

# DESARROLLO AUX 1

## SUCESIONES Y CONTINUIDAD

MA1002-8  
2025-2

**Profesora:** M. Eugenia Martínez M.  
**Auxiliar:** Bianca Zamora Araya

$P_1$

E Y OBSERVAR



(P<sub>1</sub>)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718\dots$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta^{\frac{1}{n}} = 1, \beta > 0$

(P<sub>1</sub>) a) Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

La sucesión  $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$  no es "conocida" pero se parece a  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$  que sí es conocida porque converge a  $e$  (lemnizado). Entonces la idea sería escribir la sucesión no conocida en términos de la que sí se conoce  $\rightarrow$  subsucesiones, y usar las propiedades de la sucesión conocida, que heredan las subsucesiones.

En efecto,

llámese  $x_n := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$  a los términos de la sucesión de interés  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

Considérese  $y_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , así se tiene la sucesión  $(y_n)_{n \geq 1}$ .

Notar que  $\underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}}_{= y_{n^2}} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n}_{= x_n} \quad (\forall n \geq 1).$

Notar que  $(y_{n^2})_{n \geq 1} = (y_{p(m)})_{m \geq 1}$  es una subsucesión de  $(y_n)$  con  $\begin{cases} p: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto p(n) = n^2 \end{cases}$  monótona creciente.

O sea que  $(y_{n^2})^{\frac{1}{n}} = x_n \quad (\forall n \geq 1).$

Como  $y_n \rightarrow e$ ,  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0): |y_n - e| \leq \varepsilon$  (def. convergencia), en otras palabras: para  $n$  suficientemente grande,  $y_n$  es cercano a  $e = 2.718\dots$ ; en particular,  $y_n < 3$  para  $n$  suficientemente grande.

Además  $y_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$ , o sea  $2 \leq y_n \quad (\forall n \geq 1)$ ; relajando:  $1 \leq y_n \quad (\forall n \geq 1).$

O sea:  $1 \leq y_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq y_{n^2} < 3 \Leftrightarrow 1 \leq (y_{n^2})^{\frac{1}{n}} < 3^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow 1 \leq x_n < 3^{\frac{1}{n}}.$   
 $\uparrow$   
 $y_{n^2}$  subsucesión de  $y_n$        $\uparrow$   
 $(\cdot)^{\frac{1}{n}}$  creciente ( $n$  fijo)

Tomando límite en la desigualdad:

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1, \text{ por empujado } (3 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq 1$$

Luego, en virtud del Teorema del Sandwich, se concluye que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$  Q.E.D.  $\square$

(P1) b)  $u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $(u_n)_{n \geq 1}$  sucesión  $u_n = x_n$  (solo son nombres)

P.D.Q.  $u_n$  no es acotada

Nuevamente:

La sucesión  $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  no es "conocida" pero se parece a  $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  que sí es conocida porque converge a  $e$  (empujado). Entonces la idea sería escribir la sucesión no conocida en términos de la que sí se conoce  $\rightarrow$  subsucesiones, y usar las propiedades de la sucesión conocida, que heredan las subsucesiones.

En efecto,

Considérese  $y_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , así se tiene la sucesión  $(y_n)_{n \geq 1}$ .

Notar que:  $\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2}}\right)^{n^2}}_{= x_{n^2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{= y_n}\right]^n$  o sea que  $x_{n^2} = (y_n)^n$  ( $\forall n \geq 1$ ),

con  $(x_{n^2})_{n \geq 1} = (x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$  una subsucesión de  $(x_n)$  con  $\left\{ \begin{array}{l} \varphi: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \varphi(n) = n^2 \end{array} \right.$  monótona creciente.

Tal como en la parte anterior, como  $y_n \rightarrow e$ , en virtud de la definición de convergencia, para  $n$  suficientemente grande,  $y_n$  es tan cercano a  $e = 2,718$  como se quiera; en particular:

$$y_n \geq 2, \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow y_n^n \geq 2^n, \quad n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x_{n^2} \geq 2^n, \quad n \rightarrow +\infty$$

$(\cdot)^n$  creciente,  $n$  fijo

$$x_{n^2} = y_n^n$$

O sea que la subsucesión  $(x_{n^2})$  no es acotada  $\Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$  no es acotada Q.E.D.  $\square$   
↑  
 Herencia

(P<sub>1</sub>) c)  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$

$t_n := \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$  y  $(t_n)_{n \geq 1}$  converge.

P.D.D.  $(t_{np})_n = (t_p, t_{2p}, \dots)$  converge a  $e^r$

Se sabe por "Herencia" que si una sucesión converge, entonces todas sus subsucesiones convergen al mismo límite, y eso podría ser útil ya que se tiene la hipótesis.

Nuevamente:

La sucesión  $\left(\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  no es "conocida" pero se parece a  $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  que sí es conocida porque converge a  $e$  (lemmatizado). Entonces la idea sería escribir la sucesión no conocida en términos de la que sí se conoce  $\rightarrow$  subsucesiones, y usar las propiedades de la sucesión conocida, que heredan las subsucesiones.

En efecto,

Considérese  $\gamma_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , así se tiene la sucesión  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ .

Notar que  $(t_{np})_n = (t_{\varphi(n)})_n$  es subsucesión de  $(t_n)_n$  con  $\begin{cases} \varphi: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \varphi(n) = np \end{cases}$  *monótona creciente.*

Notar que

$$\underbrace{\left(1 + \frac{r}{np}\right)^{np}}_{= t_{np}} = \left(1 + \frac{\frac{p}{q}}{np}\right)^{np} = \left(1 + \frac{\frac{1}{q}}{n}\right)^{np} = \left(1 + \frac{1}{nq}\right)^{np} = \left[\left(1 + \frac{1}{nq}\right)^{nq}\right]^{\frac{p}{q}} = \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{nq}\right)^{nq}}_{= \gamma_{nq}}\right]^r$$

o sea que  $t_{np} = (\gamma_{nq})^r \quad (\forall n \geq 1),$

donde  $(\gamma_{nq})_n = (\gamma_{\varphi(n)})_n$  es subsucesión de  $(\gamma_n)_n$  con  $\begin{cases} \varphi: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \varphi(n) = nq \end{cases}$  *monótona creciente.*

Como  $\gamma_n \rightarrow e \Rightarrow \gamma_{nq} \rightarrow e \Rightarrow (\gamma_{nq})^r \rightarrow e^r \Leftrightarrow t_{np} \rightarrow e^r$  Q.E.D. 

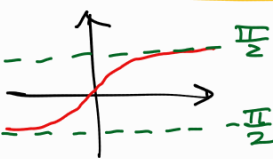
$\uparrow$  Herencia       $\uparrow$   $(\cdot)^r$  monótona       $\uparrow$   $t_{np} = (\gamma_{nq})^r$



REMINISCENCIAS

(P<sub>2</sub>) Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones y/o sus subsucesiones.

(P<sub>2</sub>) a)  $s_n := \arctg(n! e^n \cos(n^2))$

El gráfico de  $\arctg$  es  ... entonces  $\arctg$  es acotada!

Bolzano-Weierstrass: sucesión acotada  $\Rightarrow$  subsucesión convergente

En efecto,

Como  $|\arctg(x)| \leq \frac{\pi}{2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow$  lo es en particular para  $n! e^n \cos(n^2), n \in \mathbb{N}$ .

Luego, en virtud del Teorema de Bolzano-Weierstrass, como es una sucesión acotada, tendrá una subsucesión convergente.  $\square$

(P<sub>2</sub>) b)  $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 5$

Por "Herencia", basta exhibir 2 subsucesiones que convergen a distintos valores para asegurar que la sucesión es divergente; o bien, que basta que  $\exists$  1 subsucesión diverg.

$(-1)^n_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión conocida por ser no convergente.

