UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
MA1002-8 CÁLCULO $\frac{d}{dx}$ E $\int$ · PRIMAVERA 2025

Auxiliar 1: Sucesiones y continuidad 

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 13 de agosto de 2025

P1. [e y observar]

Usando que en INTRO. AL CÁLCULO se estudió que, para $n \to \infty$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ y que $\beta^{\frac{1}{n}} \to 1$, si $\beta > 0$:

a) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

b) Demuestre que la sucesión (u_n) definida por $u_n := \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ no es acotada.

c) Sea $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ un número racional (es decir, $p, q \in \mathbb{N}$ con $q \neq 0$). Asumiendo que la sucesión (t_n) definida por $t_n := \left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ converge, demuestre que la subsucesión $(t_{np})_n = (t_p, t_{2p}, \cdots)$ converge a e^r.

P2. [Reminiscencias]

Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones, y/o sus subsucesiones:

a) $s_n = \arctan\left(n! e^n \cos\left(n^2\right)\right)$ **b)** $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 5$ **c)** $v_n = \left(-1+\frac{1}{n}\right)^n$ **d)** $r_n = \frac{2025^{5n}}{(5n)!}$

P3. [¿Herencia?]

Considere (u_n) una secuencia de números reales.

a) (propuesto) Demuestre que si (u_{2n}) y (u_{2n+1}) convergen al mismo límite, entonces (u_n) también converge.

b) Muestre que si las (u_{2n}), (u_{2n+1}) y (u_{3n}) son convergentes, entonces (u_n) también lo es.

P4. [Continuidad]

Utilizando la definición de continuidad por límite, resuelva los siguientes problemas:

a) Demuestre que $f(x) = \sqrt{x}$ es continua para $x \in (0, +\infty)$.

b) (propuesto) Una función f es L-Lipschitz si existe una constante $L \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$$

para todos x, y en el dominio. Muestre que toda función Lipschitz es continua.

c) Justifique que $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $x = 0$ pero que no es Lipschitz en $[0, 1]$.

d) Muestre que alguna[1] de las siguientes funciones es continua, con f, g continuas:

i) $j(x) = x^2$ **ii)** $k(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$ **iii)** $l(x) = 3x^{\frac{1}{4}}$ **iv)** $M(x) = \max(f,g)(x)$ **v)** $m(x) = \min(f,g)(x)$

[1] **iv)** y **v)** quedan **propuestas**...

P5. [Cerca]
Utilizando la caracterización de continuidad de una función con sucesiones:

a) Considere la función $f(x) = \begin{cases} 1+2\sqrt{x}, \ x < 1 \\ 2-x, \ x \geq 1 \end{cases}$. ¿$f$ es continua en $x=1$?

b) **(propuesto)** Si $g(x) = \dfrac{x+x^3+5x^5}{1+x^2}$ definida en $\mathbb{R}$, muestre que g es continua.

P6. [Reparando ando]

a) Estudie la continuidad de las siguientes funciones[2], y repárelas en caso de tengan *discontinuidades reparables* (es decir, que en un punto el límite exista, pero la función no está definida o bien no coincide con el límite). Para esto, primero defina el dominio de cada función, e identifique los puntos donde hay discontinuidades:

i) $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$ **ii)** $g(x) = 1 + xe^{\frac{1}{x}}$ **iii)** $h(x) = \sqrt{1-x^2}\dfrac{\arctan(x)}{x}$

iv) $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ **v)** $G(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$ **vi)** $H(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$

b) Determine el valor de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para cada función[3], de modo que sean continuas:

i) $M(x) = \begin{cases} bx^2, \ x \leq 1 \\ \dfrac{\sin(a(x-1))}{\ln(x)}, \ x > 1 \end{cases}$ **ii)** $J(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x+a}, \ x < a \\ 2x - e^{x-a}, \ x \geq a \end{cases}$ **iii)** $T(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3bx}-1}{x}, \ x < 0 \\ 1, \ x = 0 \\ \dfrac{\sin(2ax)}{x}, \ x > 0 \end{cases}$

P7. [Acercamiento]
Sean $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ función continua, y (a_n) sucesión en $[a,b]$, no necesariamente convergente.

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$, muestre que existe un $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = l$.

b) **(propuesto)** Si además $(\forall\, x \in [a,b] \setminus \{x_0\}) : f(x) \neq l$, concluya que (a_n) converge a x_0.

P8. [Buenas cotas]
Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, con un mínimo global único en el punto $\overline{x}$ que satisface $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.
Si (x_n) es una sucesión que tiene la propiedad $(\forall\, n \in \mathbb{N}) : f(x_n) \leq f(\overline{x}) + \dfrac{1}{n}$, entonces:

a) Pruebe que si la subsucesión $x_{\varphi(n)}$ converge a $l \in \mathbb{R}$, entonces $l = \overline{x}$.

b) **(propuesto)** Muestre que (x_n) tiene alguna subsucesión que converge a $\overline{x}$.

[2] Solo estudiaremos una, a elección de ustedes 8)
[3] Lo haremos solo para una de las tres opciones o.O

P9. [Constante] (propuesto)
Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en 0 que satisface $f(x) = f(2x)$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$. Muestre que f es constante.

P10. [Más consecuencias] (propuesto)
Sea $h\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función que satisface la relación $h(xy) = h(x) + h(y)$ $(\forall\, x, y \in (0, +\infty))$. Demuestre que si h es continua en 1, entonces es continua en todo su dominio.

P11. [Naturalmente] (propuesto)
Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $(\forall\, x \in \mathbb{R}) : |f(x)| \leq |g(x)|$ y g es continua en $x = 0$ con $g(0) = 0$. Demuestre que f es continua en 0.

