1}{n+1}\right)\int x^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c.$

4. $I_n = \int x^n e^x \,\mathrm{d}x$, con $n \in \mathbb{N}$. Usamos

$$\begin{aligned} u &= x^n & \mathrm{d}u &= nx^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= e^x\,\mathrm{d}x & v &= e^x \end{aligned}$$

y resulta $I_n = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,\mathrm{d}x = x^n e^x - nI_{n-1}$, que es una recurrencia para I_n.

Como $I_0 = \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$, podemos calcular los primeros términos:

$$\begin{aligned} I_1 &= x^1e^x - 1\cdot I_0 = e^x(x-1) + c \\ I_2 &= x^2e^x - 2\cdot I_1 = e^x(x^2-2x+2) + c \\ I_3 &= x^3e^x - 3\cdot I_2 = e^x(x^3-3x^2+6x-6) + c \\ I_4 &= x^4e^x - 4\cdot I_2 = e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24) + c \end{aligned}$$

6.4 Sustituciones trigonométricas tradicionales

Cuando en una integral figuren expresiones del tipo que se indica, los siguientes cambios de variable son convenientes:

1. Para $a^2 + x^2$, usar $x = a\tan v$ o bien $x = a\,\mathrm{senh}\,t$.
2. Para $a^2 - x^2$, usar $x = a\,\mathrm{sen}\,v$ o $x = a\cos v$.
3. Para $x^2 - a^2$, usar $x = a\sec v$ o $x = a\cosh t$.

6.5 Integración de funciones racionales

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0},$$

con $n < m$.
Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m(x - r_1)^{\alpha_1}(x - r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_tx + c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, \dots r_s$ son las raíces de Q, de multiplicidades $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, y $\beta_1, \dots, \beta_t$ son números enteros positivos, con $x^2 + b_ix + c_i$ polinomios irreducibles.
Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x - r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones de la forma:
$$\frac{A_{1i}}{(x - r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x - r_i)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x - r_i)^{\alpha_i}}.$$
2. Por cada término $(x^2 + b_ix + c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:
$$\frac{B_{1i}x + C_{1i}}{x^2 + b_ix + C_i} + \frac{B_{2i}x + C_{2i}}{(x^2 + b_ix + c_i)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_i i}x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_ix + c_i)^{\beta_i}}$$

Ejemplo 6.3.

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^2(x-7)(x^2+1)^3(x^2+2x+9)^2}.$$

Entonces,

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-7} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2} + \frac{Hx+I}{(x^2+1)^3} + \frac{Jx+K}{x^2+2x+9} + \frac{Lx+M}{(x^2+2x+9)^2}.$$

Ejemplo 6.4.

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{2x-5}{(x^2+1)(x-2)^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(Ax+B)(x-2)^2 + C(x^2+1)(x-2) + D(x^2+1)}{(x^2+1)(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$2x - 5 = (Ax+B)(x-2)^2 + C(x^2+1)(x-2) + D(x^2+1). \tag{6.1}$$

Podemos usar dos métodos para obtener los valores de A, B, C y D:

- **Método 1:** Igualar coeficientes de ambos polinomios en x. Obtenemos así las ecuaciones,

$$\begin{aligned} 0 &= A + C && (x^3) \\ 0 &= -4A + B - 2C + D && (x^2) \\ 2 &= 4A - 4B + C && (x^1) \\ -5 &= 4B - 2C + D && (x^0) \end{aligned}$$

Así, restando las ecuaciones asociadas a x^2 y x, y por otra parte restando las ecuaciones asociadas a x y x^3, obtenemos

$$\begin{aligned} -4A - 3B &= 5 \\ 3A - 4B &= 2. \end{aligned}$$

De aquí, $B = -\frac{23}{25}$ y $A = -\frac{14}{25}$. Reemplazando nuevamente es las ecuaciones se obtiene que $C = \frac{14}{25}$ y $D = -1/5$.

- **Método 2:** Como la igualdad de polinomios (6.1) debe ser $\forall x \in \mathbb{R}$,entonces se pueden reemplazar algunos valores de x que sean convenientes. Incluso se pueden reemplazar (si no se complica mucho el álgebra) algunos valores de $x \in \mathbb{C}$.

  Por ejemplo, si tomamos $x = 2$, luego (6.1) queda:

  $$-1 = 5D,$$

  de donde $D = -1/5$.

  Además, como $x = i$ es raíz de $x^2 + 1 = 0$, usamos $x = i$ de donde obtenemos

  $$\begin{aligned} 2i - 5 &= (Ai + B)(i - 2)^2 = (Ai + B)(i^2 - 4i + 4) = (Ai + B)(3 - 4i) \\ &= 3Ai + 3B - 4Ai^2 - 4Bi = (3B + 4A) + (3A - 4B)i. \end{aligned}$$

  Luego,

  $$\begin{aligned} 3A - 4B &= 2 \\ 4A + 3B &= -5, \end{aligned}$$

  que es el mismo sistema obtenido con el método anterior y cuya solución es $B = -\frac{23}{25}$ y $A = -\frac{14}{25}$.

  Finalmente, para calcular C, se puede reemplazar $x = 0$ y usando los valores ya calculados de A, B y D, concluir que $C = \frac{14}{25}$.

6.6 Primitivas de funciones trigonométricas reducibles a primitivas de funciones racionales

Consideramos primitivas del tipo

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, \mathrm{d}x,$$

en donde R es una función racional en la cual aparecen sólo $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Ejemplo 6.5.
Las siguientes son este tipo de primitivas:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,, \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

En estos casos se aconseja el cambio de variable:

$$t = \tan(x/2),$$

con lo cual

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

Pero por otra parte $\arctan(t) = x/2$, de donde

$$\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\mathrm{d}x}{2}.$$

Combinando ambas igualdades obtenemos que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Usamos entonces unas conocidas identidades trigonométricas para el seno y el coseno de un ángulo doble, con lo que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}\\
\cos x &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\boxed{t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \operatorname{sen} x = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right), \quad \cos x = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right), \quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.}$$

Ejercicio 6.1: Escriba la primitiva $\displaystyle\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ usando el cambio de variable sugerido.

Guía de Ejercicios

1. Calcule las siguientes primitivas:

(a) $\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(ax)\,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int be^{ax}\,\mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int (ax)^\alpha\,\mathrm{d}x.$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{ax}\,\mathrm{d}x.$

(h) $\displaystyle\int \operatorname{senh}(ax)\,\mathrm{d}x.$

(i) $\displaystyle\int \cosh(ax)\,\mathrm{d}x.$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$

(n) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

(ñ) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x.$

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$

(p) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x.$

2. Justifique en detalle el cálculo, hecho en la tutoría, de las primitivas:

(a) $\displaystyle\int \sec x\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \csc x\,\mathrm{d}x.$

3. Aplique un cambio de variable para calcular las siguientes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)(\ln^2(x)+1)}\,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int \frac{\tan(x)}{\ln(\operatorname{sen}(x))}\,\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}}\,\mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

(g) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$

(h) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

(i) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x.$

(j) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x.$

4. Sea $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ una función racional en la cual aparecen solo $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Escriba la primitiva $\displaystyle\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ usando el cambio de variable $u = \tan(x/2)$.

5. Usando integración por partes calcule las siguientes primitivas

(a) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int xe^x\,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int x\operatorname{senh}(x)\,\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int x\cosh(x)\,\mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

(g) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$

(h) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x.$

(i) $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x.$

(j) $\displaystyle\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x.$

(k) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{senh}(x)\,\mathrm{d}x.$

(l) $\displaystyle\int x^2\cosh(x)\,\mathrm{d}x.$

(m) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

(n) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$

6. Establezca fórmulas de recurrencia para la expresión I_n, dada por

(a) $\displaystyle I_n = \int x^n\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle I_n = \int x^n\cos(x)\,\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle I_n = \int x^n e^x\,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle I_n = \int \mathrm{sen}^n(x)\,\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle I_n = \int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle I_n = \int x^n\,\mathrm{senh}(2x)\,\mathrm{d}x.$

7. Utilizando integración de funciones racionales calcule las siguientes primitivas

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$

8. Aplique el cambio de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$ para calcular las siguientes primitivas

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{sen}(x)}\,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sen}(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$

9. Calcule las siguientes primitivas

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$

10. Calcule $\displaystyle\int \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{1+g(x)^2}}\,\mathrm{d}x.$

Guía de Problemas

P1. Calcule las siguientes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+(\sqrt{1+x^2})^3}}\,\mathrm{d}x.$

P2. Sean f, g, h funciones tales que $f(x) = g(x) + h(x)g'(x)$. Usando la definición de primitiva muestre que

$$\int f(x)e^{h(x)}\,\mathrm{d}x = e^{h(x)}g(x) + c.$$

P3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ derivable y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tales que $f'(x) + g(x)f(x) = 0$. Usando la definición de primitiva muestre que

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = -\ln f(x) + c$$

P4. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ derivable y tal que $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$.

a) Muestre que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1$ y deduzca que $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = x + c$.

b) Concluya que $f(x) = e^{x+c}$.

P5. Calcule la siguiente integral

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

P6. **(a)** Sea $I_n = \displaystyle\int \frac{\cos(nx)}{(\cos(x))^n}\,\mathrm{d}x.$

(1) Calcule I_1, I_2.

(2) Calcule $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{(\cos(x))^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$

(3) Encontrar una relación de recurrencia para expresar I_{n+1} en función de I_n.

(b) Calcule la primitiva $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

P7. **(a)** Calcule $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln(x)+\ln^2(x))}.$

(b) Usando el cambio de variable $\tan(\frac{x}{2}) = u$, calcule $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$

(c) Sean $I = \displaystyle\int \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}x$ y $J = \displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln(x))\,\mathrm{d}x$. Usando integración por partes, plantee un sistema lineal que permita calcular I y J. Calcule I y J.

P8. **(a)** Calcule $\displaystyle\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}\,\mathrm{d}x$.

(b) Deduzca una fórmula de recurrencia para $I_{m,n} = \displaystyle\int x^m(\ln(x))^n\,\mathrm{d}x$. Use la fórmula para calcular $\displaystyle\int x^2 \ln x$.

P9. **(a)** Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

(b) Calcule $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$.

(c) Calcule $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$.

Integral de Riemann

7.1 Introducción

La teoría de la integral de Riemann tiene un objetivo simple, que es: formalizar la noción de área mediante una definición que sea compatible con las ideas comunes e intuitivas acerca de este concepto.
Surge entonces la pregunta de ¿Cuales son estas ideas básicas?. Por ejemplo, una de ellas es que el área de una superficie cuadrada de lado a sea a^2. Si esto es verdadero, se debe concluir que la superficie de un rectángulo de lados a y b es $a \cdot b$.

7.2 Condiciones básicas para una definición de área

Sea E un conjunto de puntos en el plano OXY. El área del conjunto E será un número real área(E) que cumple las siguientes condiciones.

(A1) área$(E) \geq 0$

(A2) $E \subseteq F \Longrightarrow$ área$(E) \leq$ área(F)

(A3) Si área$(E \cap F) = 0 \Longrightarrow$ área$(E \cup F) =$ área$(E) +$ área(F)

(A4) El área de una región rectangular E de lados a y b es área$(E) = a \cdot b$

Estas 4 condiciones son necesarias y suficientes para tener una buena definición de área. Se verá mas adelante, en el transcurso del curso, que la integral de Riemann las satisface adecuadamente.

Observación: Las cuatro propiedades elementales anteriores no son independientes entre sí, ya que por ejemplo (A2) es una consecuencia de (A1) y (A3)

Mediante la integral de Riemann se definirá el área de una región E particular: Dada una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ consideremos la región R limitada por el eje OX, la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. El área de esta región se llamará área bajo la curva $y = f(x)$ entre a y b.

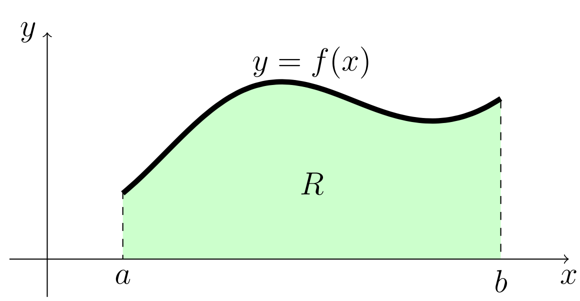


Figura 2: Región bajo una curva positiva.

Mediante un ejemplo se mostrará un método para determinar el área bajo una curva, que nos indicará el procedimiento a seguir en la definición de la integral de Riemann.

Por el momento, nos concentramos en la propiedad (A3), que sugiere dividir la región R en regiones más pequeñas. Por este motivo, el primer elemento que incorpora la definición de integral de Riemann es el concepto de partición, que sirve intuitivamente, para dividir la región R en bandas verticales, como se muestra en la figura 2. Antes de dar la definición formal de este concepto, mencionemos que la idea de cortar la región R por bandas verticales es una de las característica más notable de la idea de Riemann. La otra integral que a veces se menciona en los cursos matemáticos es la de Lebesgue, que se caracteriza por dividir la región R cortando en el eje OY de las imágenes. La gran complicación de esa teoría alternativa, es que por un lado se deben manipular los conjuntos preimágenes y por otro lado estos conjuntos pueden ser de geometría muy compleja.

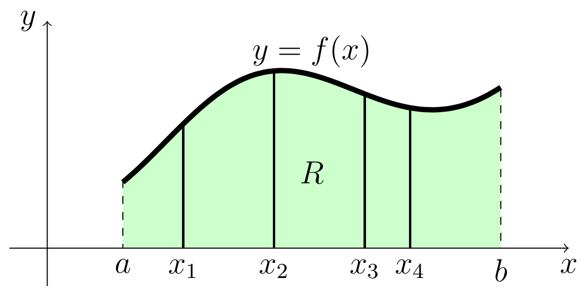


Figura 3: Región R cortada por bandas verticales.

Definición Una **partición** de un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto finito de puntos $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tales que

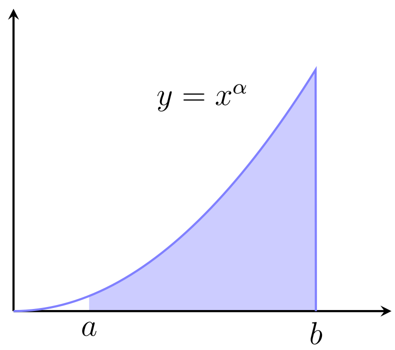
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Se llama **norma** de la partición P al real $|P| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$

Una vez que la región R se ha dividido, hay que calcular el área de cada una de las bandas verticales. Es en este momento, donde las complicaciones comienzan. Todo depende de lo complicada que sea la función tratada. En lo que sigue de esta sección, se explota esta idea hasta sus últimas consecuencias, pero solamente para la función $y = x^\alpha$.

7.2 Ejemplo

Dada la función $f(x) = x^\alpha$, donde $\alpha > 0$, se desea calcular el área encerrada entre $x = a \geq 0$ y $x = b > a$ bajo la curva $y = f(x)$, es decir, calcular el área de $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x \in [a, b], 0 \leq y \leq x^\alpha\}$.



Para estimar el área de la región R comenzamos por considerar una partición arbitraria del intervalo $[a, b]$. Digamos $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$.
La segunda idea importante es "acotar". Para ello, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ definido por la partición P, levantamos rectángulos por dentro y por fuera de la region considerada. Para que las cotas sean "lo mejor posible", se levantan rectángulos inscritos lo mas altos posibles y rectángulos exteriores lo más bajos posible.

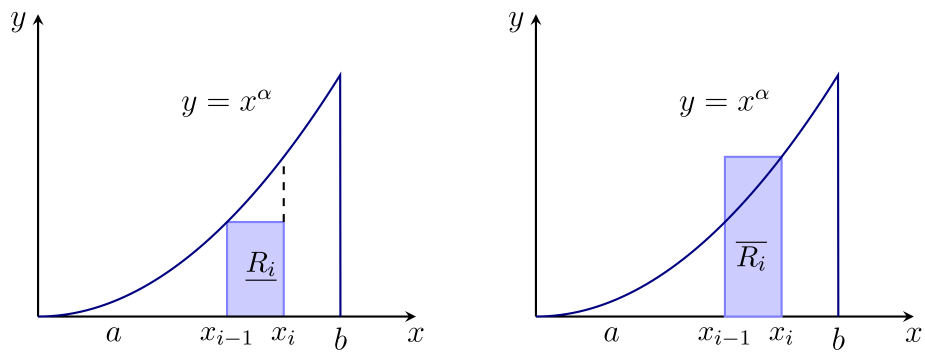


Figura 4: Cotas inferior y superior de R_i

Es así como:

$$\underline{R}_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, x_{i-1}^\alpha]$$
$$\overline{R}_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, x_i^\alpha]$$

Con esto claramente

$$\bigcup_{i=1}^{n} \underline{R}_i \subseteq R \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{R}_i$$

Ahora usamos las propiedades (A2) y (A3) de área para deducir que

$$\sum_{i=1}^{n} \text{área}(\underline{R}_i) \leq \text{área}(R) \leq \sum_{i=1}^{n} \text{área}(\overline{R}_i)$$

Usando la propiedad (A4) de área, concluimos que

$$\forall P \text{ partición de } [a, b], \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^\alpha (x_i - x_{i-1}) \leq \text{área}(R) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha (x_i - x_{i-1}). \tag{7.1}$$

Para terminar con nuestras estimaciones, hay que calcular explícitamente las sumatorias. Para ello debemos considerar casos especiales de las particiones, donde el cálculo es realizable con álgebra elemental.
Para situaciones especiales como la aquí considerada, usaremos principalmente dos tipos de particiones especiales:

- Las particiones equi-espaciadas donde $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$. Aquí el factor $h = \frac{b-a}{n}$ se llama el paso de la partición, y corresponde exactamente a su norma.

- Las particiones que siguen una progresión geométrica, donde $x_i = ar^i$, donde r es la razón de la progresión, que es $r = \sqrt[n]{b/a}$. Estas particiones solo se pueden usar si $0 < a < b$.

En el primer caso el álgebra es más simple, ya que $(x_i - x_{i-1}) = h$ es constante, de ese modo la desigualdad (7.1) queda

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h \cdot \sum_{i=1}^{n} (a + h(i-1))^\alpha \leq \text{área}(R) \leq h \cdot \sum_{i=1}^{n} (a + hi)^\alpha. \tag{7.2}$$

Para calcular las sumatorias, en este primer caso, vamos a suponer que $a = 0$ y que α solo toma los casos particulares $\alpha = 1, 2$ ó 3. Así queda

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h^{1+\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-1)^\alpha \leq \text{área}(R) \leq h^{1+\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^\alpha. \tag{7.3}$$

A continuación haremos todos los cálculos, recordando que las sumatorias para $\alpha = 1, 2$ ó 3 son conocidas:

- Para $\alpha = 1$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \leq \text{área}(R) \leq \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$
que simplificada queda
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \leq \text{área}(R) \leq \frac{b^2}{2} \cdot \frac{(n+1)}{n}.$$
Como esta desigualdad es cierta para todo n, podemos tomar el límite cuando $n \to \infty$, y asi obtener que
$$\text{área}(R) = \frac{b^2}{2} = \frac{b \cdot H}{2},$$
que corresponde a la conocida fórmula del área de un triángulo, obtenida por aproximación de rectángulos internos y externos de ancho cada vez más pequeño.

- Para $\alpha = 2$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \leq \text{área}(R) \leq \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
que simplificada queda
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^3}{3} \cdot \frac{(n-1)(n-\frac{1}{2})}{n^2} \leq \text{área}(R) \leq \frac{b^3}{3} \cdot \frac{(n+1)(n+\frac{1}{2})}{n^2}.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo n, podemos tomar el límite cuando $n \to \infty$, y así obtener que

$$\text{área}(R) = \frac{b^3}{3} = \frac{b \cdot H}{3},$$

que corresponde a la primera generalización del concepto de área a regiones parabólicas.

- Finalmente, para $\alpha = 3$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^4}{n^4} \cdot \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2 \leq \text{área}(R) \leq \frac{b^4}{n^4} \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

que simplificada queda

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^4}{4} \cdot \left[\frac{n-1}{n}\right]^2 \leq \text{área}(R) \leq \frac{b^4}{4} \cdot \left[\frac{n+1}{n}\right]^2.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo n, podemos tomar el límite cuando $n \to \infty$, y asi obtener que

$$\text{área}(R) = \frac{b^4}{4} = \frac{b \cdot H}{4},$$

que corresponde a una segunda generalización del concepto de área a regiones bajo parábolas cúbicas.