En efecto,

Notar que  $u_{2n+1} = u_{\varphi(n)} = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) + 5 = (-1)^n + 5$  es una subsucesión de  $u_n$

$$\text{con } \begin{cases} \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \varphi(n) = 2n+1 \end{cases}$$

y una subsucesión es una sucesión divergente pues:

$$\begin{cases} u_{\varphi(n)}_{2n} = (-1)^{2n} + 5 = 1 + 5 = 6 \quad (\forall n) \Rightarrow u_{\varphi(n)}_{2n} =: u_{\varphi(n)}_{\varphi_1(n)} \rightarrow 6 & \text{tomar términos de } u_{\varphi(n)} \text{ con índice PAR} \\ u_{\varphi(n)}_{2n+1} = (-1)^{2n+1} + 5 = -1 + 5 = 4 \quad (\forall n) \Rightarrow u_{\varphi(n)}_{2n+1} =: u_{\varphi(n)}_{\varphi_2(n)} \rightarrow 4 & \text{tomar términos de } u_{\varphi(n)} \text{ con índice IMPAR} \end{cases}$$

Es decir  $u_{\varphi(n)}$  admite dos sucesiones que convergen a distintos límites  $\Leftrightarrow u_{\varphi(n)}$  divergente.

Luego, como existe una subsucesión divergente,  $(u_{\varphi(n)})_n \Rightarrow (u_n)_n$  es divergente.  $\square$



(P<sub>2</sub>) c)  $v_n := \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Por "Herencia", basta exhibir 2 subsucesiones que convergen a distintos valores para asegurar que la sucesión es divergente; o bien, que basta que  $\exists$  1 subsucesión diverg.

En efecto,

Notar que las subsucesiones de  $v_n$  con  $\begin{cases} \varphi_1: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \varphi_1(n) = 2n \end{cases}, \begin{cases} \varphi_2: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \varphi_2(n) = 2n+1 \end{cases}$  son tales que:

$$* v_{2n} = v_{\varphi_1(n)} = \left(-1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left(-\left[1 - \frac{1}{2n}\right]\right)^{2n} = \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow v_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e //$$

$$* v_{2n+1} = v_{\varphi_2(n)} = \left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(-\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right]\right)^{2n+1} = \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = -\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

$$\Rightarrow v_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -e //$$

Como  $e \neq -e$  y  $(v_n)_n$  admite subsucesiones que convergen a distintos límites  $\Rightarrow v_n$  diverge. ▣

(P<sub>2</sub>) d)  $r_n := \frac{2025^{5n}}{(5n)!}$

Por "Herencia", el límite de una sucesión convergente es el mismo de toda subsucesión; basta identificar una subsucesión de una sucesión convergente cuyo límite se conozca.

En efecto,

Notar que  $r_n = \frac{2025^{5n}}{(5n)!} = \frac{2025^{\varphi(n)}}{\varphi(n)!}$  con  $\begin{cases} \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \varphi(n) = 5n \end{cases}$  creciente monótona.

Si  $x_n = \frac{2025^n}{n!} \Rightarrow r_n = x_{\varphi(n)}$  i.e.  $r_n$  es subsucesión de  $x_n$ , generada por  $\varphi(n)$ .

Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$  ( $n!$  crece más rápido que  $\beta^n, \beta > 0$ )  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$  ▣

↑  
"Herencia"



¿HERENCIA?

$P_3$   $(u_n) \subseteq \mathbb{R}$  sucesión

$P_3$  a) P.D.Q.  $(u_{2n}), (u_{2n+1})$  convergen al mismo límite  $\Rightarrow (u_n)$  converge

 Si se conoce la convergencia de 2 sucesiones (subsucesiones) t.q. sus índices son partición de los índices de la sucesión, se puede reconstruir convergencia!

En efecto,

Por hipótesis, existe  $l \in \mathbb{R}$  t.q. 
$$\begin{cases} u_{2n} =: u_{\varphi_1(n)} \rightarrow l \\ u_{2n+1} =: u_{\varphi_2(n)} \rightarrow l \end{cases}$$

En virtud de la definición de convergencia:

para  $\varepsilon > 0$ , existen instantes  $n_1 := n_1(\varepsilon), n_2 := n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  t.q.

$$\begin{cases} |u_{2n} - l| \leq \varepsilon & \forall n \geq n_1 & (1) \\ |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon & \forall n \geq n_2 & (2) \end{cases}$$

Se quiere ver que existe  $\tilde{l} \in \mathbb{R}$  t.q.  $u_n \rightarrow \tilde{l}$ .

Es decir, hay que exhibir  $N_0 \in \mathbb{N}$  t.q. dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall N \geq N_0 : |u_N - \tilde{l}| \leq \varepsilon$ .

Basta tomar algún instante <sup>"apropiado"</sup> en que ambas convergencias (1) y (2) se satisfagan simultáneamente, como  $N_0 := \max(2n_1, 2n_2 + 1) \Rightarrow \begin{cases} N_0 \geq 2n_1 \\ N_0 \geq 2n_2 + 1 \end{cases}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Para  $N \in \mathbb{N}, N \geq N_0$

\* si  $N$  es par, se puede reescribir  $N = 2n, n \in \mathbb{N}$ .

Como  $N \geq N_0 \geq 2n_1 \Rightarrow$  se tiene (1):  $|u_{2n} - l| \leq \varepsilon \xLeftrightarrow |u_N - l| \leq \varepsilon$ .  $N = 2n$

\* si  $N$  es impar,  $N = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$ , de forma análoga.

Como  $N \geq N_0 \geq 2n_2 + 1 \Rightarrow$  se cumple (2):  $|u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon \xLeftrightarrow |u_N - l| \leq \varepsilon$ .  $N = 2n + 1$

De lo anterior,  $(u_n)_N$  converge y lo hace a  $l$ , demostrando lo pedido.  $\square$

 Vimos que para ver la convergencia de una sucesión, basta ver que las subsucesiones de índices pares e impares sean convergentes al mismo límite.



**P3 b)** P.D.Q.  $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$  convergen  $\Rightarrow (u_n)$  converge

Como no hay mucha info. de las sucesiones, la idea será obtener esta info. jugando con subsucesiones comunes! y usar la condición suficiente de la parte a).

En efecto,

Por hipótesis, existen  $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}$  t.q.  $u_{2n} \rightarrow l_1$ ,  $u_{2n+1} \rightarrow l_2$ ,  $u_{3n} \rightarrow l_3$ .

Notar que:

\*  $u_{6n} = u_{2(3n)} = u_{2\varphi_1(n)}$  es subsucesión de  $(u_{2n})$ , generada por  $\begin{cases} \varphi_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \varphi_1(n) = 3n \end{cases}$  (1)  
monótona creciente.

\*  $u_{6n} = u_{3(2n)} = u_{3\varphi_2(n)}$  es subsucesión de  $(u_{3n})$ , generada por  $\begin{cases} \varphi_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \varphi_2(n) = 2n \end{cases}$  (2)  
monótona creciente.

