Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002-8 Cálculo $\frac{d}{dx}$ e $\int$ · Primavera 2025

Auxiliar 14[1]: Series numéricas y de potencias 

Profesora: M. Eugenia Martínez M.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 26 de noviembre de 2025

P1. [Convergencia]

Decida la convergencia (indicando si es absoluta) de las siguientes series numéricas ($p \in \mathbb{R}$):

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n^n}{n!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos(1/n)}{1/n}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{np}}{n!}$

P2. [Trabajando]

Considere la serie de potencias $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}$.

a) Encuentre su intervalo de convergencia.

b) Demuestre que su tasa de cambio es directamente proporcional a sí misma según la razón $\frac{1}{2}$.

P3. [Trabajando pt. ii]

Considere la función definida por $f(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

a) Calcule el radio de convergencia e indique el intervalo de convergencia; estudie los extremos.

b) Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$, y sus valores en el centro de las abscisas.

c) Identifique $f''(x)$ como una serie geométrica, y encuentre, a partir de esta, explícitamente la función f.

d) Calcule el valor de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$.

P4. [Trabajando pt. iii]

a) Determine la serie de potencias de $\ln(1+x)$.

b) Concluya que la serie de potencias de $\ln\left(1+x^2\right)$ es $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n}$.

Indicación: Le será de utilidad la serie geométrica $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1$

[1] Fue un agrado hacerles clases y aprender con ustedes. Espero que hayan disfrutado tanto el curso como lo disfruté yo <3

Convergencias conocidas de series y límites útiles

Límites de series

- $\sum^{\infty} \lambda = \begin{cases} \pm\infty, & \text{si } \lambda > 0, \text{ o } \lambda < 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$
- $\sum_{k\geq 2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$
- $\sum_{k\geq 1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge $\left(S_{2^n} \geq 1 + \frac{k}{2}\right)$
- $\sum_{k\geq 1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum_{k\geq 0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (\forall\, q \in \mathbb{R} \cap (-1,1))$
- $\sum^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ converge ssi $\alpha > 1$

Límites de sucesiones

- $\sum_{k=k_0}^{n} q^k = q^{k_0} \frac{1-q^{(n-k_0)+1}}{1-q} \quad ; q \neq 1$
- $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 1 & , a = 1 \\ \nexists & , a = -1 \\ 0 & , a \in (-1,1) \\ \nexists & , |a| > 1 \end{cases}$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{e^n} = 0$ (exp le gana a polinomio)
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{e}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

Series de potencias conocidas

Exponencial

- $e^x = \sum \frac{x^k}{k!} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$
- $[e^x]' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(kx^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k-1} x^{k-1} = e^x$
- $e^{-x} = \sum \frac{(-x)^k}{k!} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$
- $e^{x^2} = \sum \frac{x^{2k}}{k!} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$
- $\int_0^x e^{t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)\, k!}$

Racional

- $\frac{1}{1-x} = \sum x^k \quad (\forall\, x \in (-1,1))$
- $\frac{1}{1+x^p} = \sum (-1)^k x^{pk} \quad (\forall\, x \in (-1,1))$

Trigonométricas

- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$

Hiperbólicas

- $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$
- $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$