En el caso de particiones formadas por una progresión geométrica, el álgebra es más complicada, pero las sumatorias se pueden resolver para todo $\alpha > 0$. Recordando que los puntos de la partición están definidos por $x_i = ar^i$, donde r es la razón de la progresión, igual a $r = \sqrt[n]{b/a}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}(x_i - x_{i-1}) &= ar^i - ar^{i-1} = ar^{i-1}(r-1)\\ x_{i-1}^\alpha &= (ar^{i-1})^\alpha = a^\alpha \cdot r^{(i-1)\alpha}\\ x_i^\alpha &= (ar^i)^\alpha = a^\alpha \cdot r^{(i-1)\alpha} \cdot r^\alpha\end{aligned}$$

con esto, la desigualdad (7.1) queda

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} a^\alpha \cdot r^{(i-1)\alpha} \cdot ar^{i-1}(r-1) \leq \text{área}(R) \leq r^\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} a^\alpha \cdot r^{(i-1)\alpha} \cdot ar^{i-1}(r-1).$$

que reordenado se escribe como

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{\alpha+1}(r-1)\sum_{i=1}^{n}(r^{\alpha+1})^{(i-1)} \leq \text{área}(R) \leq r^\alpha \cdot a^{\alpha+1}(r-1)\sum_{i=1}^{n}(r^{\alpha+1})^{(i-1)}.$$

Aquí la sumatoria es conocida: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n - 1}{q - 1}$. luego

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{\alpha+1}(r-1)\frac{(r^n)^{\alpha+1} - 1}{r^{\alpha+1} - 1} \leq \text{área}(R) \leq r^\alpha \cdot a^{\alpha+1}(r-1) \cdot \frac{(r^n)^{\alpha+1} - 1}{r^{\alpha+1} - 1}.$$

que reordenada, y consideando que $r = \sqrt[n]{b/a}$, queda

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \cdot \frac{r-1}{r^{\alpha+1} - 1} \leq \text{área}(R) \leq r^\alpha \cdot (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \cdot \frac{r-1}{r^{\alpha+1} - 1}.$$

Si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ se tiene que $r \to 1$ y $\frac{r-1}{r^{\alpha+1}-1} \to \frac{1}{\alpha+1}$ (su réciproco es la derivada de $x^{\alpha+1}$ en $x = 1$). Por lo tanto se obtiene que

$$\text{área}(R) = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

Esta fórmula generaliza las obtenidas con particiones equiespaciadas, y constituye nuestra primera integral de Riemann, que cómo se verá más adelante corresponde a

$$\int_a^b x^\alpha = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$$

Obsérvese que esta fórmula es muy parecida a la fórmula de primitivas que decía

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C.$$

La razón de esta semejanza será vista cuando estudiemos el teorema fundamental del cálculo.

7.3 Integración de funciones escalonadas

En el tratamiento teórico que sigue consideraremos una teoría restringida, en la cual las áreas de las bandas verticales son muy fáciles de calcular. Se trata de la teoría de integración para funciones escalonadas. Más tarde mostraremos cómo es posible usar esta teoría restringida, para desarrollar la teoría general. Comenzaremos por definir las funciones escalonadas y luego veremos cómo se define su integral de Riemann. Antes de comenzar, insistamos que en la teoría de Riemann, la función puede tener signo arbitrario (o sea puede ser positiva o negativa).

DEFINICIÓN Diremos que una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es **escalonada**, si existe una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tal que f es constante en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i), $\forall i = 1, \ldots, n$.

OBS: Las funciones escalonadas sólo toman un número finito de valores diferentes, que son: los valores $f(x_i)$ en los $n + 1$ puntos de la partición y los valores constantes c_i que toma en los n intervalos abiertos (x_{i-1}, x_i). Así resulta que toda función escalonada es **acotada**.
OBS: Diremos que P es una partición asociada a f. Esta partición P no es única ya que al subdividir los intervalos de P, la función f todavía será constante en las subdivisiones que resulten (vea la Figura 6). Por este motivo, antes de estudiar propiedades de estas funciones, conviene introducir el siguiente concepto:

DEFINICIÓN Sean P, Q son particiones de un mismo intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que Q es un refinamiento de P, o que Q es más fina que P si se cumple que $P \subseteq Q$.

OBS: Si P y Q son particiones cualesquiera, no siempre una es refinamiento de la otra, ya que el concepto de refinamiento NO está asociado directamente a la cantidad de puntos de una partición. Solo podemos decir que si Q es refinamiento de P, entonces Q tiene una cantidad de puntos mayor

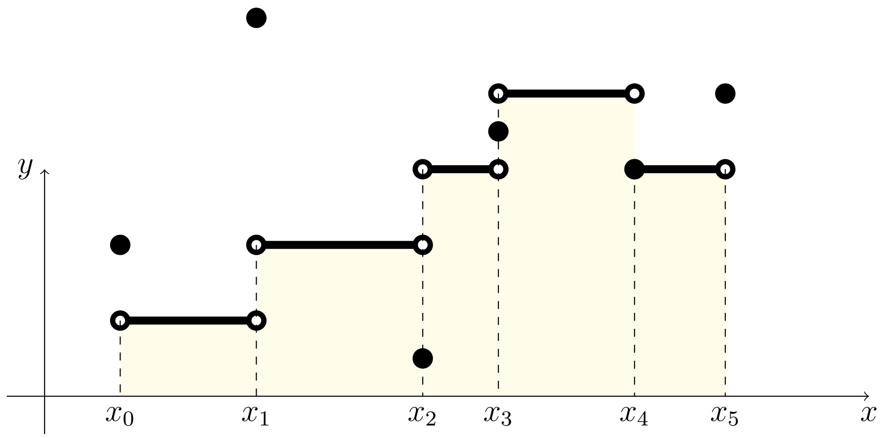


Figura 5: Función escalonada en $[a, b]$.

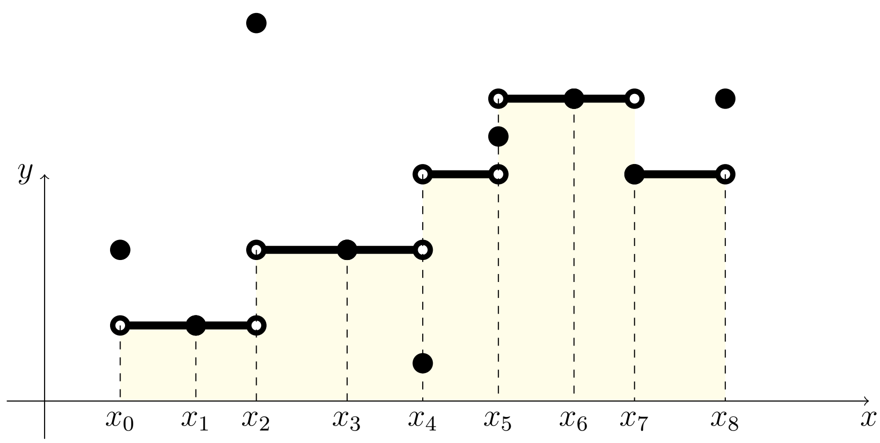


Figura 6: Otra partición para la misma función escalonada de la Figura 5.

o igual que P, pero el recíproco es falso. Sin embargo, dadas dos particiones arbitrarias P y Q, siempre existe un refinamiento común a ellas. En efecto, $P \cup Q$ es una partición (ordenando sus puntos de menor a mayor) que es refinamiento de P y de Q simultáneamente.

Proposición 7.1. *Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función **escalonada**. Si para cada partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ asociada a f se calcula*

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

donde f_i denota al valor constante de f en el intervalo abierto (x_{i-1}, x_i). Entonces $I(f, P)$ no depende de P, es decir, es una cantidad que depende solamente de f.

Demostración. Sean P, Q particiones asociadas a f, es decir, particiones tales que f es constante en cada sub-intervalo definido por cada una de ellas. Debemos demostrar que $I(f, P) = I(f, Q)$.
Etapa 1) Consideremos primero el caso particular $P \subseteq Q$ tal que Q contiene exactamente un

punto más que P. Digamos $Q = \{x_0, \ldots, x_n\}$ y $P = Q \setminus \{x_s\}$. De este modo tenemos que:

$$I(f, Q) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$
$$I(f, P) = \sum_{i=1}^{s-1} f_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + f_s(x_{s+1} - x_{s-1}) + \sum_{i=s+1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

como P y Q son particiones asociadas a f, entonces f es constante en el intervalo (x_{s-1}, x_{s+1}), así $f_s = f_{s+1}$. Por lo tanto

$$f_s(x_{s+1} - x_{s-1}) = f_s(x_{s+1} - x_s + x_s - x_{s-1}) = f_{s+1}(x_{s+1} - x_s) + f_s(x_s - x_{s-1})$$

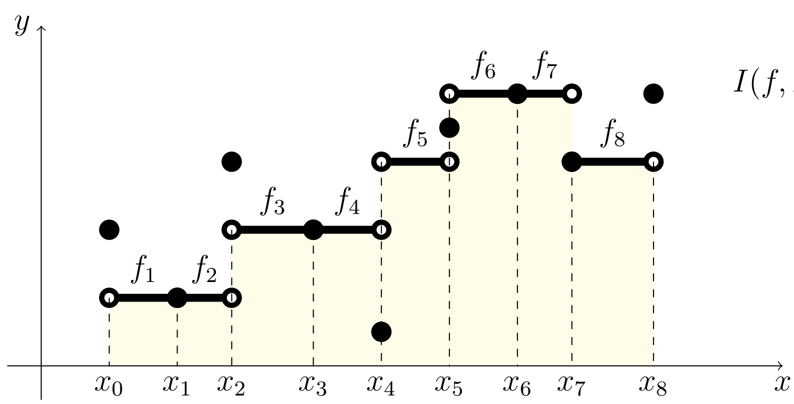
de donde se obtiene la igualdad.
Etapa 2) Consideremos un segundo caso particular, en que $P \subseteq Q$ cualquiera. Claramente, se puede pasar de la partición P a la partición Q por medio de particiones intermediarias construidas agregando un punto cada vez: $P = P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots P_k = Q$. Usando el resultado anterior, se tiene que

$$I(f, P) = I(f, P_1) = \cdots = I(f, P_k) = I(f, Q).$$

con lo cual la propiedad queda demostrada para el caso $P \subseteq Q$.
Etapa 3) En el caso general, basta tomar $R = P \cup Q$, que constituye una partición más fina que P y Q simultáneamente. Así, con lo demostrado anteriormente se tiene que

$$I(f, P) = I(f, R) \qquad y \qquad I(f, Q) = I(f, R). \qquad \square$$

De aquí se obtiene la igualdad buscada en el caso general.



$$\begin{aligned} I(f, P) = {} & \underbrace{f_1 \cdot (x_1 - x_0) + f_2(x_2 - x_1)}_{=f_1 \cdot (x_2 - x_1)} \\ & + \underbrace{f_3 \cdot (x_3 - x_2) + f_4(x_4 - x_3)}_{=f_3 \cdot (x_4 - x_2)} \\ & + f_5 \cdot (x_5 - x_4) \\ & + \underbrace{f_6 \cdot (x_6 - x_5) + f_7(x_7 - x_6)}_{=f_6 \cdot (x_7 - x_5)} \\ & + f_8 \cdot (x_8 - x_7) \end{aligned}$$

Figura 7: La integral de una función escalonada no depende de la partición usada en su cálculo.

DEFINICIÓN Para cada función $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ **escalonada**, se define su integral de Riemann como

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

donde $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ designa cualquier partición asociada a f y f_i denota al valor constante de f en el correspondiente intervalo abierto (x_{i-1}, x_i).

OBS: También se suele usar la notación de Leibniz $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

OBS: La integral de una función escalonada solo depende de los valores de f en los interiores de los intervalos de la partición y no de los valores de f en los bordes.

7.4 Propiedades de la integral de funciones escalonadas.

La integral de funciones escalonadas satisface las propiedades enunciadas en los siguientes 4 teoremas:

Teorema 7.2. *(Linealidad) Si f, g son dos funciones escalonadas en el mismo intervalo $[a, b]$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la función $\alpha f + \beta g$ es una función escalonada en $[a, b]$ y se tiene*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Demostración. Sean f, g funciones escalonadas y sean P y Q particiones asociadas a f y g respectivamente (no necesariamente las mismas). Claramente la partición $R = P \cup Q$, que es un refinamiento común de P y Q está asociada a f y g simultáneamente. (en efecto, pensemos en f: cada intervalo abierto definido por la partición R está incluido en un intervalo abierto definido por P, donde f es constante. Análogo para g). Luego, si escribimos $R = \{x_0, \dots, x_n\}$, resulta que

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n f_i \Delta x_i \qquad \text{y} \qquad \int_a^b g = \sum_{i=1}^n g_i \Delta x_i$$

donde f_i y g_i denotan los valores constantes de f y g en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i).
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Claramente la función $h = \alpha f + \beta g$ satisface:

$$h(x) = \alpha f_i + \beta g_i = h_i, \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

por lo tanto es una función escalonada y su integral vale

$$\int_a^b h = \sum_{i=1}^n h_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (\alpha f_i + \beta g_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \alpha f_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \beta g_i \Delta x_i = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g. \qquad \square$$

Teorema 7.3. *(Aditividad horizontal) Si f es una función escalonada en el intervalo $[a, b]$ (donde $a < b$) y si $c \in (a, b)$ es arbitrario. Entonces, f es una función escalonada en ambos intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ y se tiene que*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. Sea f una función escalonada en $[a, b]$, sea P una partición asociada a f y sea $c \in (a, b)$. Claramente la partición $R = P \cup \{c\}$, es un refinamiento de P y por lo tanto, también está asociada a f (en efecto, cada intervalo abierto definido por la partición R está incluido en un intervalo abierto definido por P, donde f es constante). Para fijar ideas, digamos que $R = \{x_0, \dots, x_n\}$, donde $x_0 = a$, $x_m = c$ y $x_n = b$, donde $0 < m < n$ y que $f(x) = f_i$ en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i), con $i \in \{1, \dots, n\}$.

Claramente

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta x_i.$$

Ahora, definiendo $P_1 = R \cap [a, c] = \{x_0, \ldots, x_m\}$ y $P_2 = R \cap [c, b] = \{x_m, \ldots, x_n\}$, se han formado dos particiones, la primera del intervalo $[a, c]$ y la otra del intervalo $[c, b]$. Como f es constante en cada intervalo abierto definido por P_1 (que son algunos de los intervalos abiertos definidos por R), f resulta ser escalonada en $[a, c]$ y su integral vale

$$\int_a^c f = \sum_{i=1}^{m} f_i \Delta x_i.$$

Análogamente, f es escalonada en $[c, b]$ y su integral vale

$$\int_c^b f = \sum_{i=m+1}^{n} f_i \Delta x_i.$$

Sumando ambas integrales se obtiene que

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \sum_{i=1}^{m} f_i \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta x_i = \int_a^b f.$$

□

Teorema 7.4. *(Monotonía) La integral de una función escalonada positiva en el intervalo $[a, b]$ es positiva. En consecuencia, si f, g son funciones escalonadas en el intervalo $[a, b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se tiene que*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

La demostración se deja propuesta.

7.5 Funciones Riemann integrables

En esta sección, veremos como se puede definir la Integral de Riemann para una clase muy amplia de funciones. En realidad, con esta teoría se puede integrar prácticamente cualquier función encontrada en ingeniería.

Inicialmente, no pondremos condiciones sobre la función f que trataremos. Puede ser continua o no. Sólo impondremos que se trate de una función bien definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, con $a < b$ y que sea acotada en dicho intervalo (es decir, que existan $m = \text{ínf}\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$).

Con estas únicas condiciones, que son bastante generales, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 7.5. *Si f es una función definida y acotada en $[a, b]$ arbitraria, entonces se cumple que:*

1. *Los siguientes conjuntos son no vacíos:*

   - *$\mathcal{E}_-(f)$ es el conjunto de todas las funciones escalonadas que minoran a f, es decir, aquellas funciones escalonadas e tales que $\forall x \in [a, b], e(x) \leq f(x)$.*

- *$\mathcal{E}_+(f)$ es el conjunto de todas las funciones escalonadas que mayoran a f, es decir, aquellas funciones escalonadas e tales que $\forall x \in [a,b], f(x) \leq e(x)$.*

2. *Siempre existen las cantidades*

$$I_-(f) = \sup\Big\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_- \Big\}, \qquad I_+(f) = \text{ínf}\Big\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_+ \Big\}, \tag{7.4}$$

llamadas integral inferior e integral superior de f en $[a,b]$ respectivamente.

3. *Estas integrales verifican la desigualdad*

$$I_-(f) \leq I_+(f).$$

Demostración. 1) Primero notamos que al ser f acotada en $[a,b]$, existen

$$m = \underset{x\in[a,b]}{\text{ínf}} f(x), \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

de modo que las funciones escalonadas $f_-(x) = m$ y $f_+(x) = M$ son elementos de $\mathcal{E}_-$ y $\mathcal{E}_+$ respectivamente. Así, esos conjuntos no son vacíos.
2) Por otro lado, si $F \in \mathcal{E}_-$ y $G \in \mathcal{E}_+$ se cumple que

$$F(x) \leq G(x), \qquad \forall x \in [a,b].$$

por lo tanto

$$\forall F \in \mathcal{E}_-, \left(\forall G \in \mathcal{E}_+, \quad \int_a^b F \leq \int_a^b G\right)$$

El paréntesis de la expresión anterior indica que el conjunto $\Big\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_+ \Big\}$ es acotado inferiormente por el real $\int_a^b F$. En consecuencia su ínfimo existe y cumple:

$$\forall F \in \mathcal{E}_-, \int_a^b F \leq \text{ínf}\Big\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_+ \Big\}.$$

Esta última desigualdad indica que el conjunto $\Big\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_- \Big\}$ es acotado superiormente y su supremo satisface la relación

$$\sup\Big\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_- \Big\} \leq \text{ínf}\Big\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_+ \Big\}.$$

Esto prueba que las cantidades $I_-(f)$ (Integral inferior) y $I_+(f)$ (Integral superior) de f siempre existen. Además se cumple la relación

$$I_-(f) \leq I_+(f), \qquad \forall f \text{ definida y acotada en } [a,b]. \qquad \square$$

La duda que queda en el teorema anterior, es si la última desigualdad es o no estricta. Pues bien, con las hipótesis generales que hemos puesto, resulta que algunas funciones satisfacen la igualdad y otras la desigualdad estricta. En el último caso, habrían 2 integrales para la misma función, lo cual no es útil. Por esa razón, dichas funciones se descartan de la teoría y se dice que no son Riemann integrables.
Cuando se cumple la igualdad, el cálculo resultante es muy útil y por eso se hace la siguiente definición:

Definición Con las notaciones del teorema anterior, se dice que una función f definida y acotada en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$ si se cumple la

$$I_-(f) = I_+(f).$$

Dicho número común se llama la integral de f en el intervalo $[a, b]$ y se le denota por

$$\int_a^b f \quad \text{o bien} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Notación de Leibniz).}$$

Después de entender la definición previa, surge la pregunta: ¿Cuáles son las funciones Riemann integrables? o ¿Cómo saber si una función dada es o no Riemann integrable? Para responder a esta última pregunta, es útil demostrar el siguiente teorema, que caracteriza totalmente a las funciones Riemann integrables.

Ejemplo 7.1 (Una función que no es Riemann integrable).
Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta función no es Riemann integrable en $[a, b]$ ya que: Si e_- es una función escalonada tal que $e_-(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i) se tendrá que $e_{-i} \leq 0$, de modo que $\displaystyle\int_a^b e_-(x) \leq 0$.
Análogamente, si $e_+(x)$ es una función escalonada mayorante, es decir que cumple $e_+(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces, en cada intervalo donde e_+ es constante se tendrá que $e_{+i} \geq 1$ y por lo tanto $\displaystyle\int_a^b e_+ \geq (b-a)$.
Con esto, $\displaystyle\int_a^b (e_+ - e_-) \geq (b-a)$, con lo cual no es posible cumplir la condición de Riemann.

Teorema 7.6 (Condición de Riemann). *Una función f definida y acotada en el intervalo cerrado $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$ si y solamente si*

$$\text{“} \forall \varepsilon > 0 \textit{ existen } f_- \in \mathcal{E}_- \textit{ y } f_+ \in \mathcal{E}_+ \textit{ tales que } \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \varepsilon.\text{”}$$

Demostración. Primero veamos que la condición de Riemann es suficiente:
Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sabemos que existen funciones escalonadas $f_- \in \mathcal{E}_-$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+$ tales que

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \varepsilon. \tag{7.5}$$

Pero,

$$\int_a^b f_- \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq \int_a^b f_+$$

Es decir, usando (7.5) se obtiene que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |I_+(f) - I_-(f)| \leq \varepsilon$$

de donde se obtiene que $I_-(f) = I_+(f)$ y así f resulta ser Riemann integrable.
Recíprocamente, si f es Riemann integrable en $[a, b]$, sabemos que $I_-(f) = I_+(f)$. Pero, (por definición de infimo y supremo) para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $f_-(x) \in \mathcal{E}_-$ y $f_+(x) \in \mathcal{E}_+$ tales que

$$I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b f_-, \qquad \int_a^b f_+ \leq I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

de aquí, restando se tiene que

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \varepsilon.$$

□

con lo cual la función satisface la condición de Riemann.