Por "Herencia", las subsucesiones de sucesiones convergentes convergen al mismo límite, entonces:

$$\left. \begin{aligned} & * \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = l_1, \text{ por (1)} \\ & * \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n} = l_3, \text{ por (2)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow l_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n} = l_3 //$$

De forma análoga:

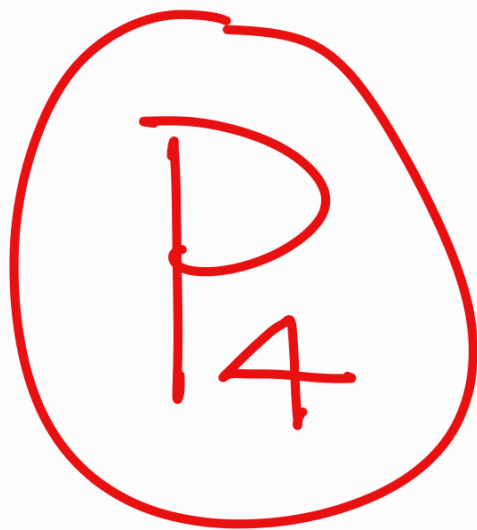
\*  $u_{6n+3} = u_{2(3n+1)+1} = u_{2\varphi_1(n)+1}$  es subsucesión de  $(u_{2n+1})$ , generada por  $\begin{cases} \varphi_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \varphi_1(n) = 3n+1 \end{cases}$  (i)  
monótona creciente

\*  $u_{6n+3} = u_{3(2n+1)} = u_{3\varphi_2(n)}$  es subsucesión de  $(u_{3n})$ , generada por  $\begin{cases} \varphi_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \varphi_2(n) = 2n+1 \end{cases}$  (ii)  
monótona creciente

Luego, por "Herencia", el límite de una sucesión es el mismo de las subsucesiones, entonces:

$$\left. \begin{aligned} & * \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = l_2, \text{ por (i)} \\ & * \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n} = l_3, \text{ por (ii)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow l_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n+3} = l_3 //$$

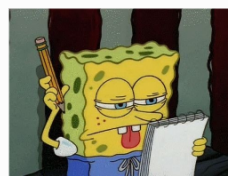
Por lo anterior,  $l_1 = l_2 = l_3 =: l$ ; en particular  $(u_{2n})$  y  $(u_{2n+1})$  convergen al mismo valor, y por la parte **P3 a)**, entonces  $(u_n)$  converge a  $l$ .



CONTINUIDAD

# ¿cómo ocupan la caracterización $\epsilon$ - $\delta$ de continuidad?

(Secreto entre nosotr@s!! No le cuenten esto a @s matemátic@s!!)



La caracterización  $\epsilon$ - $\delta$  de continuidad en un punto  $a$ , para una función  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la siguiente:

$f$  es continua en  $a \in A$  (en todo  $A$ )

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (\forall a \in A)$$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0) : |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

O sea, en la medida que se pueda controlar las imágenes dada una precisión entre las preimágenes, la función es continua.

Para mostrar que una función es continua por esta caracterización, hay que exhibir el  $\delta$ , el cual solo puede depender de  $\epsilon$  y el punto  $a$ .

Si solo depende de  $\epsilon$ , más adelante verán que eso se llama uniforme continuidad).

Cuando vemos una demostración, muchas veces no es claro cómo deducir el valor de  $\delta$ , pues para que tenga sentido argumentativo, este es definido al comienzo, y suele tener formas "no evidentes" que a uno lo hacen pensar: how?!

Entonces, la verdad, es que "tras bambalinas", uno deja "en blanco" el valor de  $\delta$  hasta que sabe, más avanzado en la demostración, cuánto conviene que valga, para lograr el objetivo  $\rightarrow$  que  $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$ .

Para esto, entonces: { se fija  $a$  don se estudiará continuidad.

se instata  $\epsilon > 0$  arbitrario.

se toma  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  t.q.  $|x - a| \leq \delta =$

se verifica, estudiando  $|f(x) - f(a)| = \dots = |x - a|$  {algo}  $\leq \epsilon$

se concluye que la función es continua.

elijo  $\delta$  tal que  $|x - a| \leq \delta \Rightarrow$

por elección de  $\delta$

Naturalmente, esto solo sirve si la función es continua en el punto!

Si no, significa que las imágenes no pueden ser controladas indep. de lo cercano de preimágenes (esto se lee de la negación de continuidad).

P<sub>4</sub> Usando def. de continuidad por límite ( $\epsilon$ - $\delta$ ), resolver los sgtes. problema.

P<sub>4</sub> a) P.D.Q.  $\sqrt{x}$  es continuo en  $(0, +\infty)$

💡 encontrar  $\delta$  apropiado para acotar imágenes (leer plana anterior)

En efecto,

$$\text{Sea } \begin{cases} f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

Se verá que  $f$  es continuo en  $(0, +\infty)$  por caracterización  $\epsilon$ - $\delta$ .

Sea  $a \in (0, +\infty)$  punto donde se estudiará continuidad.

Sea  $\epsilon > 0$ .

Se tomará  $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0$  t.q.  $|x-a| \leq \delta = \epsilon\sqrt{a} \quad \forall x \in [0, +\infty)$

Así,  $|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}|$  ... def.  $f$

$$= \left| (\sqrt{x} - \sqrt{a}) \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \quad \dots \text{racionalizando}$$

$$= \left| \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$= |x-a| \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} = |x-a| \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \quad \dots \begin{aligned} &\sqrt{x} \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \\ &\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a} \end{aligned}$$

$$\leq |x-a| \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \dots \begin{aligned} &\sqrt{x} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$\leq \epsilon\sqrt{a} \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \dots |x-a| \leq \delta = \epsilon\sqrt{a}$$

$$= \epsilon //$$

Sigue que  $f$  es continuo en todo punto  $a \in (0, +\infty)$  i.e.  $f$  es continuo en  $(0, +\infty)$ .

(P4) b) Def. [Lipschitz]

$f$  es  $L$ -Lipschitz  $\Leftrightarrow (\exists L > 0)(\forall x, y \in \text{Dom}(f)): |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

P.D.Q. Lipschitz  $\Rightarrow$  continua

💡 usar def. Lipschitz para encontrar  $\delta$  apropiado para acotar imágenes

En efecto,

Sea  $f$  una función Lipschitz en su dominio.

$\Rightarrow (\exists L > 0)(\forall x, y \in \text{Dom}(f)): |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$  ... def. Lipschitz

Se quiere ver que  $f$  es continua, en su dominio.

Sea  $a \in \text{Dom}(f)$ .

Sea  $\varepsilon > 0$

Basta tomar  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  t.q.  $|x - a| \leq \delta := \frac{\varepsilon}{L} \quad (\forall x \in \text{Dom}(f))$

Así,  $|f(x) - f(a)| \leq L|x - a|$  ...  $f$  es Lipschitz

$$\leq L \frac{\varepsilon}{L} \quad \dots |x - a| \leq \delta := \frac{\varepsilon}{L}$$

$$= \varepsilon //$$

En virtud de la caracterización  $\varepsilon$ - $\delta$  de continuidad de  $f$ ,  $f$  es continua.  $\square$



(P<sub>4</sub>) c) P.D.Q.  $f$  continua en  $x=0$   
 P.D.Q.  $f$  no es Lipschitz en  $[0,1]$  } veremos que continuidad  
 no siempre implica Lipschitz!  
 (o sea, la recíproca no es cierta siempre).

💡 aplicar def.  $\varepsilon$ - $\delta$  en un punto (ahora una imagen tendrá valor explícito)

En efecto,

Sea  $a=0$ , punto donde se estudiará continuidad.

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Basta tomar  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  t.q.  $|x-a| = |x-0| = |x| \leq \delta := \varepsilon^2$   $\iff x \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{x} \leq \varepsilon$   $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$   
 $\xrightarrow{x \geq 0 \Rightarrow |x| = x}$

Así  $|f(x) - f(a)| = |f(x) - f(0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} \leq \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon, \therefore f$  continua en  $0$ ,  
 $\xrightarrow{\sqrt{x} \geq 0}$   $\xrightarrow{x \leq \delta, f \text{ monótona}}$

💡 Para ver que no es Lipschitz basta ver que las imágenes no son acotadas

En efecto,

hacia contradicción:

Si  $f$  fuese Lipschitz  $\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ , algún  $L > 0$ , para todo  $x, y \in [0, +\infty)$   
 $\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq L$ , algún  $L > 0$ ,  $\forall x, y \in [0, +\infty), x \neq y$

O sea, la fracción  $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right|$  sería acotada, para todo  $x, y \in [0, +\infty), x \neq y$

Si se encontrase algunos  $x, y \in [0, +\infty), x \neq y$  t.q.  $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right|$  sea divergente, lo anterior será falso, y llevaría a un absurdo.