P12. [Cauchy] (muy propuesto)
Una sucesión de números reales se dice *de Cauchy* si y solo si:

$$(\forall\, \epsilon > 0)\,(\exists\, N \in \mathbb{N})\,(\forall\, m, n > N) \implies |s_n - s_m| < \epsilon$$

El objetivo de este problema será probar que una sucesión es de Cauchy si y solo si es convergente.

a) Demuestre que una sucesión convergente es de Cauchy.

b) Demuestre que las sucesiones de Cauchy son acotadas.

c) Demuestre que si una sucesión de Cauchy tiene subsucesión convergente, entonces la sucesión converge.

d) Concluya que las sucesiones de Cauchy son convergentes.

e) Si (x_n) es una sucesión de números reales tales que $|x_n - x_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2^n}$ $(\forall\, n \geq 1)$, ¿(x_n) converge? Argumente.

Principales definiciones, propiedades y teoremas

Sucesión

Es una función de la forma $\begin{cases} s\colon & \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & n \mapsto s(n) \equiv s_n \end{cases}$.

Se puede entender como una lista ordenada de elementos, denominados **términos**, indexados en los números naturales, que siguen una regla específica.

Otras formas de denotarla son: (s_n), $(s_n)_n$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ o $(s_n)_{n\geq 0}$, o también usando $\{\}$.

La imagen de $n \in \mathbb{N}$ por s, es decir, s_n, se denomina **término** n**-ésimo** de la sucesión; por eso se utiliza la escritura $(s_n) \subseteq \mathbb{R}$. Se acepta que una cantidad finita de términos de la sucesión no estén definidos, o sea, que el dominio no sea exactamente $\mathbb{N}$ (esto ocurre, por ejemplo, para evitar la división por cero u otro tipo de indefinición).

Convergencia

Si una sucesión (s_n) converge a un valor $l \in \mathbb{R}$ se escribe $s_n \to l$ y equivale a:

$$(\forall\, \epsilon > 0)\,(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall\, n > n_0) : |s_n - l| \leq \epsilon$$

O sea, que una sucesión converge a un valor si y solo si para cualquier tolerancia, por pequeña que sea, se puede encontrar un punto en la sucesión a partir del cual todos los términos que siguen son lo suficientemente similares al valor (similitud es una interpretación de "estar cerca" o que la distancia en valor absoluto sea pequeña).

Sucesión acotada

Una sucesión (s_n) es acotada si y solo si $(\exists\, M > 0)\,(\forall\, n \in \mathbb{N}) : |s_n| \leq M$.

O sea, una sucesión es acotada si crece de forma controlada: todos los valores de la sucesión se mantienen dentro de una banda fija, independiente de n.

Subsucesión

Sean (s_n) una sucesión y $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Una **subsucesión** de (s_n), generada por la función φ, corresponde a la sucesión $\left(s_{\varphi(n)}\right)$.

O sea, una subsucesión es una sucesión que toma elementos de una sucesión de forma ordenada y ascendente.

Herencia de convergencia a subsucesiones

Sean (s_n) sucesión y $l \in \mathbb{R}$. Entonces $s_n \to l$ si y solo si todas las subsucesiones de (s_n) convergen a l.

O sea, el límite de una sucesión debe ser el mismo de cada una de las subsucesiones, y el límite de cada una de las sucesiones debe ser a lo más el límite de la sucesión, en caso de convergencia; más fuerte aún: si alguna de las subsucesiones tienen límites distintos, entonces la sucesión no converge.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Toda sucesión acotada posee al menos una subsucesión convergente.

Este teorema da una condición para caracterizar el control de una sucesión: si no existe una subsucesión convergente, la sucesión no es acotada; o bien, asegura que si la sucesión no convergiese, en la medida que esté controlada, se podrá hallar una parte que sí converge.

Convergencia y acotamiento de una sucesión

- convergente $\implies$ acotada es V (por la definición de convergencia).
- acotada $\implies$ convergente es F (por ejemplo, la sucesión $(-1)^n$ es acotada pero no converge porque las subsucesiones son tal que $(-1)^{2n} \to 1$ y $(-1)^{2n+1} \to -1$, y $1 \neq 1$).
- acotada $\implies$ alguna subsucesión converge es V (por el teorema de Bolzano-Weierstrass).

Notación para función

$f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denota una función real f definida en un dominio $A \subseteq \mathbb{R}$.

Continuidad en un punto

Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in A$ un punto fijo en el dominio. Entonces f **es continua en el punto** a ssi:

$$(\forall\ (x_n) \subseteq A) : x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a)$$

O sea, una función es continua en un punto si la convergencia de todas las sucesiones a valores en el dominio con el punto como límite se preserva a través de la función.

Continuidad en un conjunto

- Si una función es continua en cada uno de los puntos de un subconjunto del dominio, se dice que la función es continua en el conjunto.
- Si dicho subconjunto es todo el dominio, se dice que la función es continua (a secas).

Es importante hacer esta diferencia en el lenguaje porque la continuidad es una noción puntual.

Caracterización epsilon-delta de continuidad (en un punto)

Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in A$ un punto fijo en el dominio. Entonces f **es continua en el punto** a ssi:

$$\begin{aligned}
&(\forall\, \epsilon > 0)\,(\exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0)\,(\forall\, x \in A) : \\
&|x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon \\
&\iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \\
&\iff \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)
\end{aligned}$$

Álgebra y composición de funciones continuas

Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $z \in A \cap B$. Entonces, son continuas las funciones $\beta \cdot f$ con $\beta \in \mathbb{R}$, $f \pm g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ con $g(z) \neq 0$, y la composición $g \circ f$ (siempre que g sea continua en $f(a)$, y que $f(A) \subseteq B$).