Funciones Riemann Integrables

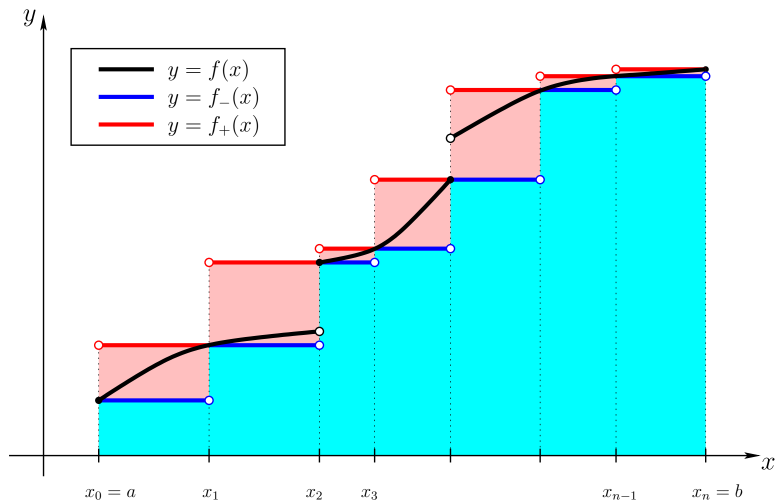
En esta sección veremos como la condición de Riemann permite demostrar que tanto las funciones monótonas en $[a, b]$ (no necesariamente continuas) y las funciones continuas en $[a, b]$, son ambas clases de funciones Riemann integrables. Esta propiedad la estudiaremos en detalle en los próximos 2 teoremas:

Teorema 8.1. *Toda función monótona en* $[a, b]$ *es Riemann integrable en* $[a, b]$.

Demostración. Para fijar ideas, supongamos que f es creciente en $[a, b]$. Tomemos una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ cualquiera del intervalo $[a, b]$ y construyamos las siguientes funciones escalonadas definidas en los intervalos (x_{i-1}, x_i) por:

$$\begin{aligned} f_-(x) &= f(x_{i-1}) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ f_+(x) &= f(x_i) \quad\ \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i) \end{aligned}$$

e iguales a $f(x_i)$ en cada punto de la partición.



Claramente, para todo $x \in [a, b]$ se tiene $f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x)$.
Además:

$$\int_a^b f_- = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i, \qquad \int_a^b f_+ = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

de modo que

$$\int_a^b (f_+ - f_-) = \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\Delta x_i \leq |P|(f(b) - f(a))$$

Para que esta diferencia sea menor que $\varepsilon > 0$ arbitrario, basta tomar cualquier partición P de modo que su norma sea lo suficientemente pequeña. ($|P| \leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$) $\square$

Teorema 8.2. *Toda función continua en* $[a, b]$ *es Riemann integrable en* $[a, b]$.

Demostración. Tomemos una partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ cualquiera del intervalo $[a, b]$ y construyamos las siguientes funciones escalonadas definidas en los intervalos (x_{i-1}, x_i) por:

$$f_-(x) = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$
$$f_+(x) = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

e iguales a $f(x_i)$ en cada punto de la partición.
Claramente, para todo $x \in [a, b]$ se tiene $f_-(x) \le f(x) \le f_+(x)$.
Además:

$$\int_a^b f_- = \sum_{i=1}^n \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i, \qquad \int_a^b f_+ = \sum_{i=1}^n \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} \Delta x_i.$$

de modo que

$$\Delta = \int_a^b (f_+ - f_-) = \sum_{i=1}^n \Big(\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)\Delta x_i$$

Como f es continua en $[a, b]$, en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, f alcanza su mínimo y su máximo. Digamos que

$$\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(s_i) \quad \text{y} \quad \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(t_i)$$

donde $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
Ahora recordamos que las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ son uniformemente continuas en $[a, b]$, por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier par de puntos $s, t \in [a, b]$ tales que $|s - t| \le \delta$ se cumple que:

$$|f(s) - f(t)| \le \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

La demostración concluye tomando cualquier partición P de modo que su norma sea menor o igual a δ, así aseguramos que $|s_i - t_i| \le \delta$ y con esto resulta que:

$$\Delta \le \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\varepsilon}{b - a}\Big)\Delta x_i = \varepsilon.$$

□

Observación: En la demostración de ambos teoremas, se han usado las funciones escalonadas definidas en los intervalos (x_{i-1}, x_i) por:

$$f_-(x) = m_i(f) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$
$$f_+(x) = M_i(f) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

e iguales a $f(x_i)$ en cada punto de la partición.

Con ellas se tiene que

$$\int_a^b f_- = \sum_{i=1}^n m_i(f)\Delta x_i$$
$$\int_a^b f_+ = \sum_{i=1}^n M_i(f)\Delta x_i$$

que suelen llamarse suma inferior y suma superior de f asociadas a P, y se denotan respectivamente por $s(f,P)$ y $S(f,P)$.
Pues bien, en ambos casos (funciones monótonas y/o continuas) existe $\delta > 0$ de modo que si $|P| \leq \delta$ se obtiene $S(f,P) - s(f,P) \leq \varepsilon$
Estas sumas son interesantes, pero no tan fáciles de calcular, debido a las definiciones de m_i y M_i. Por este motivo muchas veces se suele usar la suma obtenida por la integración de una función escalonada intermediaria, la cual se define en cada intervalo (x_{i-1}, x_i) por:

$$f_*(x) = f(s_i) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

donde los reales s_i son arbitrarios del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Claramente en este caso:

$$s(f,P) \leq \int_a^b f_* = \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i \leq S(f,P)$$

La sumatoria intermedia se conoce como suma de Riemann.
Como la integral de f también satisface la desigualdad

$$s(f,P) \leq \int_a^b f \leq S(f,P)$$

se concluye que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \text{ partición de } [a,b], |P| \leq \delta \Longrightarrow \left| \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon$$

Esta propiedad es una de las motivaciones de la notación de Leibniz, entendiendo que la integral es el límite de una sumatoria, es decir:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i.$$

En este límite la variable que tiende a cero es la norma de la partición P ($|P| \to 0$) y se calcula sobre las sumas de Riemann. Esto explica el uso del signo integral (especie de S alargada, como límite del signo sumatoria) y de la notación de Leibniz, donde el término denotado por $f(x)\,\mathrm{d}x$ representaría al sumando $f(s_i)\Delta x_i$ en el proceso de límite.

8.1 Propiedades de la Integral

Con las dos clases de funciones encontradas en la sección previa, tenemos muchas funciones a las que se le puede definir su integral. Sin embargo, esta clase puede crecer aun más si se combinan funciones y se aplican las propiedades que demostraremos en los siguientes 4 teoremas:

Teorema 8.3. *(Linealidad) Si f, g son dos funciones Riemann integrables en el mismo intervalo $[a, b]$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la función $\alpha f + \beta g$ es una función Riemann integrable en $[a, b]$ y se tiene*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Demostración.
(Caso de la suma de funciones integrables)
Si f, g son Riemann integrables en $[a, b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $f_-(x), f_+(x), g_-(x)$ y $g_+(x)$ tales que

$$f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x), \qquad g_-(x) \leq g(x) \leq g_+(x), \qquad \forall x \in [a, b] \tag{8.1}$$

y

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{y} \qquad \int_a^b g_+ - \int_a^b g_- \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.2}$$

Sumando en (8.1) se obtiene que

$$f_-(x) + g_-(x) \leq f(x) + g(x) \leq f_+(x) + g_+(x), \qquad \forall x \in [a, b] \tag{8.3}$$

y usando (8.2) resulta que

$$\int_a^b [f_+ + g_+] - \int_a^b [f_- + g_-] \leq \varepsilon, \tag{8.4}$$

de donde se deduce que $f + g$ es Riemann integrable en $[a, b]$.
Además de (8.2) se pueden escribir las siguientes desigualdades (útiles en lo que sigue):

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b f_- \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f_+ \leq \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.5}$$

$$\int_a^b g - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b g_- \leq \int_a^b g \leq \int_a^b g_+ \leq \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.6}$$

De (8.3) se tiene que

$$\int_a^b f_- + \int_a^b g_- \leq \int_a^b [f + g] \leq \int_a^b f_+ + \int_a^b g_+$$

que combinada con (8.5) y (8.6) se transforma en

$$\int_a^b f + \int_a^b g - \varepsilon \leq \int_a^b [f + g] \leq \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon$$

Esta última expresión dice que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\left|\int_a^b [f+g] - \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right)\right| \leq \varepsilon$$

de donde se deduce la igualdad

$$\int_a^b [f+g] = \int_a^b f + \int_a^b g$$

(Caso de la ponderación de funciones integrables)
Sea f una función Riemann integrable y sea $\alpha > 0$. (Si $\alpha = 0$ claramente αf es integrable y su integral es 0).
Para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $f_-(x)$ y $f_+(x)$ tales que:

$$f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x), \qquad \forall x \in [a,b] \tag{8.7}$$

y

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}. \tag{8.8}$$

Multiplicando (8.7) por $\alpha > 0$ se obtiene que

$$\alpha f_-(x) \leq \alpha f(x) \leq \alpha f_+(x), \qquad \forall x \in [a,b] \tag{8.9}$$

y usando (8.8) resulta que

$$\int_a^b [\alpha f_+] - \int_a^b [\alpha f_-] \leq \varepsilon, \tag{8.10}$$

de donde se deduce que αf es Riemann integrable en $[a,b]$.
Además de (8.8) se puede escribir la siguiente desigualdad (útiles en lo que sigue):

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{\alpha} \leq \int_a^b f_- \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f_+ \leq \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{\alpha} \tag{8.11}$$

De (8.9) se tiene que

$$\alpha \int_a^b f_- \leq \int_a^b \alpha f \leq \alpha \int_a^b f_+$$

que combinada con (8.11) se transforma en

$$\alpha \int_a^b f - \varepsilon \leq \int_a^b \alpha f \leq \alpha \int_a^b f + \varepsilon$$

Esta última expresión dice que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\left|\int_a^b \alpha f - \left(\alpha \int_a^b f\right)\right| \leq \varepsilon$$

de donde se deduce la igualdad

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$$

Para terminar con el caso $\alpha < 0$, basta con probar que si f es Riemann integrable en $[a, b]$, entonces $-f$ es Riemann integrable en $[a, b]$. En efecto, para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas f_- y f_+ tales que:

$$f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x), \qquad \forall x \in [a, b] \tag{8.12}$$

y

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \varepsilon. \tag{8.13}$$

Multiplicando (8.12) por -1 se obtiene que

$$-f_+(x) \leq -f(x) \leq -f_-(x), \qquad \forall x \in [a, b] \tag{8.14}$$

y usando (8.13) resulta que

$$\int_a^b [-f_-] - \int_a^b [-f_+] \leq \varepsilon, \tag{8.15}$$

de donde se deduce que $-f$ es Riemann integrable en $[a, b]$.
Además de (8.13) se puede escribir la siguiente desigualdad (útiles en lo que sigue):

$$\int_a^b f - \varepsilon \leq \int_a^b f_- \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f_+ \leq \int_a^b f + \varepsilon \tag{8.16}$$

De (8.14) se tiene que

$$-\int_a^b f_+ \leq \int_a^b (-f) \leq -\int_a^b f_-$$

que combinada con (8.16) se transforma en

$$-\int_a^b f - \varepsilon \leq \int_a^b -f \leq -\int_a^b f + \varepsilon$$

Esta última expresión dice que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\left| \int_a^b (-f) - \left(-\int_a^b f \right) \right| \leq \varepsilon$$

de donde se deduce la igualdad

$$\int_a^b -f = -\int_a^b f$$

$\square$

Teorema 8.4. *(Aditividad horizontal) Si f es una función definida y acotada en $[a, b]$ entonces f es Riemann integrable en $[a, b]$ si y solamente si, para cada $c \in (a, b)$ arbitrario se tiene que f es Riemann integrable en ambos intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$.*
En tal caso se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

La demostración se deja propuesta.

Teorema 8.5. *(Monotonía) La integral de una función Riemann integrable positiva en el intervalo $[a,b]$ es positiva; en consecuencia, si f,g son funciones Riemann integrables en $[a,b]$ tales que $f(x)\le g(x)$ para todo $x\in[a,b]$, se tiene que*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

La demostración se deja propuesta.

Teorema 8.6. *(Desigualdad triangular) Si f es una función Rieman integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es Riemann integrable en $[a,b]$ y se tiene que*

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

En consecuencia, si $|f(x)|\le M$ para todo $x\in[a,b]$, se cumple

$$\left|\int_a^b f\right| \le M(b-a).$$

Demostración. Sea f una función Riemann integrable en $[a,b]$. Para cada $\varepsilon>0$ existen funciones escalonadas $f_-(x)$ y $f_+(x)$ tales que:

$$f_-(x)\le f(x)\le f_+(x), \qquad \forall x\in[a,b] \tag{8.17}$$

y

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \le \varepsilon. \tag{8.18}$$

Como es habitual, se descompone la función f en la diferencia de dos funciones positivas, del modo siguiente:

$$P(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } f(x)\ge 0\\ 0 & \text{si } f(x)<0\end{cases} \quad \text{y} \quad N(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } f(x)\ge 0\\ -f(x) & \text{si } f(x)<0\end{cases}$$

Así se tiene que $f=P-N$ y $|f|=P+N$. La demostración se concluye probando que P es Riemann integrable en $[a,b]$, ya que por álgebra se deduce que N también lo es y en consecuencia $|f|$.

Claramente de (8.17) se deduce que en cada punto donde $f(x)\ge 0$ se tiene que

$$f_-(x)\le P(x)\le f_+(x).$$

En los puntos donde $f(x)<0$, resulta que $P(x)=0$, por lo tanto queda

$$0\le P(x)\le 0.$$

De este modo construimos las funciones escalonadas siguientes:

$$P_+(x)=\begin{cases} f_+(x) & \text{si } f_+(x)\ge 0\\ 0 & \text{si } f_+(x)<0\end{cases}$$

$$P_-(x)=\begin{cases} f_-(x) & \text{si } f_+(x)\ge 0\\ 0 & \text{si } f_+(x)<0\end{cases}$$

que claramente satisfacen:

$$P_-(x) \leq P(x) \leq P_+(x)$$

y

$$\int_a^b (P_+ - P_-) \leq \int_a^b (f_+ - f_-) \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Luego, P es Riemann integrable en $[a, b]$ y en consecuencia N y $|f|$.

8.2 Integral de a a b con $a \geq b$

DEFINICIÓN Sea f una función integrable en un intervalo $[p, q]$. Si $a, b \in [p, q]$ son tales que $a \geq b$ entonces se define la integral de a a b del modo siguiente:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \quad \text{si } a > b, \text{ o}$$
$$\int_a^b f = 0 \quad \text{si } a = b.$$

con esta definición, las propiedades de la integral se pueden enunciar así:

Proposición 8.7. *Sean f y g integrales en $[p, q]$ y $a, b \in [p, q]$ entonces:*

1) $\displaystyle\int_a^b \alpha = \alpha(b - a), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \forall c \in [p, q]$

3) $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

4) $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

5) $0 \leq f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [p, q] \implies \left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b g\right|$

6) $\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|$

DEMOSTRACIÓN. La demostraciones son sencillas y se dejan propuestas como ejercicios. $\square$

Guía de Ejercicios

1. Siguiendo el ejemplo de tutoría, se propone calcular las áreas encerradas bajo las funciones $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^3$. Por cierto en los dos primeros casos los resultados son bien conocidos, no así en el tercero. Nótese que al resolver estos ejercicios se observa lo siguiente:

función	Area entre 0 y b	donde
$f(x) = x^0$	$b \cdot h$	$h = 1$
$f(x) = x^1$	$\frac{b \cdot h}{2}$	$h = b$
$f(x) = x^2$	$\frac{b \cdot h}{3}$	$h = b^2$
$f(x) = x^3$	$\frac{b \cdot h}{4}$	$h = b^3$

Formule una generalización a estos resultados a potencias superiores.

2. Calcule el área encerrada bajo la función $\operatorname{sen}(x)$ entre 0 y $\pi/2$.

3. Calcule las integrales $\displaystyle\int_a^b (cx + d)\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x$ usando una familia de particiones equiespaciadas.

4. Considere la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$.

(a) Demuestre que si e es una función escalonada tal que $e(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [0,1]$, entonces $\displaystyle\int_0^1 e(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$.

(b) Demuestre que si E es una función escalonada tal que $E(x) \geq f(x)$, para todo $x \in [0,1]$, entonces $\displaystyle\int_0^1 E(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}$. Concluya que f no es Riemann integrable.

5. Dados dos funciones f y g integrables en $[p,q]$ y $a, b \in [p,q]$, demuestre que:

1) $\displaystyle\int_a^b \alpha = \alpha(b-a), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \forall c \in [p,q]$

3) $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

4) $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

5) $0 \leq f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [p,q] \implies \left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b g\right|$

6) $\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|$

6. Usando sumas de Riemann, calcule los siguientes límites

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{k+n}$.

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + 4k/n}}$.

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^3}$.

Guía de Problemas

P1. Considere la sucesión $a_n = \displaystyle\int_0^n q^x \, \mathrm{d}x$, con $0 < q < 1$.

(a) Explique por qué (a_n) está bien definida, es decir, por qué q^x es Riemann integrable en $[0, n]$, y muestre que es estrictamente creciente.

(b) Considere la partición $P = \{0, 1, ..., n\}$. Si e y E son las funciones escalonadas asociadas a P y definidas por

$$e_i(x) = q^{i-1} \qquad E_i(x) = q^i, \qquad \forall x \in (i-1, i),$$

Calcule $\displaystyle\int_0^n e(x) \, \mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_0^n E(x) \, \mathrm{d}x$.

(c) Utilice las integrales anteriores para obtener las siguientes cotas para (a_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x \, \mathrm{d}x < \frac{1}{1-q}.$$

(d) Concluya que (a_n) converge y que $a = \lim a_n$ satisface

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}.$$

P2. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y acotada inferiormente por una constante $c > 0$. Para demostrar que $\frac{1}{f}$ es integrable, se pide lo siguiente:

(a) Si $S(\cdot,\cdot)$ y $s(\cdot,\cdot)$ denotan las sumas superiores e inferiores, pruebe que para toda partición P del intervalo $[a, b]$ se cumple

$$S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) \leq \frac{1}{c^2}\left\{S(f, P) - s(f, P)\right\}.$$

(b) Use el resultado anterior para demostrar que la función $\frac{1}{f}$ es integrable en $[a, b]$.

P3. Sea $f\colon [1, \infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente

(a) Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{1=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x) \, \mathrm{d}x \leq \sum_{i=2}^{n} f(i), \quad \forall n \geq 2.$$

(b) Considere $f(x) = \ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!, \quad \forall n \geq 1.$$

Indicación: $\displaystyle\int_1^n \ln(x) \, \mathrm{d}x = n \ln n - (n+1).$

P4. Considere la función $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ como fracción irreducible} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$

(a) Calcule $s(f,P)$ y $S(f,P)$.

(b) Calcule $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}_{0,1}} S(f,P)$ y $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}_{0,1}} s(f,P)$.

(c) Concluya que f es integrable y que $\displaystyle\int_0^1 f = 0$.

P5. **(a)** Demuestre que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{1/4}}+\frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e^{(1/4)}}\right)$$

Indicación: Considere la partición $P=\{0,\frac{1}{2},1\}$.

(b) Demuestre que $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(b)-\ln(a)$, donde $0<a<b$.

Indicación: Considere la partición $x_i = aq^i$, $i=0,1,\ldots,n$.

Teorema Fundamental del Cálculo

9.1 Teorema Fundamental del Cálculo

Proposición 9.1. *Sea f una función integrable en $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, Entonces la función G definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a, b]$.