Notar que  $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| = \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x-y} \right| = \left| \frac{\cancel{\sqrt{x}} - \sqrt{y}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\cancel{\sqrt{x}} - \sqrt{y})} \right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

y para  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \rightarrow +\infty$   $\nearrow$  pues se asumió que era acotada.

Como se llegó a una contradicción, el supuesto es Falso y su negación es cierta.  
 Sigue que  $f$  no es Lipschitz en  $[0, +\infty)$   $\square$



(P4) d)  $f, g$  continuas.

(P4) d) i) P.D.Q.  $j(x) = x^2$  es continua

💡 encontrar  $\delta$  apropiado para acotar imágenes

En efecto,

Sea  $a \in \mathbb{R}$  punto donde se estudiará continuidad.

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Basta tomar  $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$  t.q.  $|x - a| \leq \delta := \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|} \right\} (\forall x \in \mathbb{R})$ .

💡 es posible controlar la tolerancia tomando el mínimo!  $\rightarrow$  se asume  $|x - a| \leq 1$

Así  $|j(x) - j(a)| = |x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)|$  ... suma por su diferencia

Esa expresión es útil porque aparece  $x - a$ , que está controlado por  $\delta$ .

De lo único que hay que asegurarse es que el otro término no "moleste mucho", y para hacer esto, lo estándar para "controlar" otros factores es imponer que los puntos estén cerca t.q.  $|x - a| < 1$ , independiente de  $\delta$ , o sea  $\delta \leq 1$

$$\begin{aligned} &= |(x - a)(\underbrace{x - a}_{\text{a.k.a. -hipótesis}} + 2a)| \\ &= |x - a| |(x - a) + 2a| \dots | \alpha \beta | = |\alpha| |\beta| (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \\ &\leq |x - a| (|x - a| + |2a|) \dots \text{desigualdad triangular} \\ &= |x - a| (|x - a| + |2a|) \quad \downarrow |2a| = |a| (\forall a \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

En este paso es cómodo usar la condición de control:  $|x - a| \leq 1$ , pero también hay que usar la cota usual para manejarla:  $|x - a| \leq \delta$

$$\begin{aligned} &\leq \delta (1 + |2a|) \quad \begin{array}{l} * |x - a| \leq 1 \\ * |x - a| \leq \delta \end{array} \\ &\leq \varepsilon \quad \dots \quad \delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|} \right\} \end{aligned}$$

En virtud de la caracterización  $\varepsilon$ - $\delta$  de continuidad de  $j$ ,  $j$  es continua.  $\square$

(P4) b) P.D.Q.  $K(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$  es continua

encontrar  $\delta$  conveniente para acotar imágenes, y controlar otros términos

En efecto,

Sea  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  punto donde se estudiará continuidad.

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Basta tomar  $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$  t.q.  $|x - a| \leq \delta := \min \left\{ \frac{|a|}{2}, \frac{|a|^3 \varepsilon}{24} \right\} (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ .

De esta forma:  $|K(x) - K(a)| = \left| \left( 1 + \frac{4}{x^2} \right) - \left( 1 + \frac{4}{a^2} \right) \right|$

$$= \left| \frac{4}{x^2} - \frac{4}{a^2} \right|$$

$$= 4 \left| \frac{a^2 - x^2}{x^2 a^2} \right|$$

$$= 4 \frac{|(a-x)(a+x)|}{x^2 a^2}$$

$$= 4 \frac{|a-x| |a+x|}{x^2 a^2}$$

$$\leq 4 \frac{\delta |a+x|}{x^2 a^2}$$

$$|a-x| = |x-a| \leq \delta$$

$$\leq 4 \left( \frac{|a|}{x^2 a^2} + \frac{|x|}{x^2 a^2} \right) \delta$$

desigualdad triangular

$$= 4 \left( \frac{1}{x^2 |a|} + \frac{1}{|x| a^2} \right) \delta$$

$$\beta^2 = |\beta|^2 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{|x|} \leq \frac{2}{|a|}$$

$$\leq 4 \left( \frac{4}{|a|^2} \cdot \frac{1}{|a|} + \frac{2}{|a|} \cdot \frac{1}{a^2} \right) \delta$$

$$= 4 \left( \frac{4}{|a|^3} + \frac{2}{|a|^3} \right) \delta$$

$$= \frac{24}{|a|^3} \delta$$

$$\delta \leq \frac{\varepsilon |a|^3}{24}$$

$$\leq \varepsilon //$$

! aquí es cuando una nota que se requiere controlar  $\frac{1}{x}$ . Por ejemplo, se quiere  $\frac{1}{|x|} \leq \frac{2}{|a|}$

$$\Leftrightarrow |a| \leq 2|x|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a|}{2} \leq |x|$$

$$\Leftrightarrow |x-a| \leq \delta \leq \frac{|a|}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{|a|}{2} \leq x-a \leq \frac{|a|}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{|a|}{2} + a \leq x \leq \frac{|a|}{2} + a$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a|}{2} \leq x \leq \frac{3|a|}{2}$$

se impone que  $\delta \leq \frac{|a|}{2}$

i.e.,  $\delta = \min \left\{ \frac{|a|}{2}, \dots \right\}$

En virtud de la caracterización  $\varepsilon$ - $\delta$  de continuidad de  $K$ ,  $K$  es continua.  $\square$

$\textcircled{P_4}$  e) P.D.S.  $l(x) = 3x^{\frac{1}{4}}$  es continua  $\rightarrow$  Dominio es  $[0, +\infty)$

$\textcircled{P_5}$  tomar  $\delta$  apropiado para acotar imágenes y ver caso  $\forall x \in (0, +\infty)$

En efecto,

\* Sea  $a=0$  punto donde se quiere estudiar continuidad.

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Basta tomar  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  t.q.  $|x-a| = |x-0| \leq \delta := \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^4$  ( $\forall x \in [0, +\infty)$ )

$$\text{Así } |l(x) - l(a)| = |l(x) - l(0)| = |3x^{\frac{1}{4}} - 0|$$

$$= 3x^{\frac{1}{4}} \dots x^{\frac{1}{4}} \geq 0$$

$$\leq 3\delta^{\frac{1}{4}} \dots x \leq \delta \text{ y } (\cdot)^{\frac{1}{4}} \text{ monótona}$$

$$\leq \varepsilon, \dots \delta = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^4$$

En virtud de la caracterización  $\varepsilon$ - $\delta$  de continuidad de  $l$ ,  $l$  es continua en  $0$ .

\* Sea  $a \in (0, +\infty)$  punto donde se quiere estudiar continuidad.

