UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
MA1002-8 CÁLCULO $\frac{d}{dx}$ E $\int$ · PRIMAVERA 2025

Auxiliar 2: Aplicaciones de continuidad 

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 20 de agosto de 2025

P1. [Continuando]

a) Demuestre que $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua en todo su dominio.

b) ¿La función $g(x) = e^x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ es uniformemente continua en $(0, 1)$? Argumente.

c) Estudie la uniforme continuidad de $h(x) = x^3$ en $\mathbb{R}$ y de su inversa $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

d) Pruebe que $j(x) = \sqrt{1-x^2}\frac{\arctan(x)}{x}$ es uniformemente continua en $[-1{,}1]$. (Indicación: repare la función).

e) **(propuesto)** Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función uniformemente continua en $(-\infty, 0]$ y uniformemente continua en $[0, +\infty)$. Demuestre que h es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

P2. [Resolviendo]

a) Asuma que $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en el cerrado y acotado $[0, 4]$, tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(3) = -3$ y $f(4) = 3$. ¿Qué puede asegurar sobre los ceros de la función en $[0, 4]$?

b) Justifique si las siguientes funciones admiten o no alguna raíz, e indique dónde:

i) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ **ii)** $g(x) = x + \ln(|\ln(|x|)|)$ **iii)** $h(x) = 4x - 2 + e^x$ **iv)** $j(x) = e^{2x^3-4x+1} - 1$

c) Argumente la existencia (o ausencia) de solución de las siguientes ecuaciones:

i) $5 - \sin(x) = x$ **ii)** $\cos(x) = x^4$ **iii)** $e^{5x} = x$ **iv)** $x2^x = 1$ **v)** $\dfrac{1}{x} = 0$

d) **(propuesta)** Sea $f\colon [0, 3] \to [1, 2]$ continua en todo su domino. Demuestre que f tiene un punto fijo, es decir, que $f(x_0) = x_0$ para algún x_0 en su dominio. Verifique que además $x_0 \notin \{0, 3\}$.

e) Sea $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, con $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$. Se define $g_\beta\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $g_\beta(x) = f(x) + \beta(1-2x)$, con $\beta \in \mathbb{R}$. Encuentre todos los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ tal que g_β tenga al menos una raíz en su dominio.

f) Muestre que si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe x_0 en $[a, b]$ tal que $f(x_0) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Más aún, si $\mathrm{Cod}(f) = (0, +\infty)$, $\alpha \in [0, 1]$ y $x_1, x_2 \in [a, b]$, demuestre que existen $\mu, \xi \in [x_1, x_2]$ tales que:

$$f(\mu) = f(x_1)^\alpha f(x_2)^{1-\alpha} \text{ y } \frac{1}{f(\xi)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)}\right).$$

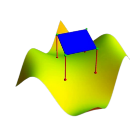
P3. [Extremos]
Estudie la existencia de máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 5, & x = 0 \end{cases}$, en $[0, 1]$ **b)** $g(x) = x^2$, en $(-1, 1)$ **c)** $h(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, en $[0, 1]$

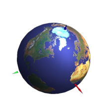
¿Alguno de los resultados contradice el teorema de Weierstrass?

P4. [Imaginación] (propuestos) Demuestre las siguientes proposiciones, utilizando algún teorema visto:

a) **[*Wobbly Table Theorem*]**
En un suelo arbitrario, una mesa cuadrada puede ser rotada de manera que no se tambalea.



b) **[*Earth Theorem*]**
Existe un punto en la Tierra donde la T y P coinciden con la T y P en su antípoda.



Principales definiciones, propiedades y teoremas

Intervalos cerrados, acotados y no vacíos

En esta parte del curso se trabajará constantemente con intervalos de la forma $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Siempre se asumirá (salvo que se diga lo contrario), que $a \leq b$ (si no, sería un conjunto vacío). Es importante que sea **cerrado y acotado**, para que cumpla las hipótesis de los teoremas.

Teorema de Bolzano / Teorema del Cero Intermedio / Teorema del Valor Intermedio (TVI)

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

Si $f(a)f(b) \leq 0 \implies$ existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$

$$\iff (\exists\, \overline{x} \in [a, b]) : f(\overline{x}) = 0$$

O sea, si existe un cambio de signo entre la imagen de los extremos de un cerrado y acotado por una función continua, necesariamente la función pasó por el cero.

Teorema de los Valores Intermedios / Propiedad de Darboux / TVI Generalizado

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

Si $c, d \in f([a, b]) \implies$ para todo x_0 entre c y d, existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = x_0$

$$\iff (\forall x_0 \in [c, d] \subseteq f([a, b]))\,(\exists \overline{x} \in [a, b]) : f(\overline{x}) = x_0$$

O sea, para funciones continuas, siempre es posible encontrar un punto en el cerrado y acotado que lleve a cualquiera en la imagen.

Teorema de Weierstrass: máximos y mínimos

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:

- f es acotada, simbólicamente:
$$(\exists\, M > 0)\,(\forall\, x \in [a, b]) : |f(x)| \leq M$$
- f alcanza su máximo en $[a, b]$, simbólicamente:
$$(\exists\, x_{\max} \in [a, b])\,(\forall\, x \in [a, b]) : f(x) \leq f(x_{\max})$$
- f alcanza su mínimo en $[a, b]$, simbólicamente:
$$(\exists\, x_{\min} \in [a, b])\,(\forall\, x \in [a, b]) : f(x_{\min}) \leq f(x)$$

O sea, las funciones continuas alcanzan su máximo y mínimo en un intervalo cerrado y acotado.

Monotonía e inyectividad

Una función f monótona **estricta** es **creciente** si $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ o es **decreciente** si $x_1 < x_2 \implies f(x_2) < f(x_1)$. Siempre es **inyectiva**. Si se restringe su codominio a su recorrido, es epiyectiva, y por tanto biyectiva, así que admite inversa.

Continuidad de la función inversa

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo (finito o infinito, abierto o cerrado o semicerrado). Sea $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente). Entonces: $f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1}\colon f(I) \to I$ es continua.

O sea, la imagen de un intervalo por una función continua sigue siendo un intervalo, y las funciones monótonas heredan su continuidad a su inversa.

Continuidad uniforme

Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f es **uniformemente continua**

$$\text{ssi: } (\forall\, \epsilon > 0)\,(\exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0)\,(\forall\, x, y \in A) :$$
$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

O sea, si lo cercano que se requiere que estén dos puntos no depende de ellos ($\delta \neq \delta(\epsilon, y)$), sino de cuán cerca se quiere que estén las imágenes ($\delta = \delta(\epsilon)$).

Caracterización de continuidad uniforme

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, con dominio **cerrado** y **acotado**. Entonces f es uniformemente continua si y solo si f es continua en todo punto $\overline{x} \in [a, b]$.

Continuidad y continuidad uniforme

- continuidad uniforme $\implies$ continuidad, siempre (de la definición de continuidad uniforme se llega a la continuidad en un punto, para cada punto).
- ¡La recíproca no es cierta! Ejemplo: x^3 es continua, pero su cota δ depende del punto, o sea: no es uniformemente continua. Salvo que se trabaje en un dominio cerrado y acotado, por el teorema que caracteriza la continuidad y la continuidad uniforme, no se tendrá esta implicancia.