Demostración. Sea $x_0 \in [a, b]$. Probemos que G es continua en x_0. Para esto, probemos que

$$\lim_{h \to 0} G(x_0 + h) = G(x_0),$$

es decir, equivalentemente probemos que

$$\lim_{h \to 0} |G(x_0 + h) - G(x_0)| = 0.$$

Para probar esto último veamos primero que

$$\begin{aligned}
|G(x_0 + h) - G(x_0)| &= \left| \int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f| \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} M(|f|) \right| \\
&= M(|f|)|h|,
\end{aligned}$$

donde $M(|f|) = \sup \{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Con esto, si $h \to 0$, entonces $|G(x_0 + h) - G(x_0)| \to 0$. □

Teorema 9.2 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo). *Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces la función G definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

es derivable en $\operatorname{int}(I)$ y además $G' = f$ en $\operatorname{int}(I)$.

Demostración. Sea $x_0 \in \operatorname{int}(I)$. Para probar que G es derivable en x_0 debemos probar que el límite

$$G'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h}$$

existe y que vale $f(x_0)$. Veamos si esto es cierto. Primeramente, notemos que

$$G(x_0+h) - G(x_0) = \int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^{x_0+h} f$$

Consideremos primeramente el caso $h > 0$. Como f es continua en $[x_0, x_0+h]$, se tiene que existen x' y $x'' \in [x_0, x_0+h]$ tales que:

$$f(x') \leq f(x) \leq f(x''), \quad \forall x \in [x_0, x_0+h]$$

por lo tanto, integrando en $[x_0, x_0+h]$,

$$f(x')h \leq G(x_0+h) - G(x_0) \leq f(x'')h,$$

es decir,

$$f(x') \leq \frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} \leq f(x'').$$

Claramente, si $h \to 0^+$entonces $x' \to x_0$ y $x'' \to x_0$ y como f es continua, $f(x') \to f(x_0)$ y $f(x'') \to f(x_0)$ luego

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} = f(x_0). \tag{9.1}$$

En el caso en que $h < 0$, como f es continua en $[x_0+h, x_0]$, se sabe que $\exists x'$ y $x'' \in [x_0+h, x_0]$ tales que

$$f(x') \leq f(x) \leq f(x''), \quad \forall x \in [x_0+h, x_0]$$

por lo tanto, integrando en $[x_0+h, x_0]$,

$$f(x')(-h) \leq -\left[G(x_0+h) - G(x_0)\right] \leq f(x'')(-h),$$

es decir

$$f(x') \leq \frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} \leq f(x'').$$

Claramente, si $h \to 0^-$entonces $x' \to x_0$ y $x'' \to x_0$ y como f es continua, $f(x') \to f(x_0)$ y $f(x'') \to f(x_0)$ luego

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} = f(x_0). \tag{9.2}$$

Juntando (9.1) y (9.2) se obtiene el resultado pedido. □

Observación: Notemos que la expresión $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in \text{int}(I)$ más la continuidad de G en I (Probada en la Proposición 9.1) nos indican que $G(x) = \int_a^x f$ es una primitiva de la función f en I. Es decir, el primer teorema fundamental del cálculo nos garantiza que toda función continua en un intervalo posee primitivas. Este resultado lo conocíamos en el caso de funciones sencillas como x^2 o sen x ya que

$$\int x^2 = \frac{x^3}{3} + C, \text{ y}$$

$$\int \text{sen } x = -\cos x + C,$$

es decir éramos capaces de encontrar una primitiva por simple inspección. Sin embargo en el caso por ejemplo de e^{x^2} o $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, donde no éramos capaces de calcular la primitiva, nos hacíamos la pregunta de si tal primitiva existía o no. Este teorema nos dice que sí, es decir la primitiva de funciones continuas siempre existe independientemente de si somos o no capaces de calcularla por inspección.
En el caso en que la primitiva de una función continua se conozca a priori, este teorema permite también calcular las integrales. Este resultado aparece como el siguiente corolario.

Corolario 9.1 (del Primer Teorema del Cálculo). *Si la función F, continua en I, es una primitiva de f en I, entonces:*

$$\forall a, b \in I, \qquad \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demostración. Dados $a, b \in I$. Sea $G(x) = \displaystyle\int_a^x f$. En virtud del Primer Teorema Fundamental del Cálculo se sabe que $G' = f$ sobre I, luego existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = F(x) + C$. Pero como $G(a) = 0$ entonces esta constante vale $C = -F(a)$ y luego $G(x) = F(x) - F(a)$ por lo tanto $G(b) = \displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$. □

Ejemplo 9.1.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2$$

Ejemplo 9.2.

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1) \, \mathrm{d}x = \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 0 \right) = \frac{11}{6}$$

Notación: En los ejemplos aparece la expresión $F(b) - F(a)$. Para no escribir dos veces la función F (sobre todo cuando su expresión es larga) se acostumbra a anotar

$$F(x)\Big|_a^b \equiv F(b) - F(a).$$

Así, el Ejemplo 9.2 se escribe

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1) \, \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{11}{6}.$$

Teorema 9.3 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea f integrable en $[a, b]$. Si existe una función F continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $F' = f$ en (a, b), entonces:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

> **Observación:** El Segundo Teorema fundamental del cálculo es idéntico en contenido al corolario del Primer T.F.C., solo la hipótesis es más amplia, ya que solo pide que f sea integrable y no necesariamente continua.

Demostración. Sean f_- y f_+ funciones escalonadas arbitrarias en $[a, b]$, tales que

$$\forall x \in [a, b],\ f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x). \tag{9.3}$$

Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición común a f_- y f_+, de modo que

$$f_-(x) = f_i \quad f_+(x) = F_i, \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{9.4}$$

donde para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i y F_i son constantes.
En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la función $F(x)$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio, por lo que $\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Como: $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$, entonces $F'(\xi_i) = f(\xi_i)$, además combinando (9.3) y (9.4) se tiene que,

$$f_i \leq f(\xi_i) \leq F_i$$

Luego, multiplicando por Δx_i se tiene

$$f_i(x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq F_i(x_i - x_{i-1}),$$

o sea

$$f_i(x_i - x_{i-1}) \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq F_i(x_i - x_{i-1}).$$

Sumando desde $i = 1$ hasta $i = n$, se obtiene:

$$\int_a^b f_- \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^b f_+.$$

Esta última desigualdad es válida para cualquier par de funciones escalonadas en $[a, b]$ que satisfagan (9.3), luego, tomando supremo e ínfimo, respectivamente, se tiene que:

$$I_-(f) \leq F(b) - F(a) \leq I_+(f),$$

donde $I_-(f)$ e $I_+(f)$ denotan respectivamente a la integral inferior e integral superior de f en $[a, b]$, definidas en (7.4). Finalmente, como f es integrable en $[a, b]$, las integrales anteriores son iguales, por lo tanto resulta que:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

□

Fórmula de Integración por Partes

Recordamos que si f y g son dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) se tiene que:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Si además alguna de las funciones $f'g$ o fg' fuera integrable, la otra también lo sería y se tendría que

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg',$$

es decir,

$$fg\Big|_a^b = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'.$$

Con esto se ha demostrado el teorema siguiente

Teorema 9.4. *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo I y derivables en* $\operatorname{int}(I)$*. Sean $a, b \in \operatorname{int}(I)$. Si f' y g' son continuas entonces*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

Integración por Sustitución o Cambio de Variable

Teorema 9.5. *Sea g una función continua en un intervalo I y derivable en* $\operatorname{int}(I)$*, con g' continua. Sean $a, b \in \operatorname{int}(I)$, con $a < b$. Sea f una función continua en $g([a,b])$, entonces:*

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f$$

Demostración. Sea F una primitiva de f (la que existe por ser f continua), por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)) = F \circ g\Big|_a^b. \tag{9.5}$$

Además:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F \circ g) = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'.$$

Luego $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g) \cdot g'$, o sea

$$\int_a^b (f \circ g)g' = F \circ g\Big|_a^b.$$

Comparando esta fórmula con (9.5) resulta que:

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

□

Material Extra

9.2 Teoremas del Valor Medio y Taylor para integrales.

Teoremas del Valor Medio

DEFINICIÓN (VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN) Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Se llama valor medio de f en $[a,b]$ al número real:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

A este real se le anota $\bar{f}$ o bien $\langle f\rangle$.

Teorema 9.6 (Valor Medio para integrales). *Si f es continua en $[a,b]$, entonces $\exists \xi \in (a,b)$ tal que $f(\xi)=\langle f\rangle$, es decir:*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $G(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, entonces G es continua en $[a,b]$ y derivables en (a,b), luego por teorema del valor medio para derivadas se sabe que $\exists\xi\in(a,b)$ tal que

$$G(b)-G(a)=G'(\xi)(b-a),$$

es decir,

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

□

Teorema 9.7 (Valor Medio generalizado para integrales). *Si f es continua en $[a,b]$ y g es una función integrable en $[a,b]$ que no cambia de signo, entonces $\exists\xi\in[a,b]$ tal que*

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean

$$m=\operatorname{inf}\{f(x):x\in[a,b]\},\ \text{y}$$
$$M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}.$$

Claramente

$$m\le f(x)\le M,\quad \forall x\in[a,b],$$

entonces multiplicando por $|g|(x)$ se tiene que

$$m|g|(x)\le f(x)|g|(x)\le M|g|(x),\quad \forall x\in[a,b],$$

e integrando

$$m\int_a^b |g| \le \int_a^b f|g| \le M\int_a^b |g|.$$

Si $\displaystyle\int_a^b |g| = 0 \implies \int_a^b f|g| = 0 = f(\xi)\int_a^b |g|, \quad \forall\xi \in [a,b]$ y por lo tanto el teorema es cierto.

Si $\displaystyle\int_a^b |g| > 0 \implies m \le \frac{\int_a^b f|g|}{\int_a^b |g|} \le M$ y como f es continua en $[a,b]$ y $m = \text{mín}(f)$ y $M = \text{máx}(f)$, entonces por teorema del valor intermedio, $\exists\xi \in [a,b]$ tal que:

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f|g|}{\int_a^b |g|}$$

y por lo tanto

$$\int_a^b f|g| = f(\xi)\int_a^b |g|, \quad \text{algún } \xi \in [a,b]. \tag{9.6}$$

Como $g(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$ entonces $g = \lambda|g|$ ($\lambda = 1$ o -1 dependiendo del signo de g). Luego multiplicando (9.6) por λ se obtiene el resultado. □

Teorema de Taylor con Resto Integral

Sea I un intervalo abierto que contenga al intervalo cerrado de extremos x_0 y x. Consideremos una función f de clase $\mathcal{C}^{(n+1)}(I)$, entonces claramente

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(x_0),$$

es decir,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9.7}$$

Además, si integramos por partes la última expresión usando:

$$\begin{aligned} u &= f'(t) \qquad & \mathrm{d}u &= f''(t)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= \mathrm{d}t \qquad & v &= t - x \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t &= f'(t)(t-x)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Reemplazando esta integral en (9.7) el valor de $f(x)$ sería

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9.8}$$

Nótese que aquí se justifica plenamente el uso de la notación de Leibniz para integrales, ya que así se distingue la variable de integración t de la constante x.

Si integramos por partes nuevamente, del modo siguiente

$$u = f''(t) \qquad \mathrm{d}u = f'''(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}v = (x-t)\,\mathrm{d}t \qquad v = \frac{(x-t)^2}{2}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t &= \left.\frac{f''(t)(x-t)^2}{2}\right|_{x}^{x_0} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(Nótese que en la primera línea se ha escrito $-F(t)\big|_{x}^{x_0}$ en lugar de $F(t)\big|_{x_0}^{x}$. Este es un truco clásico a usar cuando la primitiva tiene un signo menos en su definición. Así se evitan los repetidos signos y las posibles fuentes de errores en los cálculos). Reemplazando esta integral en la fórmula (9.8) se obtiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Si continuamos integrando por partes se obtendrá la fórmula siguiente

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

La demostración se realiza por inducción, desarrollando por partes la última integral. El término:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

se denomina resto integral del desarrollo de Taylor.

Observación: Si en la expresión integral del resto se aplica el teorema del valor medio generalizando para integrales se tiene que:

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x}^{x_0}\\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!},\end{aligned}$$

que corresponde a la expresión de Lagrange para el resto del desarrollo de Taylor.

Guía de Ejercicios

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f es periódica de periodo p. Pruebe que $\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

2. Hacer una aseveración general relativa a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ para f una función impar y otra para f función par.

3. Demuestre que si f es una función continua en $[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b f(x) = 0$, entonces existe un c en $[a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

4. Halle $\displaystyle\int_a^b \left(\int_a^b f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ en términos de $\displaystyle\int_a^b f$ y $\displaystyle\int_a^b g$.

5. Halle $F'(x)$ si $F(x) = \displaystyle\int_0^x xf(t)\,\mathrm{d}t$.

6. Demuestre que si f es continua entonces $\displaystyle\int_0^x f(u)(x-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$.

7. Suponga que f es integrable en $[a,b]$. Demuestre que existe un número x en $[a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^x f = \int_x^b f$. Demuestre, con un ejemplo, que no siempre es posible elegir x que esté en (a,b).

8. Calcule las derivadas de las siguientes funciones.

$$f(x) = \int_1^{x^2} \operatorname{sen}(t^4)\,\mathrm{d}t \quad f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6}\,\mathrm{d}t \quad f(x) = \int_{x^3}^{\cos(x)} (x-t)\operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t$$

9. Sea f una función tal que $f(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. Muestre que $f''(x) = 2f(x)$.

Guía de Problemas

P1. Sea $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función biyectiva y derivable en $(0,\infty)$. Muestre que $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$, satisface que $g'(x) = f(x) + f'(x)x$. Concluya que $g(x) = xf(x)$.

P2. Considere la función $g(x)$ definida por $g(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}$, donde $\frac{\arctan(t)}{t}$ se define en cero por continuidad.

(a) Demuestre que: $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = g(1) - \int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$

(b) Utilizando lo anterior, muestre que : $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = g(1) - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

P3. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función biyectiva, derivable y tal que $g(0) = 0$. Sea $f\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$ una función derivable. Suponga que f y g satisfacen:

$$g(x) = \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(x))\,\mathrm{d}x + f(x).$$

(a) Pruebe que $f(x) = \tanh(g(x))$.

(b) Calcule la integral $\int_0^{x^3} (\tanh(t))^2\,\mathrm{d}t$.
Indicación: Observe que $f(g^{-1}(x)) = \tanh(x)$.

P4. Sea $f(x) := \int_1^x x\,\ln(tx)\,\mathrm{d}t$, definida en $(0,+\infty)$.

(a) Encuentre $\int \ln(t)$ y calcule $f(2)$.

(b) Demuestre que $f'(x) = (4x-1)\ln(x)$ para todo $x \in (0,+\infty)$.

P5. Asumiendo que la función $g(t) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))$ es continua en $[0,\tan(1)]$, encuentre la derivada de la función $f(x) = \int_0^{\tan(x)} \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))\,\mathrm{d}t$ para $x \in [0,1]$.

P6. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable, verificando que $f((a+b)-x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

(a) Pruebe que $\int_a^b xf(x) = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)$

(b) Sea ahora $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe que $\int_0^\pi xg(\operatorname{sen}(x)) = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi g(\operatorname{sen}(x))$.

(c) Deduzca que $\int_0^\pi \frac{x\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}$ y calcule el valor de la integral.

Aplicación de la Integral de Riemann

10.1 Cálculo de Areas

Sea f una función no negativa sobre $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, queremos definir el área de las regiones del tipo:

$$R = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}.$$

Recordamos que las condiciones básica de la definición de área son:

(i) $E \subseteq F \implies \text{área}(E) \leq \text{área}(F)$

(ii) Si $\text{área}(E \cap F) = 0$ entonces $\text{área}(E \cup F) = \text{área}(E) + \text{área}(F)$

(iii) Si E es una región rectangular de lados a y b entonces $\text{área}(E) = ab$.

Si designamos el área de la región R por $A_b^a(f)$, entonces las propiedades anteriores se traducen en que

(i) $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b] \implies A_a^b(f) \leq A_a^b(g)$

(ii) $A_a^b(f) = A_a^c(f) + A_c^b(f), \quad \forall c \in [a, b]$

(iii) $A_a^b(c) = c(b - a)$

Probaremos a continuación que si f es una función Riemann integrable, entonces la única definición posible de área de la región R es la dada por la Integral de Riemann. En efecto, sean f_- y f_+ funciones escalonadas arbitrarias en $[a, b]$, tales que

$$\forall x \in [a, b],\ 0 \leq f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x), \tag{10.1}$$

con una partición común $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, de modo que

$$f_-(x) = f_i \quad f_+(x) = F_i, \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{10.2}$$

donde para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i y F_i son constantes.
Por la propiedad **(i)** se tiene que

$$A_a^b(f_-) \leq A_a^b(f) \leq A_a^b(f_+). \tag{10.3}$$

Además por **(ii)** y **(iii)**, se tiene que

$$A_a^b(f_-) = \sum_{i=1}^{n} A_{x_{i-1}}^{x_i}(f_-) = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta x_i = \int_a^b f_-$$

y

$$A_a^b(f_+) = \sum_{i=1}^{n} A_{x_{i-1}}^{x_i}(f_+) = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta x_i = \int_a^b f_+.$$

Luego, reemplazando en (10.3) se tiene que

$$\int_a^b f_- \leq A_a^b(f) \leq \int_a^b f_+.$$

Como esta desigualdad es cierta para cualquier par de funciones escalonadas que acotan f, tomando supremo e ínfimo, respectivamente, se tiene que:

$$I_-(f) \leq A_a^b(f) \leq I_+(f),$$

donde $I_-(f)$ e $I_+(f)$ denotan respectivamente a la integral inferior e integral superior de f en $[a, b]$, definidas en (7.4). Por lo tanto si la función f es integrable entre a y b, para que el concepto de área satisfaga las propiedades **(i)**, **(ii)**, **(iii)**, la única definición posible es:

$$\text{área}(R) = A_a^b(f) = \int_a^b f$$

Área de regiones definida por funciones no positivas

Si f es una función definida en $[a, b]$ con valores negativos, entonces el área de la región R encerrada sobre su gráfico, y debajo del eje de las x se puede calcular fácilmente como el área bajo la curva $y = -f(x)$. Luego se tendrá que el área es

$$\text{área}(R) = \int_a^b (-f) = \int_a^b |f|.$$

En general si f es una función que cambia de signo en $[a, b]$ un número finito de veces y R es la región comprendida entre el gráfico de f (por sobre o bajo, según corresponda) y el eje OX, entonces el área de la región R se podrá calcular como

$$A_a^b(R) = \int_a^b |f|$$

Ejemplo 10.1.
Cálculo de área encerrada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ entre 0 y 2π.
Usando las fórmulas anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}
A_0^{2\pi}(\operatorname{sen} x) &= \int_a^{2\pi} |\operatorname{sen} x| \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \\
&= (-\cos x)|_0^{\pi} + (\cos x)_{\pi}^{2\pi} = (1 + 1) + (1 + 1) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Nótese que de usar solamente la fórmula $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$ en el cálculo del área se obtendría el resultado cero. Lo cual significa que la parte positiva y la negativa de la función encierran las mismas áreas (y por eso la anulación) pero no que el área buscada valga cero.

Ejemplo 10.2.
Calcule el área encerrada entre las curvas $y^2 = x$ e $y = \frac{1}{2}(x-3)$.
Estas dos curvas se cortan en la solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2y &=& x-3 \\ x &=& y^2 \end{array} \right.$$

Este sistema se resuelve fácilmente reemplazando la segunda ecuación en la primera, obteniéndose así la cuadrática

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

cuyas raíces son $y = -1$ e $y = 3$. Por lo tanto los puntos de intersección de la parábola y la recta son $P(1, -1)$ y $Q(9, 3)$.
El área encerrada por estas dos curvas es

$$A = \int_0^9 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

donde

$$f(x) = \sqrt{x}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-3) & \text{si } 1 \leq x \leq 9. \end{cases}$$

Es decir el área es

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]\,\mathrm{d}x + \int_1^9 \left\{ \sqrt{x} - \frac{1}{2}(x-3) \right\} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right) \mathrm{d}x \\
&= 2\,\frac{x^{3/2}}{3/2}\bigg|_0^1 + (\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x)\bigg|_1^9 \\
&= \frac{4}{3} + \left(\frac{27 \cdot 2}{3} - \frac{81}{4} + \frac{27}{2} \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) \\
&= \frac{4}{3} + \frac{1}{4}(72 - 81 + 54) - \frac{1}{12}(8 - 3 + 18) \\
&= \frac{4}{3} + \frac{45}{4} - \frac{23}{12} = \frac{1}{12}(16 + 135 - 23) = \frac{128}{12} \\
&= \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

Otra Forma:

No siempre es necesario integrar a lo largo del eje OX. En algunos casos, como este, puede ser conveniente integrar a lo largo del eje OY, de la siguiente forma

$$A = \int_{y_{min}}^{y_{max}} (x_2(y) - x_1(y))\,\mathrm{d}y$$

donde $x_2(y) = 2y + 3$ y $x_1(y) = y^2$
De este modo,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{3} (2y + 3 - y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= (y^2 + 3y - \frac{y^3}{3})\Big|_{-1}^{3} \\
&= (9 + 9 - 9) - (1 - 3 + \frac{1}{3}) \\
&= 9 + 2 - \frac{1}{3} = 11 - \frac{1}{3} \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 10.1:

1. Pruebe que el área de una elipse de semiejes a y b es πab.
2. Calcule el área de un sector circular de radio R y ángulo interno α (R. $A = \frac{R^2\alpha}{2}$).
3. Concluya que para una circunferencia, $A = \pi R^2$.