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Basta tomar  $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$  t.q.  $|x-a| \leq \delta := \frac{1}{3} a^{\frac{3}{4}} \varepsilon$  ( $\forall x \in [0, +\infty)$ )

$$\text{Así } |l(x) - l(a)| = |3x^{\frac{1}{4}} - 3a^{\frac{1}{4}}|$$

} factorizando

$$= 3|\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}|$$

$$= 3\left|\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}\right| \cdot \frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a})}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a})} \dots \text{racionalizar } \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}$$

$$= 3\left|(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}) \cdot \frac{1}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a})}\right| \dots \text{suma por su diferencia}$$

$$= 3\left|(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}) \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \cdot \frac{1}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a})}\right| \dots \text{racionalizar } \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}$$

$$= 3\left|\frac{x-a}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a})}\right| \dots \text{suma por su diferencia} \quad \textcircled{*}$$

Para acotar el denominador, basta notar que quedará una suma de 4 términos (los términos cruzados), todos positivos, donde uno es  $\sqrt{a} \sqrt{a} = a^{\frac{3}{4}}$ , o sea:  $\square + \Delta + \Sigma + a^{\frac{3}{4}} \geq a^{\frac{3}{4}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\square + \Delta + \Sigma + a^{\frac{3}{4}}} \leq \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}$$

Mayorando  $\otimes$ :  $\leq 3|x-a| \cdot \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}$

$$\leq 3\delta \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} \quad \delta = \frac{1}{3} a^{\frac{3}{4}}$$

$$\leq \varepsilon //$$

En virtud de la caracterización  $\varepsilon$ - $\delta$  de continuidad de  $l$ ,  $l$  es continua //

Se ha demostrado que  $l$  es continua en  $\{0\} \cup (0, +\infty)$  i.e.  $l$  es continua.  $\square$

$(P_4)$  e) d) PROPUESTOS  $\smile$   $\rightarrow$  pero les doy un contexto

P.D.Q.  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$  son continuas, con  $f, g$  continuas

$$\downarrow$$

$$\max(f, g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}; \text{ análogo para } \min(f, g)$$

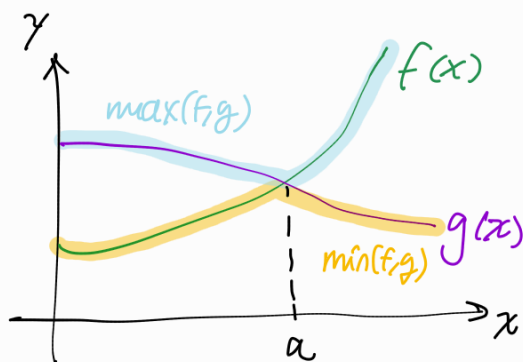
$\text{💡}$  Para entender el problema se puede ver un caso particular (s.p.d.g.)

Si en  $x=a$ ,  $f(a)=g(a)$ , por el diagrama, la continuidad no es "obvia". De hecho:

cuando  $f(x) \neq g(x)$ ,  $\min(f, g)$  y  $\max(f, g)$

son, o bien igual a  $f$ , o bien igual a  $g$ , y como  $f, g$  continuas  $\Rightarrow \min(f, g)(x)$  y  $\max(f, g)(x)$  son continuas ( $\forall x \neq a$ ).

Entonces... basta estudiar continuidad en  $a$  t.q.  $g(a)=f(a)$ .



Se puede hacer con  $\varepsilon$ - $\delta$  y sucesiones. Enjoy!!

También podrían usar la caracterización de  $\min, \max$  con valor absoluto, y usar álgebra y composición de funciones  $\Downarrow$



CERCA

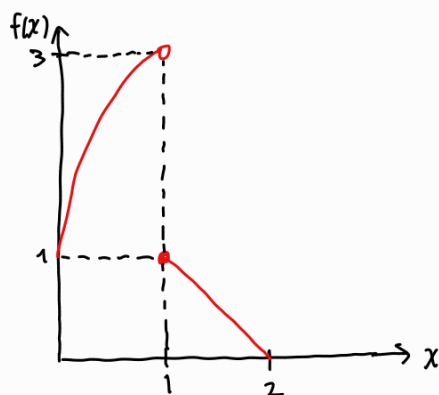


(P3) Usando la caracterización de continuidad con sucesiones:

(P5) a)  $f(x) = \begin{cases} 1+2\sqrt{x}, & x < 1 \\ 2-x, & x \geq 1 \end{cases}$  ¿f es continua en 1?



Siempre es útil observar el gráfico de la función (aunque no basta como argumento, pero ayuda a visualizar si existiese una discontinuidad).



una función f es continua en a si  $(\forall (x_n) \subseteq A): x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

o sea que basta exhibir una sucesión convergente al punto de interés de estudio de continuidad t.q. la sucesión de imágenes por la función no sea convergente a la imagen del límite para concluir que no es continua en el punto.

En efecto,

Notar que  $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$  es t.q.  $x_n \rightarrow 1$  y  $x_n < 1$ .

Pero  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = 3$  y  $f(1) = 1$ .

Luego, como  $3 \neq 1$ , en virtud de la caracterización de continuidad por sucesiones, sigue que f no es continua en 1.

Bonus: verificando que NO es continua por E-δ:

Hacia contradicción, Supongase que f es continua en  $x=1$ .

Entonces, en particular para  $\varepsilon=1$ , existe  $\delta>0$  para el que  $|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(1)|=|f(x)-1|<1$   
 $\Rightarrow -1 < f(x)-1 < 1$   
 $\Leftrightarrow 0 < f(x) < 2$

Sin embargo,  $x = \max\left\{\frac{1}{4}, 1 - \frac{\delta}{2}\right\}$  satisface  $|x-1| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$  y  $f(x) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} = 2$

pero  $f(x) < 2$



(P5) b) P.D.Q.  $g(x) = \frac{x+x^3+5x^5}{1+x^2}$  es continua

Para usar def. de continuidad por sucesiones, se ocupan las reglas de álgebra de sucesiones convergentes.

Def:  $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n^k \rightarrow x^k \ (\forall k)$

(C.B.)  $k=0 \mid x_n^0 \rightarrow x^0 \Leftrightarrow 1 \rightarrow 1 //$

$k=1 \mid x_n^1 \rightarrow x^1 \Leftrightarrow x_n \rightarrow x //$

(H.G.)  $x_n^k \rightarrow x^k \ \forall k \geq 2$

(P.D.Q.)  $x_n^{k+1} \rightarrow x^{k+1}$

En efecto:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^k x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^k \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^k x = x^{k+1}$   
álgebra de límites  
existe

En efecto,

Sea  $a \in \text{Dom}(f)$  arbitrario (donde se quiere ver continuidad)

Sean  $f(x) = x+x^3+5x^5$ ,  $h(x) = 1+x^2$ .

Sea  $(x_n)_n \subseteq \text{Dom}(f)$  t.q.  $x_n \rightarrow a$ .

\*Notar que:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [x_n + x_n^3 + 5x_n^5]$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^3 + 5 \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^5$$
$$= a + a^3 + 5a^5 = f(a)$$

$\therefore f$  es continua  $(\forall a \in \text{Dom}(g))$

\*Análoga se:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [1 + x_n^2]$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2$$
$$= 1 + a^2 = h(a)$$

$\therefore h$  es continua  $(\forall a \in \text{Dom}(g))$

Por álgebra de funciones continuas,  $\frac{f}{h}$  es continua i.e.  $g$  es continua.  $\square$

$P_6$

REPARANDO ANDO

Les recomiendo ver los gráficos en [GeoGebra](#) para que verifiquen el valor de la reparación!

P6 a) Def. [discontinuidad reparable]

El límite de una función en un punto existe, pero la función no está definida o bien la imagen de la función no coincide con el límite.

Estudiar continuidad de las funciones  $\rightarrow$  dar dominio!

Reparar, si es posible.



la clave está en que si  $f$  continua en  $a$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



lo anterior será posible en la medida que existan los límites laterales, o sea:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \exists = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

P6 a) i)  $f(x) = \frac{x \ln(x)}{x-1}$

En efecto,

El dominio es  $\mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$ .

Se buscará continuidad en  $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ , o sea, definiendo adecuadamente  $f$  en 1.

Notar que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x)}{x-1} \left( = \frac{1-0}{1-1} = \frac{0}{0} \right)$  Forma de L'Hopital

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) + x \frac{1}{x}}{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) + 1 \quad (= 0 + 1 = 1)$$

$$= 1 \checkmark$$

Basta definir  $f(1) \stackrel{!}{=} 1$ .  $\square$

(P<sub>6</sub>) a) ii)  $g(x) = 1 + xe^{\frac{1}{x}}$

En efecto,

El dominio es  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Se quisiera definir  $g$  en 0 para que fuese continua.