10.2 Volúmenes de Sólidos

Consideremos un sólido en el espacio. Nos interesa calcular el volumen V de dicho sólido.
Para esto se traza un eje en el espacio, en una dirección conveniente, de modo que para cada posición x en dicho eje, se conozca el valor del área de la sección perpendicular del sólido a dicho eje. Denotemos por OX a este eje y por $A(x)$ al área de la sección perpendicular al eje $0X$ del sólido. Supongamos que el sólido se encuentra comprendido entre los planos $x = a$ y $x = b$.
Aceptemos que el concepto de volumen satisface las condiciones siguientes (análogas a las del área).

(i) $A \subseteq B \implies V(A) \leq V(B)$

(ii) $V(A \cap B) = 0 \implies V(A \cup B) = V(A) + V(B)$

(iii) Si A es un cilindro recto de base B y altura h, entonces $V(A) = B \cdot h$

En la última propiedad entendemos por cilindro a todo conjunto en el espacio cuya base es un conjunto plano (no necesariamente un círculo). Incluso es posible agregar conjuntos donde la sección transversal a una dirección dada es constante.
Usando esta propiedad deducimos que si $A(x) = Cte$, el volumen que buscamos es el de un cilindro, que vale $V(A) = Cte \cdot (b-a)$. Además, si A fuese una función escalonada, el sólido sería una unión de cilindros y su volumen sería $V(A) = \int_a^b A$.
Probaremos que si la función $A(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces el volumen del sólido es $\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$.
Sean A_- y A_+ funciones escalonadas arbitrarias en $[a,b]$, tales que

$$\forall x \in [a,b],\ A_-(x) \le A(x) \le A_+(x). \tag{10.4}$$

Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición común a A_- y A_+, de modo que

$$A_-(x) = a_i \quad A_+(x) = A_i, \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{10.5}$$

donde para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a_i y A_i son constantes.
Las funciones A_- y A_+ generan sólidos que son uniones de cilindros, que van por dentro y por fuera del sólido en estudio. Por lo tanto,

$$\int_a^b A_- \le V(C) \le \int_a^b A_+.$$

Luego, tomando supremo e ínfimo, respectivamente, se deduce que:

$$I_-(A) \le V(C) \le I_+(A),$$

donde $I_-(A)$ e $I_+(A)$ denotan respectivamente a la integral inferior e integral superior de A en $[a,b]$, definidas en (7.4). Por lo tanto si $A(x)$ es una función integrable, resulta que:

$$V(C) = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 10.3.
Calcule el volumen de un elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$$

Aquí conviene usar como eje apropiado al propio eje OX. De este modo, dado un punto x_0, la intersección del elipsoide con el plano $x = x_0$ son los pares ordenados $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$$

Esta ecuación posee solución no vacía sólo si $|x_0| \le a$, es decir, el sólido se encuentra comprendido entre los planos $x = -a$ y $x = a$. En el caso en que $x_0 \in (-a, a)$ se puede escribir

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2, \text{ es decir,}$$
$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-(\frac{x_0}{a})^2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-(\frac{x_0}{a})^2}\right)^2} \le 1.$$

Esto indica que la región transversal es una elipse de semiejes $b\sqrt{1-(\frac{x_0}{a})^2}$ y $c\sqrt{1-(\frac{x_0}{a})^2}$ por lo tanto su área transversal vale

$$A(x_0) = \pi bc(1 - \frac{x_0^2}{a^2}).$$

Claramente para $x_0 = \pm a$ la sección transversal es sólo un punto, cuya área es nula. Luego la fórmula anterior es valida para todo $|x_0| \leq a$. Con esto el cálculo del volumen del elipsoide se obtiene integrando del modo siguiente

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-a}^{a} A(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\frac{\pi bc}{a^2}\,(a^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^a \\
&= \frac{2\pi bc}{a^2}(a^3 - \frac{a^3}{3}) \\
&= \frac{4}{3}\pi abc.
\end{aligned}$$

Claramente en el caso particular de una esfera ($a = b = c = R$) se obtiene la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

10.3 Calcule de un sólido de revolución

Un sólido de revolución es la figura geométrica que se obtiene por la rotación de un área plana en torno a un eje fijo. Dos casos particulares se destacan y corresponden a los siguientes:

1. Rotación de la región: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b;\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ en torno al eje $0X$. Este caso corresponde a un caso particular de los sólidos donde se conoce el área transversal a una dirección dada. En efecto las secciones transversales al eje de rotación son círculos de radio $f(x)$. Por esta razón, su volumen se calcula como

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

2. Rotación de la misma región en torno al eje OY (bajo el supuesto que $0 < a < b$). En este caso no es difícil probar que el volumen de dicho sólido se puede calcular mediante la integral

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 10.4.
Calcule el volumen del sólido generado por la rotación en torno al eje OY de la región limitada por las curvas $y = (x-2)^2$, $y = 0$ y $x = 5$.
Mostraremos dos soluciones para este problema.

Solución (Método de la cáscara).
Como se trata de una región obtenida por rotación en torno a eje OY, podemos usar la fórmula

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$$

con $a = 2$, $b = 5$. De este modo tenemos que:

$$V = 2\pi \int_2^5 (x-2)^2 x\,\mathrm{d}x$$

Para el cálculo una posibilidad es desarrollar el cuadrado e integrar. Otra, la usada aquí, es hacer un cambio de variable de modo que el cuadrado quede sobre un monomio y no un binomio (esta técnica se adapta bien cuando el exponente sobre el binomio es grande). Es decir pongamos $u = x - 2$ con lo cual $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ y la integral queda

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^3 u^2(u+2)\,\mathrm{d}u \\
&= 2\pi \int_0^3 (u^3 + 2u^2)\,\mathrm{d}u \\
&= 2\pi \left(\frac{u^4}{4} + \frac{2u^3}{3})\right|_0^3 \\
&= 2\pi \cdot 27(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}) = \frac{2\cdot 27}{12}(9+8)\pi \\
&= \frac{27}{6}\cdot 17\pi = \frac{9\cdot 17}{2}\pi = \frac{153}{2}\pi.
\end{aligned}$$

□

Solución (Método del disco).
Intercambiando los roles de x e y, este sólido se puede interpretar como una rotación en torno al eje de integración de una región comprendida entre dos funciones. De este modo la fórmula

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

puede ser reescrita en forma apropiada al problema como

$$V = \int_0^9 A(y)\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^9 (5^2 - f^2(y))\,\mathrm{d}y$$

donde $f(y) = 2 + \sqrt{y}$. Usando este método el volumen queda

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^9 (25 - (4 + 4\sqrt{y} + y))\,\mathrm{d}y \\
&= \pi \left(21y - 4\frac{y^{3/2}}{3/2} - \frac{y^2}{2})\right|_0^9 \\
&= \pi 9(21 - \frac{8}{3}\cdot 3 - \frac{9}{2}) \\
&= \frac{9\pi}{2}(26-9) = 17\cdot 9\frac{\pi}{2} = \frac{153}{2}\pi.
\end{aligned}$$

□

Notemos primeramente que ambos resultados coinciden (como tiene que ser).
Los nombres usados de la cáscara y el disco provienen de la interpretación geométrica de las dos integrales calculadas. Recordando que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

cada vez que se integre una función f se puede buscar la interpretación de $f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ y así tal vez recordar mejor las numerosas fórmulas de integración que hemos ido obteniendo. En el primer caso

$$V = 2\pi \int_2^5 (x-2)^2 x\,\mathrm{d}x$$

la expresión $2\pi x f(x)\Delta x$ se puede interpretar como el volumen de una pequeña cáscara de base un anillo de radio x y espesor Δx, es decir área basal $2\pi x\Delta x$ y altura $f(x)$.
En el segundo caso donde la integral era

$$V = \pi \int_0^9 (5^2 - f^2(y))\,\mathrm{d}y$$

la expresión $\pi(5^2 - f^2(y))\Delta y$ se puede interpretar como el volumen de un disco perforado de espesor Δy cuya base esta comprendida entre los círculos de radio $f(y)$ y 5. Por esta razón el área basal es $\pi 5^2 - \pi f^2(y)$ es decir el área del circulo externo menos el área del circulo interno.

Guía de Ejercicios

1. **(a)** Pruebe que el área de una elipse de semiejes a y b es πab.

(b) Calcule el área de un sector circular de radio R y ángulo interno α.
Respuesta: $A = \frac{R^2\alpha}{2}$.

(c) Concluya que para una circunferencia, $A = \pi R^2$.

2. Calcule el volumen de un toro de revolución, es decir el sólido obtenido por la rotación del círculo de radio r centrado en $(R, 0)$ (donde $R > r$) en torno al eje OY.

3. Halle el área de la región encerrada entre las parábolas $y = \frac{x^2}{3}$ e $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

4. Determine el área del manto del sólido engendrado al rotar, en torno al eje OY, el trozo de la curva $y = \frac{x^2}{2}$, comprendido entre 0 y 1.

5. Halle el volumen del cuerpo formado por la rotación en torno de la recta $y = -1$, de la región acotada por $y = 4 - x^2$ e $y = 3$.

Guía de Problemas

P1. Considere la curva cuyos puntos (x, y) satisfacen $(1 + x^2)y^2 = x^2(1 - x^2)$.

(a) Calcule el área de la región encerrada por esta curva.

(b) Calcule el volumen de revolución generado por la rotación de esta curva en torno al eje OX.

P2. Sea $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$. Si

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

(a) Encuentre el área de la región R.

(b) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región R en torno al eje OX.

P3. Dada la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

encuentre el área del manto generado al rotar esta elipse en torno al eje OX entre $x = -1$ y $x = 1$.

P4. Sean $f, g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{3} - \sqrt{1 - x^2}$.

(a) Calcule el área encerrada entre ambas curvas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

(b) Determine el volumen del sólido generado por la rotación de la región encerrada por el eje OX y la curva $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, en torno a OX.

P5. **(a)** La parábola $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$ corta el eje Y en $P_0(0, 1)$. Considere sobre la parábola el punto $P(a, f(a))$, $a \geq 0$. Demuestre que el área comprendida entre la parábola y el segmento P_0P es igual a $A = a^3$.

(b) Dadas las curvas $y = mx$ y $y = x^2$, considere la región limitada por ambas curvas y encuentre el valor de $m > 0$, para que los volúmenes de los sólidos obtenidos al rotar la región definida en torno al eje OX y al eje OY, sean iguales.

Aplicaciones de la Integral (2)

11.1 Longitud de un Arco de Curva (Rectificación)

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva en el plano OXY, donde $x \in [a, b]$. Nos interesa obtener una expresión para el largo de esta curva.

Para calcular este largo, consideremos una partición $Q = \{x_0 \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$. En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se aproxima la curva por el segmento recto que une los puntos $P_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $P_i = (x_i, f(x_i))$.

A falta de una definición del concepto de longitud de una curva cualquiera, diremos que el largo buscado es el límite del largo del polígono así construido cuando la norma de la partición tiende a cero. Es decir

$$L_a^b(f) = \lim_{|Q| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}.$$

Llamemos ΔL_i al largo del trazo $\overline{P_{i-1}P_i}$. Es claro que:

$$\Delta L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1})^2}$$

Si suponemos que f es derivable, entonces:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Por lo tanto:

$$\Delta L_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}(x_i - x_{i-1})$$

con lo cual el largo buscado sería

$$L_a^b(f) = \lim_{|Q| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i.$$

Este último límite es bien conocido si la función $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ es continua y vale

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x.$$

En consecuencia, diremos que esta última fórmula define el concepto de longitud de curva cuando f es una función continuamente derivable en un intervalo $[a, b]$. Incluso usaremos esta fórmula en el caso de funciones continuamente derivables por pedazos.

11.2 Superficie del Manto de un Sólido de Revolución

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva en el plano OXY, donde f es continuamente derivable en $[a, b]$. Nos interesa obtener una expresión para calcular el área del manto del sólido generado por la rotación de la región bajo la curva $y = f(x)$, en torno al eje $0X$.
Sea $Q = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, la rotación del trazo recto que une los puntos $P_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $P_i = (x_i, f(x_i))$ genera el manto de un tronco de cono cuya área es

$$\Delta A_i = 2\pi f(\bar{x}_i)\Delta L_i$$

donde $\bar{x}_i$ es algún punto de $[x_{i-1}, x_i]$. Al igual que en el caso de la longitud de curva, diremos que el área del manto buscada es igual al límite cuando la norma de la partición tiende a cero de la suma de estas áreas cónicas. Es decir,

$$\begin{aligned} A_a^b(f) &= \lim_{|Q|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \\ &= \lim_{|Q|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\bar{x}_i)(\Delta L)_i \\ &= \lim_{|Q|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\bar{x}_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i. \end{aligned}$$

El límite de la última suma no es el clásico limite de una suma de Riemann del tipo

$$\sum f(\eta_i)\Delta x_i$$

ya que en nuestro caso hay dos funciones evaluadas en puntos distintos. Por este motivo conviene separar la suma en dos, usando el viejo “ni quita ni pone” del modo siguiente.

$$\begin{aligned} A_a^b(f) = \lim_{|Q|\to 0} &\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i \\ + \lim_{|Q|\to 0} &\sum_{i=1}^{n} 2\pi \left(f(\bar{x}_i) - f(\xi_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i. \end{aligned}$$

Claramente la primera suma es del tipo Suma de Riemann y por lo tanto converge a

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

la segunda suma se puede acotar superiormente en módulo, usando el teorema del valor medio, por

$$|Q| 2\pi \left\{ \sup_{x\in[a,b]} f'(x) \right\} \left\{ \sup_{x\in[a,b]} \sqrt{1 + f'^2(x)} \right\} (b - a)$$

y por lo tanto converge a cero.
Con esto entonces tenemos que

$$A_a^b(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

11.3 Coordenadas Polares

DEFINICIÓN Dado los reales r y ϕ, se determina el punto P del plano de coordenadas (x, y) mediante las fórmulas

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\operatorname{sen}\phi.$$

El par (r, ϕ) corresponde a las coordenadas polares del punto P.

Observación: Un mismo punto P tiene más de un par de coordenadas polares, por ejemplo:

$$r = 1,\ \phi = 0 \implies P(x = 1, y = 0)$$

Pero también

$$r = -1,\ \phi = \pi \implies P(x = 1, y = 0).$$

Una forma de resolver este "problema" es restringir el rango de valores aceptados para r y ϕ. Por ejemplo $r \geq 0$ y $\phi \in [0, 2\pi)$. Pero incluso así el problema queda en $r = 0$ donde ϕ puede ser cualquiera. Se podría poner $r > 0$ pero el origen no tendría coordenada polar, etc, etc. En ingeniería conviene dejar esta ambigüedad de indeterminación a las coordenadas polares ya que típicamente se buscan puntos del plano para coordenadas polares dadas. Si el problema fuera el recíproco, muchas veces se pueden dar o bien todas las coordenadas polares de un punto, o bien alguna de ellas.

Una aplicación interesante de las coordenadas polares es estudiar conjuntos del plano definidos mediante alguna relación entre las variables r y ϕ. Muchas de estas relaciones definen curvas o regiones del plano con geometrías particulares. Veamos algunas de las curvas mas clásicas:

1. La relación $r = \text{cte}$ define una circunferencia con centro en 0

2. La relación $\phi = \text{cte}$ define una recta que pasa por el origen de pendiente $\tan\phi$.

3. $r = a(1 + \varepsilon\operatorname{sen}\phi)$ con ε pequeño define una curva cercana a una circunferencia de radio a.

   En efecto cuando $\phi = 0$ la distancia del punto $P = (r\cos\phi, r\operatorname{sen}\phi)$ al origen es a. Cuando ϕ varía de 0 a $\pi/2$ dicha distancia aumenta hasta $a + \varepsilon$. De ahí la distancia decrece hasta $a - \varepsilon$ (si ϕ varía de $\pi/2$ a $3\pi/2$) y posteriormente crece hasta a en $\phi = 2\pi$. Este comportamiento se repite periódicamente si $\phi \in \mathbb{R}$. La curva así obtenida se conoce con el nombre de cardioide. Es interesante notar que el gráfico de la cardioide se puede realizar aunque ε no sea pequeño. Por ejemplo si $\varepsilon = a$ en la dirección definida por $\phi = 3\pi/2$ se obtiene $r = 0$ y por lo tanto la cardioide pasa por el origen. Si además $\varepsilon > a$ existen valores de r negativos.

Ejercicio 11.1: Tratar de graficar la cardioide de ecuación $r = 1 + 2\operatorname{sen}\phi$.

Área en Coordenadas Polares

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Usando esta función se define la curva en coordenadas polares cuya ecuación es $r = f(\phi)$.
Supongamos además que la función f es no negativa y que $b - a \leq 2\pi$. Con estos supuestos se desea encontrar el área de la región R definida por

$$R = \{(r\cos\phi, r\operatorname{sen}\phi) : \phi \in [a,b], r \in [0, f(\phi)]\}. \text{ (Vea la Figura 8)}$$

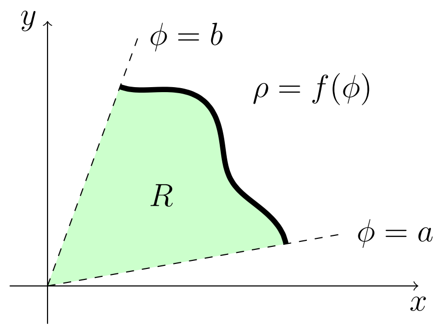


Figura 8: Región en coordenadas polares.

Si f fuese una función escalonada, asociada a la partición $P = \{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ del intervalo $[a,b]$, la Región R sería la unión de sectores circulares (Vea la Figura 9) y por lo tanto su área se podría calcular con la fórmula

$$\text{área}(R) = \sum_{i=1}^{n} \text{área}(R_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f_i^2 \Delta\phi_i = \int_a^b \frac{f^2}{2}. \tag{11.1}$$

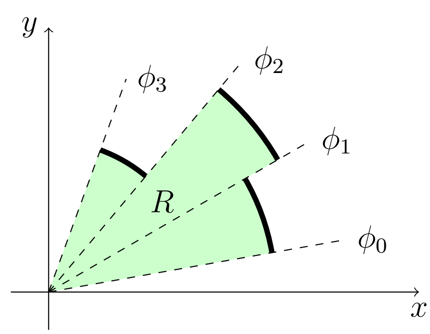


Figura 9: Región en coordenadas polares para f escalonada.

Supongamos ahora que $f \geq 0$ es una función Rieman integrable. Sabemos que en ese caso, la función auxiliar $g(x) = f^2(x)/2$ también lo es. Si e_-, e_+ son funciones escalonadas arbitrarias que acotan a g, que están asociadas a una partición $P = \{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ del intervalo $[a,b]$, de modo que

$$e_-(x) = e_i \quad e_+(x) = E_i, \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{11.2}$$

donde para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i y E_i son constantes que satisfacen

$$0 \leq e_i \leq g(x) = f^2(x)/2 \leq E_i, \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), \tag{11.3}$$

Claramente se tiene que

$$0 \leq \sqrt{2e_i} \leq f(x) \leq \sqrt{2E_i}, \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{11.4}$$

es decir, la región R está acotada inferior y superiormente por regiones $\underline{R}$ y $\overline{R}$ definidas por las funciones escalonadas $\sqrt{2e_-}$ y $\sqrt{2e_+}$ respectivamente. Por lo tanto

$$\text{área}(\underline{R}) \leq \text{área}(R) \leq \text{área}(\overline{R}),$$

pero como $\underline{R}$ y $\overline{R}$ son regiones definidas por funciones escalonadas, se cumple la relación (11.1), de donde se obtiene que

$$\int_a^b e_- \leq \text{área}(R) \leq \int_a^b e_+$$

Esta última desigualdad es válida para cualquier par de funciones escalonadas en $[a, b]$ que satisfagan (11.3), luego, tomando supremo e ínfimo, respectivamente, se tiene que:

$$I_-(g) \leq \text{área}(R) \leq I_+(g),$$

donde $I_-(g)$ e $I_+(g)$ denotan respectivamente a la integral inferior e integral superior de g en $[a, b]$, definidas en (7.4). Finalmente, como g es integrable en $[a, b]$, las integrales anteriores son iguales, por lo tanto resulta que:

$$\text{área}(R) = \int_a^b g = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\phi)d\phi.$$

Material Extra

11.4 Centro de Gravedad de una Superficie Plana

Introducción

Considérese un plano ideal, sin peso, en el cual se encuentran localizadas n partículas puntuales P_i de masas $m_i, \quad i = 1, \ldots, n$.

Si este plano se apoya sobre un eje recto horizontal, nos interesa estudiar la tendencia del plano a rotar en torno a dicho eje accionado por el peso de las partículas.

Considerando un sistema ortogonal de ejes OXY en el plano, y la recta paralela al eje OY de ecuación $L : x = x_0$, la tendencia a rotar del plano en torno de L se mide matemáticamente por el "Momento Estático" que produce el peso de las partículas en torno de L, que, para una partícula aislada, resulta ser igual al producto del peso por la distancia al eje de rotación. Es decir, el momento estático de la partícula i con respecto a la recta L es:

$$M_L(x_i) = (x_i - x_0) \cdot m_i g.$$

Para el sistema de n partículas, el momento estático total es igual a la suma de los $M_L(x_i)$, o sea:

$$M_L = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)m_i g.$$

El sistema de partículas estará en equilibrio cuando su momento estático total sea nulo, es decir, cuando:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)m_i g = 0.$$

De esta ecuación se despeja fácilmente la posición de la recta en torno a la cual no hay tendencia a la rotación. Su ecuación sería

$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}.$$

Análogamente si se considera ahora la tendencia del plano a rotar en torno a un eje paralelo a $0X$, se llega a la expresión:

$$y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$

El punto de coordenadas (x_0, y_0) se llama centro de gravedad del sistema. Teóricamente, el plano queda en equilibrio sustentado de ese punto únicamente.
Las ecuaciones anteriores se pueden escribir también así:

$$\text{(Coordenada del C.G)} \times \text{(Masa Total)} = \text{Momento Estático}.$$

Momento Estático y Centro de Gravedad de un Área Plana

El concepto de momento y de centro de gravedad se extiende fácilmente al caso en que la masa total del sistema se encuentra uniformemente distribuida sobre una región plana. Para esto debe tenerse presente que:

1. Si una región plana tiene un eje de simetría, su centro de gravedad debe estar sobre él. Es el caso, por ejemplo, de un cuadrado, un rectángulo, de un circulo, etc.

2. La masa de cualquier región de área A es $\rho \cdot A$, donde ρ es la densidad y la suponemos contante.-

Sea R la región encerrada bajo el gráfico de una función no negativa e integrable. Es decir

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)]\right\}.$$

Calculemos los momentos estáticos M_{OX} y M_{OY} con respecto a los ejes OX y OY respectivamente. Para ello consideremos una partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ con $|P| \to 0$. En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se tiene una región "Casi Rectangular" de ancho Δx_i y altura $f(\xi_i)$ con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ cuyo centro de gravedad es el punto

$$\begin{aligned} X_{G,i} &= x_i + \Delta x_i/2 \\ Y_{G,i} &= f(\xi_i)/2 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \Delta M_{0X} &= \rho f(\xi_i)\Delta x_I \cdot \frac{f(\xi_i)}{2} \\ \Delta M_{0Y} &= \rho f(\xi_i)\Delta x_I \cdot (x_i + \Delta x_i/2) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$
\begin{aligned}
M_{0X} &= \frac{\rho}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \\
M_{0Y} &= \rho\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Claramente la masa total del sistema es

$$
m = \rho\,\text{área}(R)
$$

Para el cálculo de las coordenadas del centro de gravedad (X_G, Y_G) usamos las reglas

$$
\begin{aligned}
M_{OX} &= Y_G \cdot m \\
M_{OY} &= X_G \cdot m
\end{aligned}
$$

de donde se deduce que

$$
\begin{aligned}
X_G &= \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \\
Y_G &= \frac{\displaystyle\int_a^b f^2(x)/2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 11.1.
Determine el centro de gravedad del área encerrada bajo la función $\operatorname{sen}(x)$ entre 0 y $\pi/2$.

Solución.
Podemos escribir que

(i) $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = (\cos x)\Big|_{\pi/2}^{0} = 1$

(ii) $M_{0X} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$

(iii) $M_{0Y} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = x \cos x\Big|_{\pi/2}^{0} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} = 1$

En consecuencia se tiene que

$$X_G = \frac{M_{0Y}}{A} = 1$$
$$Y_G = \frac{M_{0X}}{A} = \frac{\pi}{8}.$$

Por lo tanto el centro de gravedad tiene coordenadas $C.G = (1, \pi/8)$. $\square$

Guía de Ejercicios

1. Grafique el cardioide de ecuación $r = 1 + 2\operatorname{sen}\phi$.

2. **(a)** Calcule la longitud total de la curva $y = \frac{2}{3}(x^{3/2}) - 1/2(x^{1/2})$ entre $x = 1$ y $x = 4$.

(b) Determine el volumen de un cono de revolución de altura a cuya base es de radio b.

3. **(a)** Calcule la longitud de la curva $\rho = a(1 - \operatorname{sen}(\theta))$.

(b) Calcule el área de la región comprendida entre la curva dada en la parte anterior y $\rho = a$.

4. Calcule el largo de la curva $c(t) = \begin{cases} e^{-bt} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{a(t-1)-b} & \text{si } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$

5. Dada la curva $(\frac{x}{a})^{2/3} + (\frac{y}{b})^{2/3} = 1$, calcular su longitud de arco en el primer cuadrante.

6. Determine el centro de masa de la región encerrada entre las curvas $x^2+y^2 = a^2$ y $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a}$. Suponga densidad constante.

Guía de Problemas

P1. Sea $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2 + 2x - f(x)$.

(a) Determine f.

(b) Calcule el área bajo la curva $y = f(x)$ y su longitud entre $x = 0$ y $x = 1$.

P2. Considere la espiral de ecuación paramétrica $x(t) = e^{2t}\cos(t)$, $y(t) = e^{2t}\operatorname{sen}(t)$.

(a) Encuentre el largo L, de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 hasta 2π.

(b) Encuentre t_0 tal que, la longitud de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 a t_0 sea igual a la mitad del largo L, obtenido en la parte anterior.

P3. Considere la curva C definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$. Demuestre que la longitud de arco de la curva C en el primer cuadrante esta dada por:

$$S = a^{1/3}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/3}}.$$

P4. Pruebe que el largo de la elipse de ecuación $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$ es igual al largo de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, entre 0 y 2π.

Integrales Impropias

12.1 Introducción

En la definición de la integral de Riemann se impusieron dos condiciones fundamentales que son:

1. Se define en el intervalo cerrado y acotado $[a, b], a < b$
2. Se define para funciones acotadas en $[a, b]$

El propósito de esta sección, es extender la noción de integral al caso de intervalo no acotados, y al caso de funciones no acotadas sobre un intervalo acotado. Estas dos extensiones dan origen a las llamadas integrales impropias de primera y segunda especie respectivamente. Partamos por la definición del primer tipo de éstas:

Definición (Integral Impropia de Primera Especie (Intervalo no Acotado))
Sea $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a, +\infty)$ si se cumple que:

(i) $\forall x \in (a, +\infty)$, f es integrable en $[a, x]$ y además

(ii) Existe el límite definido por

$$\lim_{x \to {}^{+}\infty} \int_a^x f.$$

Notación: Si una función es integrable en el intervalo $[a, \infty)$, entonces al valor del límite se le llama integral impropia de primera especie de f y se le denota

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \to \infty} \int_a^x f.$$

Observación:

1. Si el límite $\lim\limits_{x \to \infty} \int_a^x f$ existe, se dice que la integral impropia es convergente y si no existe se dice que la integral impropia es divergente.
2. De una manera análoga se definen las integrales de 1° especie siguiente

   i) $\displaystyle \int_{-\infty}^{b} f = \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{\infty} f$ donde la constante $c \in \mathbb{R}$ puede ser cualquiera. En esta última definición es importante que las dos integrables de la derecha existan o que sean convergente. Si alguna de estas integrales no converge entonces la integral de la izquierda tampoco .

Ejemplo 12.1.
Dado $a > 0$, estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
Claramente $f(x) = \frac{1}{x}$ es integrable en $[a, b]$ para cualquier $b > a$. Veamos el límite

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{x\to\infty} \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{x\to\infty} [\ln(\frac{x}{a})].$$

Este límite lo existe. Por lo tanto, se trata de una integral divergente.

Ejemplo 12.2.
Dado $a > 0$ y $\alpha \neq 1$, estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$.
Nuevamente basta con estudiar el límite:

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} &= \lim_{x\to\infty} \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \left.\frac{1}{(1-\alpha)} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right|_a^x \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right).\end{aligned}$$

Este límite es igual a $\frac{1}{(1-\alpha)} \frac{-1}{a^{\alpha-1}}$ cuando $\alpha > 1$, y no existe si $\alpha < 1$. Por lo tanto, esta integral impropia es convergente cuando $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha < 1$.
Juntando estos dos ejemplos podemos resumir diciendo que

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \quad \text{es} \quad \begin{cases} \text{convergente} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{divergente} & \text{si } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Definición (Integral Impropia de Segunda Especie (Funciones no Acotadas))
Sea $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ una función no acotada, diremos que f es integrable en $[a, b)$ si y solo si:

(i) $\forall x \in (a, b) f$ es integrable en $[a, x]$

(ii) El límite $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ existe.

Observación:

1) Cuando el límite $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f$ existe, se dice que la integral impropia converge, y cuando no existe se dice que la integral impropia diverge.

2) Se anota

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f = \int_a^{-b} f.$$

3) La primera condición de integrabilidad de este tipo de funciones exige, entre otras cosas, que la función f debe ser acotada en todo intervalo (a, x), es decir, este tipo de funciones se caracterizan por tener una asíntota vertical en $x = b$.

4) En forma análoga se definen las integrales impropias siguiente:

(i) $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f$

(ii) $\displaystyle\int_{a^+}^{b^-} f = \int_{a^+}^{c} f + \int_c^{b^-} f, \quad c \in (a, b)$

En esta última definición la integral entre a^+ y b^- converge si y solo si las dos integrales de la derecha convergen por separado.

Ejemplo 12.3.
Estudie la convergencia de la integral impropia $\int_a^{b^-} \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ para diversos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.
Caso $\alpha = 1$. En este caso se tiene:

$$\begin{aligned}\int_a^{b^-} \frac{\mathrm{d}x}{b-x} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{b-x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \{\ln(b-a) - \ln \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Este límite no existe, por lo que, en este caso, la integral impropia es divergente.
Caso $\alpha \neq 1$. En este caso los cálculos son

$$\begin{aligned}\int_a^{b^-} \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(\alpha-1)(b-x)^{\alpha-1}}\Bigg|_a^{b-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(\alpha-1)} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right)\end{aligned}$$

Este límite es igual a $\frac{1}{(1-\alpha)} \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}$ si $\alpha < 1$, y no existe si $\alpha > 1$.
Juntando estos dos ejemplos podemos resumir diciendo que

$$\int_a^{b^-} \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} \quad \text{es} \quad \begin{cases} \text{convergente} & \text{si } \alpha < 1 \\ \text{divergente} & \text{si } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Definición (Integral Impropia de Tercera Especie o Mixta) Se obtienen combinando integrales impropias de 1° y 2° especie. Por ejemplo

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^{0^-} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{0^+}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Este tipo de integral será convergente si y solo si cada una de sus componentes es una integral convergente.

12.2 Algunos criterios de convergencia para integrales impropias

Nos dedicaremos primeramente a establecer algunos criterios de convergencia para integrales impropias de funciones no negativas.

Observación:

1. Si F es una función creciente en $[a, +\infty)$, entonces, cuando $x \to +\infty, F(x) \to L \in \mathbb{R}$ o bien $F(x) \to +\infty$.
2. Si F es una función creciente en $[a, b)$, entonces cuando $x \to b^-; F(x) \to L \in \mathbb{R}$ o bien $F(x) \to +\infty$.

   Lo anterior surge del hecho de que F puede ser acotada, o no, en los intervalos considerados.

Teorema 12.1 (Criterio de Comparación). *Sean f y g funciones continuas en $[a, +\infty)$ tales que:*

$$(\exists b \geq a)(\forall x \geq b)\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

entonces:
Si $\int_a^{+\infty} g$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f$ converge .
Recíprocamente si $\int_a^{+\infty} f$ diverge $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g$ diverge

Demostración. Como las funciones f y g son continuas, entonces son integrables en $[a, x]$ para todo $x > a$. Además $\int_a^x f = \int_a^b f + \int_b^x$, (lo mismo para g) por lo tanto es claro que

$$\int_a^\infty f \text{ converge si y solo si } \int_b^\infty f \text{ converge y } \int_a^\infty g \text{ converge si y solo si } \int_b^\infty g \text{ converge.}$$

Luego, para demostrar el teorema basta con estudiar las integrales impropias en $[b, +\infty)$.

Sean: $F(x) = \displaystyle\int_b^x f$ y $G(x) = \displaystyle\int_b^x g$. Entonces, como se sabe que $(\forall t \in [b, x])$ se tiene $0 \leq f(t) \leq g(t)$ entonces integrando de b a x se obtiene que

$$F(x) \leq G(x), \quad \forall x \in [b, +\infty).$$

Como además las funciones F y G son crecientes, el resultado del teorema se obtiene directamente de la observación anterior. En efecto, si $\int_b^{+\infty} g$ converge entonces $G(x)$ es acotada, y entonces también $F(x)$ lo es con lo cual existe $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ o sea, la integral impropia $\int_b^{+\infty} f$ es convergente.□

Observación: Para integrales impropias del tipo $\displaystyle\int_a^{b^-}$ el enunciado del teorema es análogo y tiene la misma demostración. Se propone como ejercicio, enunciar dicho teorema y demostrarlo.

Ejemplo 12.4.
Estudie la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
Claramente se tiene que

$$0 \leq \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \geq 1.$$

Luego como la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ es conocidamente convergente, se concluye directamente que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\,\mathrm{d}x$ es también convergente.

Teorema 12.2 (Criterio del cuociente de funciones). *Para $b \geq a$, sean f y g funciones continuas en $[a, +\infty)$ y no negativas en $[b, +\infty)$. Suponga además que:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

Entonces las integrales impropias $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ y $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Observación: el mismo criterio se ocupa para las integrales de segunda especie.
Muchas veces se usa el teorema anterior para estudiar la convergencia de una integral impropia, comparándola con las integrales de la forma

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

o bien

$$\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

cuyos comportamientos son ya bien conocidos en función de α. Cuando esta comparación es posible, el comportamiento de la integral impropia en estudio se puede resumir en las siguientes reglas:

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = L > 0$, con $\alpha > 1$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(-x) = L > 0$ con $\alpha > 1$.
3. $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = L > 0$ con $\alpha < 1$.
4. $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = L > 0$ con $\alpha < 1$.

12.3 Convergencia absoluta

Revisaremos ahora la noción de convergencia absoluta de integrales impropias. Trataremos sólo el caso de integrales de primera especie, sin embargo puede extenderse a los demás tipos de integrales impropias. Es un buen ejercicio llevar a cabo con detalle esta extensión.

Definición (Convergencia absoluta) Sea $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, diremos que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ es **absolutamente convergente** si $\displaystyle\int_a^{\infty} |f|$ converge.

Notar que en un principio la definición no dice nada acerca de la convergencia de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$. Sin embargo el siguiente teorema muestra la relación entre la convergencia absoluta y la convergencia.

Teorema 12.3. *Sea $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge absolutamente} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge.}$$

Demostración. Es claro que

$$\begin{aligned} & -|f| \leq f \leq |f| \qquad /+|f| \\ \Longleftrightarrow\ & 0 \leq f + |f| \leq 2|f|. \end{aligned}$$

Luego, por el Criterio de Comparación, como por hipótesis $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge entonces

$$\int_a^{+\infty} f + |f| \text{ converge.}$$

Además, para $x \in [a, +\infty)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (f(x) + |f|(x)) - |f|(x) \\ \Longrightarrow \int_a^x f &= \int_a^x (f + |f|) - \int_a^x |f|. \end{aligned}$$

Haciendo $x \to +\infty$ y gracias a que ambos límites a la derecha existen, se concluye el resultado. $\square$

Observación: La recíproca del Teorema anterior **no** es necesariamente cierto.

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge } \quad \not\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge absolutamente.}$$

Ejemplo 12.5.
Consideremos $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, entonces $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, pero no así $\displaystyle\int_1^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Guía de Ejercicios

1. Estudie la convergencia de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2+x^4}.$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2}.$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5}{x^{12}+1}.$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\ln(1+e^x).$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}.$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}.$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\csc(x).$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{\frac{3}{2}}}.$

(i) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}.$

(j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}.$

(k) $\displaystyle\int_0^\infty x^x.$

(l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x\ln^p(x)}.$

2. Calcule, si existe, el área comprendida entre la curva $y=\frac{1}{a^2+x^2}$ y el eje OX.

3. Determine para cuales valores de $n\in\mathbb{N}$ la integral $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^3(1-x)}}$ es convergente y establezca una forma recursiva para la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Muestre que la integral $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x$ verifica la relación:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right)\,\mathrm{d}x$$

Deduzca el valor de I.

Guía de Problemas

P1. **(a)** Pruebe que las integrales $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$ divergen.

(b) Pruebe que $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) \mathrm{d}x$ converge y encuentre su valor.

(c) Encuentre los valores de $\alpha > 0$ para lo cuales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}\, \mathrm{d}x$ converge.

Indicación: El comportamiento de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ se considera conocido.

P2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}\right)$para $x \neq 0$ y $f(0) = k$.

(a) Encuentre el valor de k de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

(b) Estudie la convergencia de las integrales $\displaystyle\int_0^1 f$,$\displaystyle\int_1^\infty f$, $\displaystyle\int_0^\infty f$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f$.

P3. Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x})$. Se pide :

(a) Estúdiela completamente indicando dominio, ceros, límites importantes, asíntotas, continuidad, crecimiento, concavidades, gráfico e imagen.

(b) Determine si el área de las siguientes regiones es o no finita. En caso afirmativo, dé su valor.

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(x,y)/x < 0 \quad f(x) \leq y \leq 1\} \\
R_2 &= \{(x,y)/0 < x \leq 1 \quad f(x) \leq y \leq 1\} \\
R_3 &= \{(x,y)/x \geq 1 \quad f(x) \leq y \leq 1\}
\end{aligned}
$$

Indicación: Ni $e^{\frac{1}{x}}$ ni $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ tienen primitivas explícitamente calculables, sin embargo, f sí la tiene.

P4. **(a)** Aplicando la definición de integral impropia, calcule:

$$\int_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}$$

(b) Analice la convergencia de la integral:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$$

(c) Analice la convergencia de las áreas de las superficies engendradas al rotar la función $|\ln(x)|\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ en torno al eje OX y en torno al eje OY.

Series numéricas

13.1 Definición y ejemplos básicos

En esta parte estudiaremos la noción intuitiva de *sumas infinitas* que llamaremos *series.* A modo que ejemplo supongamos que queremos saber cuanto vale la suma o serie S de todos los números en el conjunto $A = \left\{\frac{1}{2^k} : k \in \mathbb{N}\right\}$, es decir deseamos darle sentido a la expresión

$$S = \sum_{x \in A} x$$

Abordamos el problema numerando los elementos de A mediante la sucesión $a_k = \frac{1}{2^k}$ y calculando la suma parcial de los primeros términos en éste orden. Esta suma parcial será una aproximación de S que esperaríamos converja a éste cuando hacemos que el número de términos tienda a infinito. En este caso la suma parcial queda dada por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Esta es una suma geométrica de razón $\frac{1}{2}$ que se calcula por $s_n = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$ de modo que la sucesión (s_n) de las sumas parciales posee límite que vale 2.
Es lícito preguntarse si este valor no dependerá de la manera como se ordenaron los elementos de A. Veremos más adelante que el orden de los términos es relevante, pues el valor asociado a un cierto orden podría ser diferente a aquel correspondiente a otro, inclusive podría no existir. Además, este proceso sólo tiene sentido si A es numerable o finito.