Notar que

$$\star \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [1 + xe^{\frac{1}{x}}] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [1] + \lim_{x \rightarrow 0^-} [xe^{\frac{1}{x}}] = 1$$



$$\star \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + xe^{\frac{1}{x}}] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1] + \lim_{x \rightarrow 0^+} [xe^{\frac{1}{x}}] = +\infty$$



$$\text{luego } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \nexists$  y no es posible reparar  $g$  en 0.  $\square$

(P<sub>6</sub>) a) iii)  $h(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{\arctan g(x)}{x}$

En efecto,

El dominio es  $[-1, 1] \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ .

Se quisiera definir  $h$  en 0 para que fuese continua.

$$\text{Nota que } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} \frac{\arctan g(x)}{x} ; \star \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} = 1$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan g(x)}{x} \star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan g(x)}{x} \left( = \frac{0}{0} \right) \text{ Formula de L'Hopital} \\ &\xrightarrow{\text{álgebra de límites convergentes}} = 1 - 1 = 1 \quad \text{L'H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1 \end{aligned}$$

Basta definir  $h(x) \doteq 1$ .  $\square$

(P6) a) iv)  $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$

En efecto,

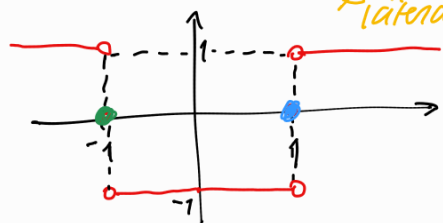
Notar que por la naturaleza de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2n}$ ,  $F$  a priori existe en  $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ :

\* Si  $|x| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2n} = 0 \Rightarrow F(x) = -1$ , por álgebra de límites.

\* Si  $|x| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0 \Rightarrow F(x) \cdot \frac{1}{x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = 1 \Rightarrow F(x) = 1$ , ídem.

\* Si  $x \in \{-1, 1\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2n} = 1 \Rightarrow F(x) = 0$ , ídem.

O sea  $\text{Dom}(F) = \mathbb{R}$  y  $F(x) = \begin{cases} 0, & x = -1 \\ -1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$



intuición dice que  $\nexists$  límites laterales en  $\pm 1$

Notar que

$$\left. \begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) &= 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} F(x) = \nexists \\ * \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) &= -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \nexists \end{aligned} \right\} \therefore F \text{ no es continua en } \{-1, 1\} \text{ y no es posible repararlo.}$$

(P6) a) v)  $G(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$

En efecto,

El dominio de  $G$  es  $(-1, 1) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ .

Notar que hay una indefinición en  $x=0$ , y se quisiera reparar ahí.

Notar que  $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} \left( = \frac{0}{0} \right)$  Fórmula de L'Hopital

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-x}(-1)}{\frac{1}{1+x}(1)} \left( = \frac{\frac{-1}{1-0}}{\frac{1}{1+0}} = \frac{-1}{1} = -1 \right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Basta definir  $G(0) \stackrel{!}{=} -1$ .

(P6) a) i)  $H(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$

En efecto,

El dominio es  $\mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \overbrace{\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}^{\text{ceros de sen(x)}}$ .

Se quisiera ver la continuidad en  $x=0$ :

Notar que  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} \right] \left( = \frac{0-0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \right) \text{ Formula de L'Hopital}$$

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)} \right] \left( = \frac{1-1}{0+0 \cdot 1} = \frac{0}{0} \right) \text{ Formula de L'Hopital}$$

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) + x(-\sin(x))} \right] \left( = \frac{-0}{1+1+0 \cdot \sin(0)} = \frac{0}{2} = 0 \right)$$

$$= 0 //$$

Basta definir  $H(0) \stackrel{!}{=} 0$ .  $\square$

(P6) b) Determinan  $a, b \in \mathbb{R}$  en cada función t.q. sean continuas



se puede usar álgebra y composición de funciones continuas en dominios para argumentar continuidad; para los saltos: la def. del límite puntual

(P6) b) i)  $M(x) = \begin{cases} bx^2, & x \leq 1 \\ \frac{\sin(a(x-1))}{\ln(x)}, & x > 1 \end{cases}$

En efecto,

\*  $M(x)$  es continua en  $(-\infty, 1)$  pues  $bx^2$  es continua ( $\forall b \in \mathbb{R}$ ), por álgebra de funciones continuas

\*  $M(x)$  es continua en  $(1, +\infty)$  pues  $\frac{\sin(a(x-1))}{\ln(x)}$  es continua ( $\forall a \in \mathbb{R}$ ), por álgebra de y composición de funciones continuas ( $\sin(\cdot)$ ,  $x$ ,  $\ln(\cdot)$ ) con  $\ln(x) \neq 0$  por  $x > 1$ .



\* solo falta estudiar en  $x=1$ :

$$M(x) \text{ continua en } x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} M(x) = M(1) \stackrel{\text{def. } M}{=} b \cdot 1^2 = b$$

Y dicho límite existe si y solo si los límites laterales coinciden:

$$* \lim_{x \rightarrow 1^-} M(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} b x^2 = b \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = b \cdot 1 = b //$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^+} M(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sec(a(x-1))}{\ln(x)} \left( = \frac{\sec(a \cdot 0)}{\ln(1)} = \frac{0}{0} \right) \text{ Fórmula de L'Hopital}$$

$$\stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos(a(x-1)) a}{\frac{1}{x}} \left( = \frac{\cos(a \cdot 0) \cdot a}{\frac{1}{1}} = \frac{1 \cdot a}{1} = a \right)$$

$$= a //$$

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow 1^-} M(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} M(x) \Leftrightarrow b = a //$$

Aún, basta tomar cualesquiera  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $a=b$  para la continuidad;  
por ejemplo  $a=5=b$  //

$$\textcircled{P_5} \text{ b) ii) } J(x) := \begin{cases} \frac{2x^2}{x+a}, & x < a \\ 2x - e^{x-a}, & x \geq a \end{cases}$$

En efecto:

\*  $J(x)$  es continua en  $(-\infty, a)$  pues  $\frac{2x^2}{x+a}$  ( $x \neq -a$ ) es continua por álgebra y composición de funciones continuas ( $2 \cdot, x^2, x, +$ ).

\*  $J(x)$  es continuo en  $(a, +\infty)$  pues  $2x - e^{x-a}$  es continua por álgebra y composición de funciones continuas (resta, potenciación, lineal, exponencial, exp(lineal)).

$$* \text{ en el salto de } x=a, J \text{ es continua si } \lim_{x \rightarrow a} J(x) = J(a) \stackrel{\text{def. } J}{=} 2a - e^{a-a} = 2a - 1$$

y dicho límite existe si sus límites laterales son iguales:

$$* \lim_{x \rightarrow a^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{2x^2}{x+a} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

$$* \lim_{x \rightarrow a^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} [2x - e^{x-a}] = 2a - e^0 = 2a - 1$$

Luego:  $\lim_{x \rightarrow a^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} T(x) \Leftrightarrow a = 2a - 1 \Leftrightarrow 1 = a //$

Segue que  $a=1$  para que  $T$  sea continua.  $\square$

(P5) b) iii)  $T(x) := \begin{cases} \frac{e^{3bx}-1}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{\sin(2ax)}{x}, & x > 0 \end{cases}$

En efecto,

En  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  la función  $T$  es continua por álgebra y composición de funciones continuas ( $\sin(\text{lineal})$ ,  $\exp(\text{lineal})$ ,  $\text{lineal}$ , resta, división, ponderación), y está bien definida pues  $x \neq 0$ .