Definición (Serie) Una serie es un par ordenado $(A, (a_n))$ donde A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ numerable y $(a_n)_{n \geq 0}$ es una numeración (ordenamiento) del conjunto A.
La sucesión (a_n) se llama el término general de la serie. A partir de (a_n) definimos la sucesión (s_n) de las sumas parciales por $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. El valor de la serie existe cuando la sucesión (s_n) posee límite. En tal caso decimos que la serie es **convergente** y su valor es el límite de (s_n).

Por razones de comodidad permitiremos que (a_n) no está definido para algunos n's. Si k_0 es el menor entero a partir del cual a_n esta definida, el valor de la serie se denotará por

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k, \ \sum_{k \geq k_0} a_k \text{ o simplemente } \sum a_k$$

Ejemplo 13.1.

1. Consideremos la serie de término general $a_n = q^n$, conocida como la *serie geométrica*. Se tiene que
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
Cuando $0 \leq |q| < 1$ la sucesión (s_n) converge a $\frac{1}{1-q}$. En este caso
$$\sum_{k\geq 0} q^k = \frac{1}{1-q}$$
Además, para $q \geq 1$ la sucesión $(s_n) \geq n$ razón por la cual diverge a infinito. En esta situación diremos que la serie *diverge* y lo denotaremos por $\sum_{k\geq 0} a_k = +\infty$.

2. Consideremos la serie $\sum \frac{1}{k(k+1)}$. La n-ésima suma parcial es
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$
Entonces la serie converge y su valor es 1.

13.2 Condiciones para la convergencia

El teorema siguiente nos da una condición necesario para la convergencia de series

Teorema 13.1. *Si la serie $\sum a_k$ converge entonces la sucesión $(a_n) \to 0$.*

Demostración. Si la serie converge entonces las sucesiones (s_{n+1}) y (s_n) convergen y lo hacen al mismo límite. Como $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ se concluye que $(a_n) \to 0$. □

Ejemplo 13.2.

1. La serie $\sum \frac{k}{k+1}$ diverge pues la sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ no converge a cero.

2. La serie $\sum (-1)^k$ diverge pues la sucesión $((-1)^n)$ diverge.

3. Para $q \leq -1$ la serie $\sum q^k$ diverge debido a que la sucesión (q^n) diverge.

Cuidado: No es cierto que si $(a_n) \to 0$ entonces la serie $\sum a_k$ converja.

Ejemplo 13.3.
Veamos un ejemplo de una serie $\sum a_k$ divergente con $(a_n) \to 0$. Consideremos la sucesión $\left(a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$. Tenemos $\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \to \ln(1) = 0$. Sin embargo, la sucesión de las sumas parciales diverge a infinito. En efecto, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1)$

que sabemos diverge a más infinito. Observe que el ejemplo es válido para logaritmos en cualquier base $a > 1$.

13.3 Álgebra de series

Dado que el valor de las series se ha definido como un límite de sucesiones, es claro que el álgebra de límites se puede traducir en un álgebra de series.

Teorema 13.2. *Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes. Entonces*

1. *$\sum (a_k + b_k)$ es convergente y su valor es $(\sum a_k) + (\sum b_k)$.*
2. *Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum (\lambda a_k)$ es convergente y su valor es $\lambda (\sum a_k)$.*

Demostración. Como $\sum_{k \geq k_0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=k_0}^{n} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} b_k$ y $\sum_{k=k_0}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=k_0}^{n} a_k$ es posible aplicar álgebra de sucesiones y concluir las propiedades. $\square$

Ejemplo 13.4.
La serie $\sum \frac{2^k - 3^k}{6^k}$ tiene un término general que se descompone en

$$\frac{2^k - 3^k}{6^k} = \frac{1}{3^k} - \frac{1}{2^k}$$

Las series $\sum \frac{1}{3^k}$, $\sum \frac{1}{2^k}$ convergen y sus valores son $\frac{3}{2}$ y 2, respectivamente. Luego, la serie original converge y su valor es $\frac{1}{2}$.

13.4 Criterios para analizar convergencia de series de términos no negativos

Las series de términos no negativos son más manejables que las series en general pues sus sumas parciales son no decrecientes: $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$.

Teorema 13.3. *Una serie de términos no negativos converge si y sólo si las sumas parciales son acotadas superiormente.*

Demostración. Como las sumas parciales forman una sucesión monótona, podemos aplicar el Teorema de las sucesiones monótonas. Eso nos garantiza que las sumas parciales convergen si y solo si son acotadas. $\square$

Ahora presentamos algunos criterios para determinar cuando una serie de términos no negativos es convergente.

Ejemplo 13.5.
Un ejemplo muy relevante de serie divergente es la *serie armónica* con término general $a_n = \frac{1}{n}$. Para mostrar esto, veremos que sus sumas parciales no son acotadas superiormente. En efecto, notemos que sumando desde el tercero hasta el cuarto término, desde el quinto hasta el octavo término y desde el noveno hasta el décimo sexto término se obtiene un resultado de al menos $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} \geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}.$$

En general, si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sumando desde el $(2^{n-1}+1)$-ésimo hasta el 2^n-ésimo término se obtiene al menos $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\frac{1}{2^{n-1}+3}+\cdots+\frac{1}{2^n} \geq \underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{ veces}} \geq \frac{1}{2}.$$

De este modo:

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= \sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{2^n}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{4}\frac{1}{k}+\sum_{k=5}^{8}\frac{1}{k}+\sum_{k=9}^{16}\frac{1}{k}+\cdots+\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}\frac{1}{k} \\ &\geq 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n-1\text{ veces}} = 1+\frac{n-1}{2}, \end{aligned}$$

con lo que vemos que la sucesión de sumas parciales (s_n) no es acotada superiormente.
También es posible demostrar que esta serie diverge usando el criterio de la integral impropia (Teorema 13.8), que se verá más adelante. Esto se deja como ejercicio.

Mayoración de series

Teorema 13.4. *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de modo que existen n_0 y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k < +\infty$ entonces $\sum a_k < +\infty$.*

Demostración. La suma parcial (s_n) de $\sum a_k$ se escribe para $n \geq n_0$ como

$$\sum_{k\geq k_0}^{n} a_k = \sum_{k\geq k_0}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

Por la hipótesis se tiene que

$$s_n \leq \sum_{k\geq k_0}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} \alpha b_k = \sum_{k\geq k_0}^{n_0-1} (a_k - \alpha b_k) + \alpha \sum_{k\geq k_0}^{n} b_k$$

El primer término del lado derecho es independiente de n y el segundo término del lado derecho es acotado superiormente pues la serie $\sum b_k$ converge. Entonces, la suma parcial (s_n) es acotada superiormente lo que equivale a decir que la serie $\sum a_k$ converge. $\square$

Observación: La contrarrecíproca de este criterio nos dice que si $\sum a_k$ diverge lo mismo le ocurre a $\sum b_k$.

Ejemplo 13.6.
Usaremos la observación anterior para demostrar que la serie $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ con $\alpha \leq 1$ diverge. Tenemos que para todo $n \geq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Como $\sum \frac{1}{k}$ diverge concluimos que $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ diverge para $\alpha \leq 1$.

Comparación por cuociente

Teorema 13.5. *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que, para todo $n \geq 0$, $0 < a_n, b_n$ y supongamos que $c := \lim \frac{a_n}{b_n}$ existe. Se tienen las siguientes afirmaciones dependiendo del valor de c.*

1. *Caso $c = 0$. Si $\sum b_k < +\infty$ entonces $\sum a_k < +\infty$.*
2. *Caso $c > 0$. Se tiene que $\sum b_k < +\infty$ si y sólo si $\sum a_k < +\infty$.*

Demostración.

1. Al ser $c = 0$ y, a_n y b_n positivos, se tiene que existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq b_n$. Aplicando el criterio de mayoración obtenemos la conclusión.
2. Al igual que el caso anterior, si $c > 0$ y, a_n y b_n son positivos, se tiene que existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $\frac{1}{2}cb_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}cb_n$. Entonces es posible aplicar dos veces el criterio de mayoración usando las desigualdades $b_n \leq \frac{2}{c}a_n$ y $a_n \leq \frac{3}{2}cb_n$ y obtener la equivalencia. $\square$

Ejemplo 13.7.

1. Queremos probar que la serie $\sum \frac{1}{k^2}$ es convergente. Vamos a comparar el término $\frac{1}{k^2}$ con $\frac{1}{k(k+1)}$. Tenemos que $\lim \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k(k+1)}} = \lim \frac{k(k+1)}{k^2} = 1$. Entonces el criterio nos dice que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge pues ya sabemos que $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ converge.
2. Deseamos ver que la serie $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$ diverge. Sabemos que $\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1$ y que la serie $\sum \frac{1}{k}$ diverge. Luego $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$ diverge.

Criterio del cuociente

Teorema 13.6. *Sea (a_n) una sucesión de términos positivos y supongamos que $r := \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe. Dependiendo del valor de r se tienen las siguientes conclusiones.*

1. *Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.*

2. *Si $r > 1$ o $r = +\infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.*

Si $r = 1$ entonces el teorema no nos da información. Por ejemplo, con $a_k = 1/k$, tenemos una serie divergente que cumpla $\lim_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k = 1$. Por otro lado, con $a_k = 1/(k(k+1))$ tenemos una serie convergente donde se cumple $\lim_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k = 1$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Si $r < 1$ tenemos que existen n_0 y $\beta = \frac{1+r}{2}$ con $1 > \beta > 0$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \beta$. Entonces, $a_n \leq \beta a_{n-1} \leq \beta^{n-n_0} a_{n_0} = \beta^n \frac{a_{n_0}}{\beta^{n_0}}$. Tomando $\alpha = \frac{a_{n_0}}{\beta^{n_0}} > 0$ y $b_n = \beta^n$ podemos aplicar el criterio de mayoración pues la serie $\sum \beta^n$ es convergente.

2. Si $r > 1$ podemos proceder de modo análogo y concluir que existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $a_n \geq \gamma^n \delta$ con $\delta = \frac{a_{n_0}}{\gamma^{n_0}}$ y γ tal que $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \gamma > 1$. Como la serie $\sum \gamma^n$ es divergente el contrarrecíproco del criterio de mayoración nos dice que lo mismo ocurre con la serie $\sum a_k$. El caso $r = +\infty$ se propone como ejercicio. □

Ejemplo 13.8.
Veamos que la serie $\sum \frac{1}{k!}$converge. Para ello veamos que $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe y es menor que uno.
$r = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$

Observación: El límite $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ podría no existir y la serie $\sum a_k$ ser convergente. Por ejemplo, si

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

el límite $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ no existe sin embargo $a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ por lo cual $\sum a_k$ es convergente.

Criterio de la Raíz n-ésima

Teorema 13.7. *Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos y supongamos que el límite $r := \lim (a_n)^{\frac{1}{n}}$ existe. Se tienen las siguientes conclusiones.*

1. *Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.*

2. *Si $r > 1$ o $r = +\infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.*

De nuevo, si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir, es decir, en este caso el criterio no nos ayuda a determinar la convergencia de la serie. Por ejemplo, sabemos que $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ y que $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ sin embargo la serie $\sum \frac{1}{k}$ no converge y la serie $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ converge.

Demostración.

1. Si $r < 1$ entonces existe n_0 y un real $\beta = \frac{1+r}{2}$, $1 > \beta > 0$ tal que para todo $n \geq n_0$, $(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \beta$. Entonces, $a_n \leq \beta^n$. Tomando $\alpha = 1$ y $b_n = \beta^n$ podemos aplicar el criterio de mayoración pues la serie $\sum \beta^n$ es convergente.
2. La segunda alternativa se propone como ejercicio. □

Ejemplo 13.9.
Consideremos la serie $\sum \frac{2^k}{k^k}$. El criterio pide calcular $\lim \frac{2}{k} = 0$. La conclusión es que la serie converge.

Observación: Es posible probar como un ejercicio de sucesiones que si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe entonces $\lim (a_n)^{\frac{1}{n}}$ también existe y ambos tienen el mismo valor. En otras palabras, el criterio de la raíz es más poderoso que el criterio del cuociente ya que hay casos en los cuales el último de ellos existe sin que el primero exista. Por ejemplo,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ es mpar} \end{cases}$$

Por otra parte, la serie $\sum a_k$ podría converger y el límite $\lim (a_n)^{\frac{1}{n}}$ no existir. Como ejemplo considerar

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Se tiene que

$$(b_n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{3} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

que no converge, sin embargo $b_n \leq \frac{1}{2^n}$ y por lo tanto la serie $\sum b_k$ converge.

Criterio de la integral impropia

Teorema 13.8. *Sea $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n\geq 1} f(n) < +\infty$ si y solo si $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$.*

Demostración. La integral impropia es el límite de la sucesión $s_n = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ que a su vez es la suma parcial de la serie de término general $a_n = \int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Como la función es no negativa y decreciente se tiene que $f(n) \leq a_n \leq f(n-1)$, lo que muestra la equivalencia. □

Ejemplo 13.10.
Probemos que la serie $\sum \frac{1}{k^\alpha}$**,** $\alpha > 1$ converge. La función $\frac{1}{x^\alpha}$, para $\alpha > 1$ está definida en $[1, +\infty)$ y es estrictamente decreciente. La integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)\,x^{\alpha-1}}\bigg|_1^\infty = \frac{1}{\alpha-1}$$

El criterio nos dice que la serie $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

13.5 Series de signo arbitrario

Definición (Convergencia absoluta) Sea $\sum a_k$ una serie con (a_k) una sucesión cualquiera. Decimos que la serie es *absolutamente convergente* si $\sum |a_k| < +\infty$.

Las series de términos positivos y convergentes son obviamente absolutamente convergentes, pero no todas las series convergentes son absolutamente convergentes. La siguiente es una caracterización de las series absolutamente convergentes

Teorema 13.9. *Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además, una serie es absolutamente convergente si y sólo si las series de sus términos negativos y la de sus términos positivos son convergentes.*

Demostración. La serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente cuando $\sum |a_k|$ es convergente de modo que debe satisfacer el criterio de Cauchy, es decir,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N,\ m > n \implies \left|\sum_{n+1}^{m} |a_k|\right| = \sum_{n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$$

Siempre se tiene que $\left|\sum_{n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{n+1}^{m} |a_k|$. Entonces, $\sum a_k$ satisface el criterio de Cauchy y por ende es convergente.
Para probar la segunda parte definamos $d_k = \max\{a_k, 0\}$ y $c_k = -\min\{a_k, 0\}$, es decir, d_k vale a_k para $a_k > 0$ y cero en otro caso, y c_k vale -a_k para $a_k < 0$ y cero en otro caso. Además, se tiene que $|a_k| = d_k + c_k$ y que $a_k = d_k - c_k$ lo que implica que

$$d_k = \frac{1}{2}\left(|a_k| + a_k\right) \text{ y } c_k = \frac{1}{2}\left(|a_k| - a_k\right)$$

Cuando la serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente sabemos que las series $\sum |a_k|$ y $\sum a_k$ son convergentes entonces por álgebra de series concluimos que las series $\sum d_k$ y $\sum c_k$ son convergentes (absolutamente). Recíprocamente, si las series $\sum d_k$ y $\sum c_k$ son convergentes entonces otra vez el álgebra de series garantiza que la serie $\sum |a_k| = \sum d_k + \sum c_k$ es convergente. □

Observación: Sea $\sum a_k$ una serie con (a_n) una sucesión cualquiera y supongamos que aplicamos el criterio del cuociente a $(|a_n|)$. Si $r = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ es menor que 1 ¿podemos decir algo acerca de la convergencia de la serie $\sum a_k$?. Por supuesto, pues estaríamos en presencia de una serie absolutamente convergente, en particular la serie $\sum a_k$ sería convergente. ¿y si $r > 1$, podemos afirmar algo de $\sum a_k$? La respuesta es sí, en este caso la serie diverge. Para ver esto hay que recordar que cuando $r > 1$ se tenía que $|a_n| \geq \gamma^n \delta$, con $\gamma > 1$ y $\delta > 0$. Entonces la sucesión (a_n) no converge a cero de modo que la serie $\sum a_k$ diverge. Como ejercicio verifique que si $r = \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$ es mayor que 1 la serie $\sum a_k$ diverge.

13.6 Criterio de Leibniz

Para mostrar ejemplos de series convergentes que no son absolutamente convergentes (se les llama **condicionalmente convergentes**) vamos a probar el siguiente teorema.

Teorema 13.10. *Sea (a_n) una sucesión decreciente y convergente a cero (luego (a_n) es no negativa). Entonces la serie $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.*

Demostración. Vamos a probar que la suma parcial (s_n) satisface, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{2n-1} \leq s_{2n+1} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n} \tag{13.1}$$

En efecto, dado que

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1}$$

con $a_{2n} \geq a_{2n+1}$, se obtiene que $s_{2n+1} \geq s_{2n-1}$. Asimismo,

$$s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

con $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$ luego $s_{2n+2} \leq s_{2n}$. Por otra parte, $s_{2n+2} = s_{2n+1} + a_{2n+2} \geq s_{2n+1}$. De (13.1) se concluye que (s_{2n}) es no creciente y acotada inferiormente mientras que (s_{2n+1}) es no decreciente y acotada superiormente. En consecuencia ambas sucesiones convergen. Para demostrar que (s_n) converge basta verificar que (s_{2n+1}) y (s_{2n}) convergen al mismo límite, lo cual resulta del hecho que $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \to 0$.
Observar que el valor de la serie s debe estar comprendido entre s_{2n+1} y s_{2n+2} que están a distancia a_{2n+2} y entre s_{2n+3} y s_{2n+2} que están a distancia a_{2n+3}. Entonces para todo n se tiene que $|s_n - s| \leq a_n$ □

Ejemplo 13.11.
La serie $\sum (-1)^k \frac{1}{k}$ converge pues $\frac{1}{k}$ es positiva y decrece a cero.

13.7 Multiplicación de series

La última propiedad acerca de las series condicionalmente convergentes es hermosa pero muy molesta al momento de multiplicar series pues el producto de dos series $\sum a_k$ y $\sum b_k$, que uno quisiera que fuese $\sum\sum a_i b_j$, puede depender del orden en el cual se sumen los productos $a_i b_j$. Sin embargo, el próximo teorema asegura que las series absolutamente convergentes pueden multiplicarse y su resultado es la serie de los términos $a_i b_j$ sumados en cualquier orden.

Teorema 13.11. *Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series absolutamente convergentes entonces $(\sum a_k)(\sum b_k)$ es igual a $\sum c_k$ donde (c_k) es cualquier sucesión que contiene exactamente una vez cada uno de los productos $a_i b_j$, por ejemplo $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.*

Demostración. Como

$$\left(\sum_{i\leq n} |a_i|\right)\left(\sum_{j\leq n} |b_j|\right) \to \left(\sum_{i\geq 1} |a_i|\right)\left(\sum_{j\geq 1} |b_j|\right)$$

dado $\epsilon > 0$ existe n_0' tal que para todo $n' \geq n_0'$,

$$B_{n'} = \left|\left(\sum_{i\leq n'} |a_i|\right)\left(\sum_{j\leq n'} |b_j|\right) - \left(\sum_{i\geq 1} |a_i|\right)\left(\sum_{j\geq 1} |b_j|\right)\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

En esta diferencia están todos los términos $a_i b_j$ con $i > n'$ o $j > n'$. Por otra parte, como

$$\left(\sum_{i\leq n} a_i\right)\left(\sum_{j\leq n} b_j\right) \to \left(\sum_{i\geq 1} a_i\right)\left(\sum_{j\geq 1} b_j\right)$$

dado $\epsilon > 0$ existe n_0'' tal que para todo $n'' \geq n_0''$,

$$A_{n''} = \left|\left(\sum_{i\leq n''} a_i\right)\left(\sum_{j\leq n''} b_j\right) - \left(\sum_{i\geq 1} a_i\right)\left(\sum_{j\geq 1} b_j\right)\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $N = \max\{n_0', n_0''\}$ entonces se tiene que $A_N + B_N < \epsilon$. Además, existe n_0 tal que para $n \geq n_0$, la suma $\sum_{k=1}^{n} c_k$ contiene todos los productos $a_i b_j$ para $i, j \in \{1, ..., N\}$. Sea $C_N = \left(\sum_{i\leq N} a_i\right)\left(\sum_{j\leq N} b_j\right)$. Claramente, la diferencia entre $\sum_{k=1}^{n} c_k$ y C_N sólo contiene productos $a_i b_j$ con $i > N$ o $j > N$ de donde se deduce que $|\sum_{k=1}^{n} c_k - C_N| \leq B_N < \frac{\epsilon}{2}$.
Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} c_k - \left(\sum_{i\geq 1} a_i\right)\left(\sum_{j\geq 1} b_j\right)\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{n} c_k - C_N\right| + \left|C_N - \left(\sum_{i\geq 1} a_i\right)\left(\sum_{j\geq 1} b_j\right)\right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

□

Guía de Ejercicios

1. Calcule el valor de las siguientes series.

(a) $\sum \frac{4}{(4k-3)(4k+1)}$.