Falta ver en los saltos de  $x=0$ :

$T$  es continua en 0 si  $\lim_{x \rightarrow 0} T(x) = T(0) = 0$ . def. T

y este límite existe si los límites laterales son iguales:

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{3bx}-1}{x} \left( = \frac{e^0-1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \right) \text{ Formula de L'Hopital}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3be^{3bx}}{1} \left( = \frac{3be^0}{1} = \frac{3b \cdot 1}{1} = 3b \right)$$

$$= 3b$$

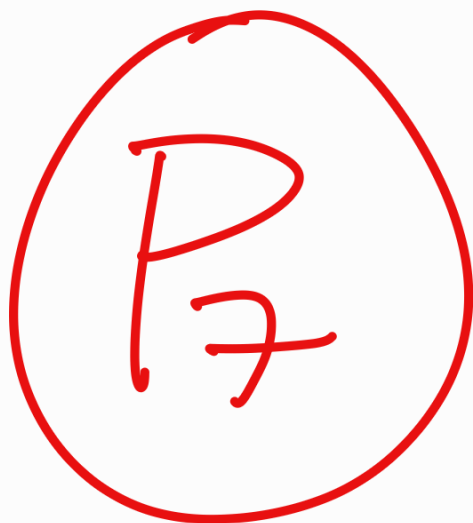
$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2ax)}{x} \left( = \frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0} \right) \text{ Formula de L'Hopital}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2a \cos(2ax)}{1} \left( = \frac{2a \cdot \cos(0)}{1} = 2a \right)$$

Luego:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} T(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) \Leftrightarrow 3b \stackrel{!}{=} 1 \stackrel{!}{=} 2a$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \wedge b = \frac{1}{3}$  y se tiene la continuidad.  $\square$

en los casos anteriores, no de los límites era directo (punto).



ACERCAMIENTO

(P7)  $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  función continua  
 $(a_n) \subseteq [a, b]$  sucesión no necesariamente convergente.

(P7) a) P.D.Q.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l \Rightarrow (\exists x_0 \in [a, b]): f(x_0) = l$

En efecto,

Como  $(a_n) \subseteq [a, b]$  y  $[a, b]$  es acotado  $\Rightarrow (a_n)$  es sucesión acotada.

En virtud del Teorema de Bolzano-Weierstrass:  $(a_n)$  admite subsucesión convergente,  
o sea, existe  $(a_{\varphi(n)})_n$ ,  $\varphi$  monótona creciente, t.q.  $a_{\varphi(n)} \rightarrow x_0$ , algún  $x_0 \in [a, b]$ .

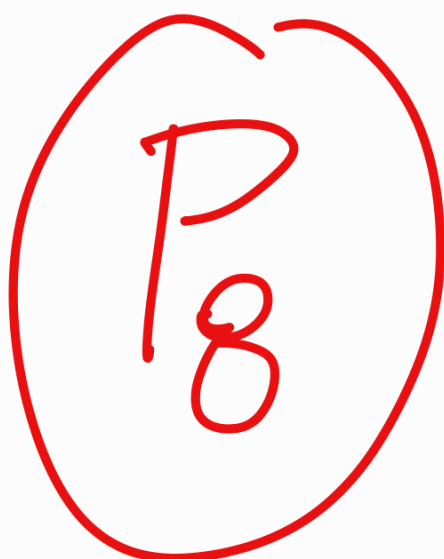
Se sabe que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_{\varphi(n)}) = l$ .

"Herencia":  $(f(a_{\varphi(n)}))_n \subseteq (f(a_n))_n$

Además, como  $f$  es continua:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_{\varphi(n)}) = f(x_0)$ .

Luego,  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_{\varphi(n)}) = f(x_0)$  i.e.  $f(x_0) = l$ , algún  $x_0 \in [a, b]$  Q.E.D.  $\square$

(P7) b) P.D.Q.  $(\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}): f(x) \neq l \Rightarrow (a_n) \rightarrow x_0$  PROPUESTO 😊



BUENAS LOTAS

- P8**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función continua
- \*  $\bar{x}$  mínimo global único  $\Leftrightarrow f(\bar{x}) \leq f(x) \ (\forall x \in \mathbb{R})$
  - \*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
  - \*  $(x_n)$  sucesión t.q.  $f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{n} \ (\forall n \in \mathbb{N})$

**P8** a) P.D.O.  $(x_{\varphi(n)}) \rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow l = \bar{x}$

 Aprovechan que  $f$  es continua, desigualdades  $\rightarrow$  subsucesión

En efecto,

Si  $(x_n) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(x_n)$ , pues  $\bar{x}$  es único mínimo global.

Por otro lado,  $(x_n)$  cumple que  $f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ .

Uniendo ambas desigualdades:

$$f(\bar{x}) \leq f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{n} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ , para la sucesión}$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(x_{\varphi(n)}) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{\varphi(n)} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ , para la subsucesión}$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) \leq f(\bar{x}) ; \quad \begin{array}{l} \varphi(n) \rightarrow +\infty \text{ pues es creciente} \\ \Rightarrow \frac{1}{\varphi(n)} \rightarrow 0, \ n \rightarrow +\infty \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(\bar{x})$$

Teorema del Sandwich

Por otra parte  $x_{\varphi(n)} \rightarrow l$  y  $f$  es continua  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$ .

Luego, por unicidad del límite:  $f(\bar{x}) = f(l)$

$$\Rightarrow \bar{x} = l \quad \text{Q.E.D.} \quad \square$$

unicidad del mínimo



(P8) b) P.D.O.  $(x_n)$  tiene alguna subsucesión convergente a  $\bar{x}$



Teorema de Bolzano-Weierstrass asegura convergencia de alguna subsucesión cuando la sucesión es acotada

En efecto,

Como  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$  :



o sea, para cualquier altura que se fije, siempre se pueden hallar intervalos extremos en que la función sea mayor que la altura (intuición: dibujo). Simbolizarse:

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists a < 0, b > 0) (\forall x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)) : f(x) \geq M$$

Lo anterior es cierto en particular para  $M = f(\bar{x}) + 1$  :  $f(x) \geq f(\bar{x}) + 1$

Por otro lado:  $f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{n} \leq f(\bar{x}) + 1$ .  $\Rightarrow f(x_n) \geq f(\bar{x}) + 1$

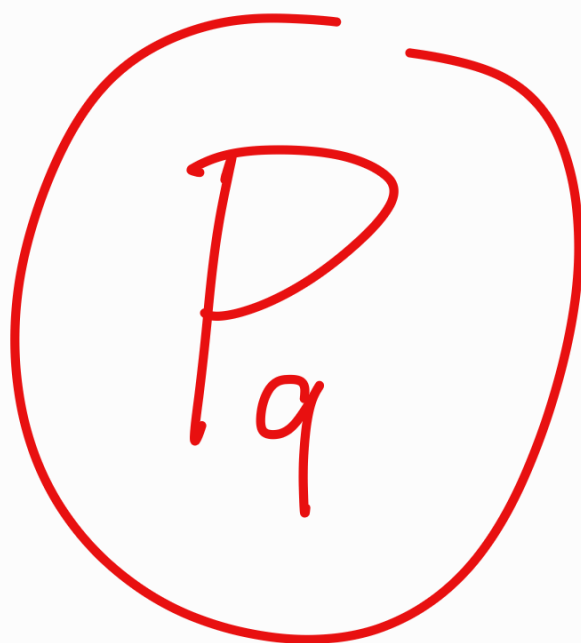
luego  $f(\bar{x}) + 1 \leq f(x_n) \leq f(\bar{x}) + 1 \Rightarrow x_n \in [a, b] \quad (\forall n)$

$\Rightarrow x_n$  es acotada

def.  $\Rightarrow \exists x_{k(n)}$  subsucesión convergente

Bolzano-Weierstrass  $\Rightarrow x_{k(n)} \rightarrow \bar{x}$  Q.E.D.  $\square$

(parte a)



CONSTANTE

P<sub>10</sub>  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función continua en 0  
 $f(x) = f(2x) (\forall x \in \mathbb{R})$   
P.D.Q.  $f$  es constante

💡 la propiedad es recursiva!  $\rightarrow$  sucesión ; + continuidad  $\rightarrow$  útil!!

💡 para ver que una función es constante basta ver que  $(\exists \beta \in \mathbb{R}) : f(x) = \beta (\forall x \in \mathbb{R})$

En efecto,

Notar que, como  $f(x) = f(2x) (\forall x \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{4}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \text{ y } f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) (\forall x \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x) (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{PROPUESTO: DEMOSTRARLO POR INDUCCIÓN}$$

Luego, se puede tomar, para  $x \in \mathbb{R}$ , la sucesión  $(x_n)_n = \left(\frac{x}{2^n}\right)_n$  t.q.  $x_n \rightarrow 0$ .

Como  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  y  $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(0)$

$$\Leftrightarrow f(x) \rightarrow f(0)$$

$$\uparrow$$
$$f(x_n) := f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$$

Pero  $f(x)$  no depende de  $n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = f(x)$ .

Luego, por unicidad del límite,  $f(x) = f(0)$ .

Como  $x \in \mathbb{R}$  arbitrario y  $f(0)$  es cte.  $\Rightarrow f$  es constante. ▢

$P_{10}$

MÁS CONSECUENCIAS

(P11)  $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  función

\* continua en 1

\*  $h(xy) = h(x) + h(y) \quad (\forall x, y \in (0, +\infty))$

P.D.Q.  $h$  continua en todo el Dominio

💡 se conoce la continuidad en un punto: podría ser útil manejarla como límite, ya que se tiene una propiedad de la forma de la función.

En efecto,

$f$  es continua en  $(0, +\infty)$  si  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a) \quad (\forall a \in (0, +\infty))$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} [h(x) - h(a)] = 0$  \*

Pero notan que  $h(xy) = h(x) + h(y) \quad (\forall x, y \in (0, +\infty))$ , por enmerado

$\Rightarrow h(x \cdot \frac{1}{x}) = h(x) + h(\frac{1}{x}) \quad , \quad x > 0 \quad (x \neq 0)$

$\Leftrightarrow h(1) = h(x) + h(\frac{1}{x})$  y por la misma propiedad:  $h(1 \cdot 1) = h(1) + h(1)$

$\Leftrightarrow 0 = h(x) + h(\frac{1}{x}) \quad (\forall x > 0)$

$\Leftrightarrow h(1) = 2h(1)$

$\Leftrightarrow h(1) = 0$

$\Leftrightarrow h(x) = -h(\frac{1}{x}) \quad (\forall x > 0)$  \*

Luego en \*  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} [h(x) + h(\frac{1}{a})] = 0$



$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} [h(\frac{x}{a})] = 0 \quad ; \quad u = \frac{x}{a} \Rightarrow x \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 1$

propiedad  
 $h(\cdot \cdot 1) = h(\cdot) + h(1)$

$\Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 1} h(u) = 0$

$\Leftrightarrow \forall$  pues  $h$  es continua en 1 y  $h(1) = 0$

Así, por transitividad:  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a) \quad (\forall a \in (0, +\infty))$  i.e.  $h$  continua en todo el dominio.

 También se puede usar continuidad con sucesiones

En efecto,

Se quiere ver que  $(\forall a \in (0, +\infty)) (\forall (x_n) \subseteq (0, +\infty)) : x_n \rightarrow a \Rightarrow h(x_n) \rightarrow h(a)$ .

Sea  $a \in (0, +\infty)$  donde  $x$  quiere continuidad y  $(x_n) \subseteq (0, +\infty) : x_n \rightarrow a$ .

Notar que  $h(a) = h\left(a \frac{x_n}{x_n}\right) = h\left(\frac{a}{x_n}\right) + h(x_n)$

*↑ niki to npon e*      *↑ propiedad*

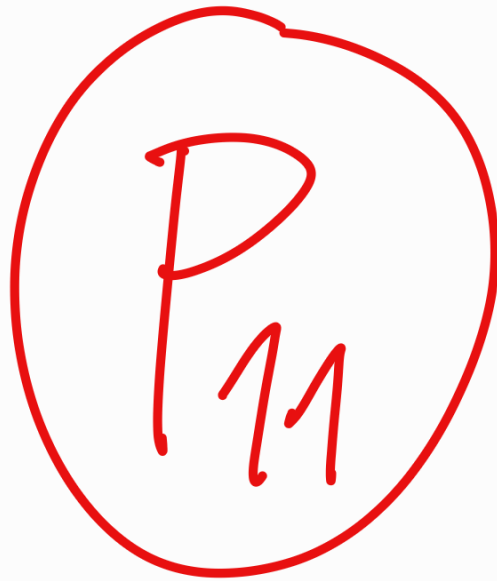
$$\Rightarrow h(x_n) = h(a) - h\left(\frac{a}{x_n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ h(a) - h\left(\frac{a}{x_n}\right) \right] ; \quad \begin{aligned} & * h(a) \text{ cte.} \\ & * \frac{a}{x_n} \rightarrow \frac{a}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{x_n} \rightarrow 1 \\ & \Rightarrow h\left(\frac{a}{x_n}\right) \rightarrow h(1) \\ & \text{ } \nearrow \text{ } h \text{ continua en } 1 \\ & = h(a) - h(1) ; \quad \begin{aligned} & h(1 \cdot 1) = h(1) + h(1) \\ & \Rightarrow h(1) = 2h(1) \\ & \Rightarrow h(1) = 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) = h(a) //$$

Como  $a$  es arbitrario en  $(0, +\infty)$ , entonces  $h$  es continua en todo su dominio. 





NATURALMENTE

P13  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $g$  continua en  $x=0$ ;  $g(0)=0$  }  $|f(x)| \leq |g(x)| \ (\forall x \in \mathbb{R})$   
 P.D. &.  $f$  continua en 0

Para ver continuidad en un punto, ya que se tiene una relación de desigualdad de las imágenes  $|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow |f(x)-0| \leq |g(x)-0|$ , podría ser útil  $\varepsilon$ - $\delta$

En efecto,

Se sabe que  $g$  es continua en 0

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}): |x-0| \leq \delta \Rightarrow |g(x)-g(0)| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq \delta \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon$$

Se quiere ver que  $f$  es continua en 0

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}): |x-0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(0)| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(0)| \leq \varepsilon$$

Es necesario conocer el valor de  $f(0)$ .

Notar que  $(\forall x \in \mathbb{R}): |f(x)| \leq |g(x)| \Rightarrow |f(0)| \leq |g(0)| = |0| = 0$   
 $\Rightarrow f(0) = 0 //$

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Basta tomar  $\delta > 0$  de continuidad de  $g$  i.e. t.q.  $|x| \leq \delta \ (\forall x \in \mathbb{R})$

Así,  $|f(x)-f(0)| = |f(x)-0| = |f(x)|$   
 $\leq |g(x)|$  prop. enunciado  
 $\leq \varepsilon //$   $g$  es continua

Luego, en virtud de la caracterización  $\varepsilon$ - $\delta$  de continuidad en un punto,  $f$  es continua en 0. 20

P<sub>12</sub>

CAUCHY

propuesto 😊

Si llegaste hasta acá...

espero que hayas aprendido mucho con los ejercicios!!



Estos resultados son muy interesantes desde un punto de vista técnico, hasta por sus próximas aplicaciones... (Lipschitz para asegurar unicidad en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias —lo verán en EDO—, y el potencial electrostático del campo eléctrico es continuo!! lo cual se utiliza en muchos problemas de Electromagnetismo ☺, y más!).

Siempre atenta a dudas por correo ([bianca.zamora@ug.uchile.cl](mailto:bianca.zamora@ug.uchile.cl) → U-cursos), por foro o en persona!

Ánimo con el estudio ☺