(b) $\sum \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

(c) $\sum \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}}$.

2. Demuestre que las siguientes series divergen.

(a) $\sum k^2$.

(b) $\sum k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

(c) $\sum k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$.

(d) Para $a \in \mathbb{R}$, $\sum \left(1+\frac{a}{k}\right)^k$.

3. Aplique el álgebra de series para estudiar la convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum \left(\frac{5}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)$.

(b) $\sum \left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{5^k}\right)$.

4. Estudie la convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum \frac{2^k+\cos\left(4^k\right)}{3^k}$.

(b) $\sum \frac{1}{e^k+\tan\left(\frac{1}{k}\right)}$.

(c) $\sum \frac{k+1}{k^2+1}$.

(d) $\sum \frac{k+\ln(k)}{k^3}$.

5. Sea (a_n) una sucesión de términos positivos y tales que $\sum a_k$ converge. Demuestre que la serie $\sum a_k^2$ converge.

6. Estudie la convergencia de las series

(a) $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

(b) $\sum \ln\left(\frac{k^2+1}{k^2}\right)$.

(c) $\sum \frac{1}{\sqrt{k}\left(1+\sqrt{k}\right)}$.

(d) $\sum \tan\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

(e) $\sum \frac{1}{k(k)^{\frac{1}{k}}}$.

(f) $\sum \left(\sqrt{k^2+k}-k\right)$.

7. Sea $\sum a_k$ una serie convergente con $a_k \geq 0$ y $a_k \neq 1$. Demuestre que las series $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ y $\sum \frac{a_k}{1-a_k}$son convergentes.

8. Estudie la convergencia de las series

(a) $\sum \frac{1}{e^{\sqrt{k^2+k}}}$.

(b) $\sum q^k k^\alpha$ para $\alpha > 0$ y $q \in (0,1)$.

(c) $\sum \frac{a^k}{k^k}$.

9. Pruebe que las siguientes series son absolutamente convergentes.

(a) $\sum \frac{\cos\left(k^k\right)}{k^2}$.

(b) $\sum (-1)^k \frac{1}{k^\alpha}$ con $\alpha > 1$.

(c) $\sum (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$.

10. Determine para que valores de a la serie $\sum a^k k^a$es absolutamente convergente. las series $\sum \frac{a_k}{1+a_k^2}$ y $\sum \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}$ son absolutamente convergentes

11. Estudie la convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

(b) $\sum (-1)^k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$.

Guía de Problemas

P1. **(a)** Analice la convergencia de la siguiente serie; en caso de ser convergente, calcule su valor $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Indicación: Use la identidad $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$.

(b) Use el Criterio de la Integral para analizar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^y}{y^y}\,\mathrm{d}y$.

(c) Analice la convergencia absoluta y condicional de la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$.

P2. **(a)(a1)** Demuestre que para todo número real p, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ converge .

(a2) Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!}$.

(b) Considere la función

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \quad x \geq 0.$$

(b1) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de término $a_n = (-1)^n f(n)$ converge.

(b2) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\, f(x)$ y utilice este resultado para demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ definida en **(b2)** no converge absolutamente.

P3. Estudie la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})}$ para $\alpha > 1$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ (Ind: demuestre que $\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$)

Series de potencias

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

DEFINICIÓN (SERIE DE POTENCIAS) Una serie de potencias es una serie en donde el término general es de la forma $a_k (x-\alpha)^k$.

No es difícil notar que la convergencia de estas series depende fuertemente del valor de x. Nosotros nos concentraremos en el caso de series de potencias centradas en cero, es decir, consideraremos solamente el caso $\alpha = 0$.

Ejemplo 14.1.
Consideremos la serie de potencias $\sum x^k$. Esta serie corresponde a una serie geométrica con razón x. Sabemos que si $|x| < 1$ esta serie converge absolutamente y que si $|x| \geq 1$ diverge. Esto quiere decir que en el intervalo $(-1,1)$ podemos definir la función $g(x) = \sum x^k$. En este caso podemos calcular el valor de la serie de modo que $g(x) = \frac{1}{1-x}$ para $x \in (-1,1)$.

Al analizar el ejemplo anterior parece natural que si la serie converge para x_0 lo haga también para x con $|x| \leq |x_0|$ y recíprocamente, que si diverge para x_0 también lo haga para valores de x con $|x_0| < |x|$.
La siguiente proposición nos acerca a la respuesta.

Proposición 14.1. *Si la serie $\sum a_k x_0^k$ converge, se tiene que para cada $a \in (0, |x_0|)$ y para todo $x \in [-a,a]$ la serie $\sum a_k x^k$ converge absolutamente.*

DEMOSTRACIÓN. Para $x \in [-a,a]$ y $r = \left|\frac{a}{x_0}\right|$ la sucesión $(|a_n x^n|)$ es mayorada por $|a_n x^n| \leq |a_n| a^n \leq |a_n| |x_0|^n \left(\left|\frac{a}{x_0}\right|\right)^n = |a_n| |x_0|^n r^n$.
El término $|a_n x_0^n|$ es acotado (converge a cero) pues $\sum a_k x_0^k$ es convergente. Entonces, $|a_n x^n| \leq M r^n$. El lado derecho es una constante por el término general de una serie geométrica con razón $r < 1$. Usando el criterio de mayoración concluimos que la serie $\sum a_k x^k$ converge para todo $x \in [-a,a]$. □

14.1 Radio e intervalo de convergencia

Notar que la Proposición 14.1 nos dice que si $\sum a_k x_0^k$ diverge entonces también diverge la serie $\sum a_k x^k$ para $|x| > |x_0|$. Definamos

$$R = \sup\left\{x_0 : \sum a_k x_0^k < +\infty\right\}.$$

Este valor es finito si existe algún x para el cual la serie $\sum a_k x^k$ diverge y vale $+\infty$ en otro caso.

Definición (Radio de convergencia) Al valor R lo llamaremos el *radio de convergencia* de la serie de potencias $\sum a_k x^k$.

La Proposición 14.1 nos asegura que para todo $x \in (-R, R)$ la serie converge y para todo $x \notin (-R, R)$ la serie diverge. Si aplicamos el criterio del la raíz n-ésima a la serie $\sum a_k x^k$ obtenemos $r = |x| \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$.
Entonces, $\rho = \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$ es igual a $\frac{1}{R}$ cuando $R \neq 0$ y vale cero cuando $R = +\infty$, con lo que tenemos una manera de calcular R basada solamente en (a_n).

Definición (Intervalo de convergencia) Llamamos *intervalo de convergencia* I al conjunto de reales x para los cuales la serie $\sum a_k x^k$ converge. Tenemos que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.

Ejemplo 14.2.
Dependiendo de la serie se puede tener que $I = (-R, R)$, $I = (-R, R]$, $I = [-R, R)$ o $I = [-R, R]$.

Caso. $I = (-R, R)$**.** $\sum (-1)^k x^k$**.** Para $x \in (-1, 1)$ podemos aplicar el criterio de Leibniz y concluir que la serie converge. En $x = 1$ la serie diverge y lo mismo ocurre para $x = -1$. Entonces, el radio de convergencia de la serie es $R = 1$ y su intervalo de convergencia es $(-1, 1)$.

Caso $I = (-R, R]$. $\sum (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$. Para $x = -1$ la serie es $\sum -\frac{1}{k}$ que diverge. Para $x = 1$ la serie es $\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ que converge. Luego el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia es $(-1, 1]$.

Caso $I = [-R, R)$. $\sum \frac{x^k}{k}$. Hacerlo como ejercicio. $R = 1$, $I = [-1, 1)$.

Caso $I = [-R, R]$. $\sum \frac{x^k}{k^2}$. Para $x > 1$ la serie diverge pues la sucesión $\frac{x^n}{n^2}$ diverge a infinito. Para $x = 1$ la serie converge por lo que su radio de convergencia es $R = 1$. Además para $x = -1$ la serie $\sum (-1)^k \frac{1}{k^2}$ converge absolutamente.

14.2 Series de potencias, integración y derivación

Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia I, es posible definir naturalmente la función

$$\begin{aligned} f\colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

Mostraremos a continuación que esta función es integrable y derivable, y de manera fácil a partir de la serie de potencias original.
Veamos primero el siguiente teorema:

Teorema 14.2. *Sea* $\sum a_k x^k$ *una serie de potencias con radio de convergencia mayor que cero. Definiendo la función* f *como en* (14.2)*, se tiene que ella es continua en* $\text{int}(\text{Dom}\, f)$*.*

Demostración. Como $\text{Dom}\, f$ es un intervalo, entonces probar que f es continua en $\text{int}(\text{Dom}\, f)$ es equivalente a probar que

$$\forall q \in \text{int}(\text{Dom}(f)) \cap \mathbb{R}_+^*, \ f \text{ es continua en} (-q, q).$$

Sea entonces $q \in \text{int}(\text{Dom}\, f) \cap \mathbb{R}_+^*$. Definimos, para $n \in \mathbb{N}$, la función:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Luego

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k x^k| = \sum_{k=0}^{n} |a_k||x|^k \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| q^k = \sum_{k=0}^{n} |a_k q^k|.$$

Sean $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k q^k$ y $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k q^k|$. Para $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$ y $x \in [-q, q]$, se tiene

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k||x^k| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k q^k| = S_m - S_n. \end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que

$$\forall x \in [-q, q], \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall m > n, \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq S_m - S_n.$$

Haciendo $m \to \infty$, se deduce que

$$\forall x \in [-q, q], \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq S - S_n. \tag{14.1}$$

Usando esto probemos que f es continua en $x_0 \in (-q, q)$, es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in (-q, q) \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Veamos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |S - S_n| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |S - S_n| \\ &\leq 2|S - S_n| + |f_n(x) - f_n(x_0)| \end{aligned}$$

Sea entonces $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|S - S_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, luego

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|.$$

Ahora, como $f_{n_0}(x)$ es un polinomio de grado $\leq n_0$, entonces $f_{n_0}(x)$ es continua en x_0, por lo tanto

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Con este $\delta > 0$, se tiene lo buscado, es decir

$$\forall x \in (-q, q), \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Gracias a este teorema, tenemos que la función definida por la serie de potencias es integrable en $\text{int}(I)$. Para ver que además es fácil integrarla, debemos probar el siguiente resultado:

Proposición 14.3. *Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias de radio de convergencia $R > 0$. Entonces para todo $p \in \mathbb{Z}$, la serie $\sum k^p a_k x^k$ tiene radio de convergencia R.*

Demostración. Sea $q \in (0, R)$, luego $\sum a_k q^k$ converge absolutamente. Gracias al Teorema 13.9, la sucesión $(a_k q^k)$ está acotada, digamos $|a_k q^k| \leq C$.
Luego para cualquier $x \in (-q, q)$,

$$|k^p a_k x^k| = \left| k^p a_k q^k \frac{x^k}{q^k} \right| \leq C k^p \left| \frac{x}{q} \right|^k.$$

Consideremos entonces la serie $\sum k^p z^k$, llamando $z = \left|\frac{x}{q}\right|$. Usando el criterio de la raíz n-ésima, tenemos

$$\sqrt[k]{k^p z^k} = z \left(\sqrt[k]{k} \right)^p \xrightarrow{k \to \infty} z.$$

Es decir, si $|z| < 1$ entonces $\sum k^p z^k$ converge. Por lo tanto, $\sum k^p a_k x^k$ converge absolutamente si $x \in (-q, q)$.
Como la serie $\sum k^p a_k x^k$ converge para todo $x \in (0, R)$, luego si el radio de convergencia de esta serie es R^*, entonces $R^* \geq R$.
Aplicando el mismo razonamiento, a la serie de potencias $\sum k^{-p} \cdot k^p a_k x^k = \sum k^{-p} \tilde{a}_k x^k$ (con $\tilde{a}_k = k^p a_k$), obtenemos que $R \geq R^*$. De donde se concluye el resultado. $\square$

Observación: Gracias a este último resultado, si $\sum a_k x^k$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces $\sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$ tiene también radio de convergencia $R > 0$.
Lo mismo sucede para la serie de potencias $\sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}$.

Probemos entonces que para integrar la función definida por una serie de potencias, basta integrar el término general de la serie.

Teorema 14.4. *Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias, con radio de convergencia $R > 0$. Entonces la función f definida como en (14.2), es integrable en $(-R, R)$ y*

$$\forall x \in (-R, R), \quad \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^x (\sum a_k t^k)\, \mathrm{d}t = \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

Demostración. Gracias al Teorema 14.2, f es integrable.
Definimos, para $n \in \mathbb{N}$, como en el Teorema 14.2:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Se tiene que

$$\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \big(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\big)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} \xrightarrow{n\to\infty} \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

Esto gracias a la observación de la Proposición 14.3.
Sea entonces $x \in (-R, R)$ y veamos

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \left|\int_0^x (f(t) - f_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \left|\int_0^x |f(t) - f_n(t)|\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Y usando (14.1) en la demostración del Teorema 14.2,

$$\leq \left|\int_0^x |S - S_n|\,\mathrm{d}t\right| \leq |x||S - S_n| \to 0.$$

Luego,

$$\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \ \to \ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{y} \quad \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \ \to \ \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1},$$

y por unicidad del límite,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

□

Además, gracias a este último teorema, se tiene la misma propiedad para el caso de la derivada.

Teorema 14.5. *Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias, con radio de convergencia $R > 0$. Entonces la función f definida como en (14.2), es derivable en $(-R, R)$ y*

$$\forall x \in (-R, R), \quad f'(x) = \sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}.$$

Demostración. Gracias al Teorema 14.4, la serie de potencias $\sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}$ es integrable en $(-R, R)$ y para todo $x \in (-R, R)$.

$$\int_0^x \left(\sum_{k\geq 1} k a_k t^{k-1}\right)\mathrm{d}t = \sum_{k\geq 1} a_k k \frac{x^k}{k} = \sum_{k\geq 1} a_k x^k = f(x) - a_0.$$

Luego

$$f'(x) = \left(\int_0^x \left(\sum_{k\geq 1} a_k k t^{k-1}\right)\mathrm{d}t\right)' = \sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}.$$

□

Los resultados anteriores nos dicen que el radio de convergencia de una serie y el de la serie derivada son iguales. Más aún, lo mismo es cierto para la serie derivada por lo que también será cierto para las derivadas de cualquier orden. Entonces la función $f(x)$ que se obtiene de la serie de potencias es **infinitamente derivable** y todas sus derivadas tienen el mismo radio de convergencia.
Además se tiene que

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k\geq j} k(k-1)\cdots(k-j)\,a_k x^{k-j},$$

es decir, la serie que se obtiene al derivar término a término la serie de la función f representa la derivada de orden j de f. De aquí que, $f^{(j)}(0) = a_j j!$, y entonces el término a_j de la serie que representa a f debe ser $\frac{f^{(j)}(0)}{j!}$, es decir, aquel de la serie de Taylor para f en torno a cero.

Ejemplo 14.3.

1. Consideremos $f(x) = e^x$. Sabemos que $f^{(j)}(0) = e^0 = 1$ para todo $j \geq 0$. Entonces la serie candidata es $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dado cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^k}{k!}$ existe pues $\frac{x_0^{k+1}k!}{(k+1)!x_0^k} = \frac{x_0}{k+1} \to 0$. Esto dice que el radio de convergencia es infinito y entonces la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Utilizando las fórmulas del residuo para el desarrollo de Taylor es posible probar que para todo $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum \frac{x^k}{k!}$. De modo que no es novedoso que la serie derivada $\sum k\frac{x^{k-1}}{k!}$ sea igual a $\sum \frac{x^k}{k!}$.

2. Busquemos una serie que represente a la función $f(x) = \sqrt{1+x}$. Se tiene que $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ y en general

$$f^{(j)}(x) = (-1)^{j+1}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{(2j-1)}{2}(1+x)^{-\frac{2j+1}{2}}$$

Luego $f^{(j)}(0) = (-1)^{j+1}\frac{1\cdot 3\cdots(2j-1)}{2^j}$ y el término $a_j = (-1)^{j+1}\frac{1\cdot 3\cdots(2j-1)}{2^j j!}$. La serie $\sum a_j x^j$ converge para $|x| < 1$ pues $\frac{\frac{1\cdot 3\cdots(2j+1)}{2^{j+1}(j+1)!}}{\frac{1\cdot 3\cdots(2j-1)}{2^j j!}}|x| = \frac{(2j+1)}{2(j+1)}|x| \to |x|$. De modo que el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo es $I = (-1,1)$ pues la sucesión a_k no converge a cero.

Material Extra

14.3 Álgebra de series de potencias

Las series de potencias se pueden sumar y multiplicar y los radios de convergencia de las series resultantes estarán determinados por aquellos de las series originales.

Teorema 14.6. *Dadas dos series de potencias $\sum a_k x^k$ y $\sum b_k x^k$ convergentes para x_0. Entonces la serie $\sum(a_k+b_k)x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum(a_k+b_k)x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$. Además, si $c_k = \sum^k a_j b_{k-j}$ la serie $\sum c_k x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum c_k x^k = \left(\sum a_k x^k\right)\left(\sum b_k x^k\right)$.*

Demostración. Se deja como ejercicio. $\square$

Ejemplo 14.4.
Calculemos el producto $\left(\sum \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum \frac{x^k}{k!}\right)$. El coeficiente $c_k = \sum^k \frac{1}{j!}\frac{1}{(k-j)!} = \frac{2^k}{k!}$. Entonces, $\sum c_k x^k = \sum \frac{(2x)^k}{k!} = e^{2x}$. Natural.

Guía de Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes series se pide encontrar el radio y el intervalo de convergencia.

(a) $\sum \frac{x^{2k+1}}{k!}$

(b) $\sum \frac{x^k}{\sqrt{k^2+3}}$.

(c) $\sum \frac{x^k\sqrt{k}}{3^k}$.

(d) $\sum x^k \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

(e) $\sum \frac{x^k}{k^\alpha}$.

(f) $\sum (-1)^k x^{2k+1}$.

(g) $\sum \frac{x^k}{2k+1}$.

(h) $\sum x^k \frac{(1+\operatorname{sen}(k))}{k}$.

(i) $\sum x^k \frac{(k+2)(k+1)}{2}$.

(j) $\sum \left(\frac{a^k}{k}+\frac{b^k}{k^2}\right) x^k$ con $a > b > 0$.

2. **(a)** Determine la función e intervalo de convergencia asociada a la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$.

(b) Pruebe que $\arctan(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ en $(-1,1)$.

(c) Deduzca una serie para calcular π.

3. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1-x\ \operatorname{sen}^2(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}$, con $|x|<1$.

Indicación: Recuerde que $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, si $|x|<1$.

Guía de Problemas

P1. **(a)** Para la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a^k}{k}+\frac{b^k}{k^2}\right)(x-1)^k \quad 0<b<a,$$

encuentre: Radio de convergencia e intervalo de convergencia. Estudie además la convergencia en los extremos derecho e izquierdo del intervalo.

(b) Demuestre que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+a^2t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{2n}}{2n+1}.$$

Indicación: Recuerde que $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k$.

(c) Concluya que: $\dfrac{\arctan(a)}{a}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{2n}}{2n+1}$.

P2. **(a)** Determine el intervalo de convergencia para la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k$. No olvide analizar los extremos del intervalo.

(b) Encuentre los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$ converge.

(c) Sea $f\colon C\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$.

(c1) Demuestre que $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$.

(c2) Integrando, encuentre una expresión explícita para $f(x)$.

P3. **(a)** Analice la convergencia de las series $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{k\ln(k)}$ y $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k\ln(k)}$.

(b) Calcule el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\frac{x^k}{k\ln(k)}$.

(c)(c1) Calcule el radio de convergencia R de la serie $f(x)=\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k(k+1)}$.

(c2) Demuestre que para todo $x\in(-R,R)$ se tiene que $(xf(x))''=\frac{1}{1-x}$.

(c3) Demuestre que para todo $x\in(-R,R)\setminus\{0\}$ se tiene

$$f(x)=\frac{1+(1-x)(\ln(1-x)-1)}{x}.$$

P4. **(a)** Determine la función e intervalo de convergencia asociada a la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$.

(b) Pruebe que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ en $(-1, 1)$.

(c) Deduzca una serie para calcular π.

P5. Encuentre el desarrollo en serie potencias de las siguientes funciones y determine radio e intervalo de convergencia.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$.

(b) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)(1+2x)}$.