Pauta Auxiliar 10

Opciones

Profesor: Luis Llanos y Rafael Epstein
Auxiliar: Felipe Vega, Frederick Russell y Leandro Venegas.
Ayudantes: Jorge Torres, Fernanda Leiva, Diego B.Zuñiga, Daniela Banda y Vicente Valpuesta.

P1.- Payoff Diagram

Un inversionista implementa un **Bull Spread** utilizando opciones Call europeas sobre un activo financiero. Para ello:

- Compra una opción Call con precio de ejercicio $K_1 = 50$ y paga una prima de $c_1 = 6$.
- Vende una opción Call con precio de ejercicio $K_2 = 60$ y recibe una prima de $c_2 = 2$.

Pauta:

a. Escriba la fórmula del payoff neto al vencimiento.

Para esta pregunta debemos analizar por separado cada opción y luego sumar sus payoffs.

- **Long Call** con $K_1 = 50$: payoff *bruto*

$$\mathrm{LC}(S_T) = \max(0, S_T - 50)$$

- **Short Call** con $K_2 = 60$: payoff *bruto*

$$\mathrm{SC}(S_T) = -\max(0, S_T - 60)$$

Las primas implican un costo neto inicial de:

$$\text{Prima neta} = c_1 - c_2 = 6 - 2 = 4$$

El payoff **neto** de la estrategia Bull Spread es la suma de ambos payoffs brutos menos la prima neta pagada:

$$\text{Payoff}(S_T) = \mathrm{LC}(S_T) + \mathrm{SC}(S_T) - \text{Prima neta}$$

$$\text{Payoff}(S_T) = \max(0, S_T - 50) - \max(0, S_T - 60) - 4$$

También se puede escribir por tramos:

$$\text{Payoff}(S_T) = \begin{cases} -4, & S_T \leq 50, \\ S_T - 54, & 50 < S_T < 60, \\ 6, & S_T \geq 60. \end{cases}$$

b. Construya una tabla con el payoff bruto y neto para $S_T = 40, 50, 55, 60, 70$.

Calculamos primero los payoffs brutos de cada opción y luego restamos la prima neta de 4:

S_T	LC bruto	SC bruto	Payoff bruto total	Payoff neto
40	0	0	0	$0 - 4 = -4$
50	0	0	0	$0 - 4 = -4$
55	5	0	5	$5 - 4 = 1$
60	10	0	10	$10 - 4 = 6$
70	20	-10	10	$10 - 4 = 6$

c. Grafique el payoff neto de la estrategia.

El gráfico del payoff neto corresponde a una función que:

- Es constante en -4 para $S_T \leq 50$.
- Aumenta linealmente con pendiente $+1$ entre $S_T = 50$ y $S_T = 60$, pasando por el punto de equilibrio.
- Es constante en $+6$ para $S_T \geq 60$.

En notación matemática, el mismo comportamiento queda descrito por la función por tramos presentada en el punto (a).

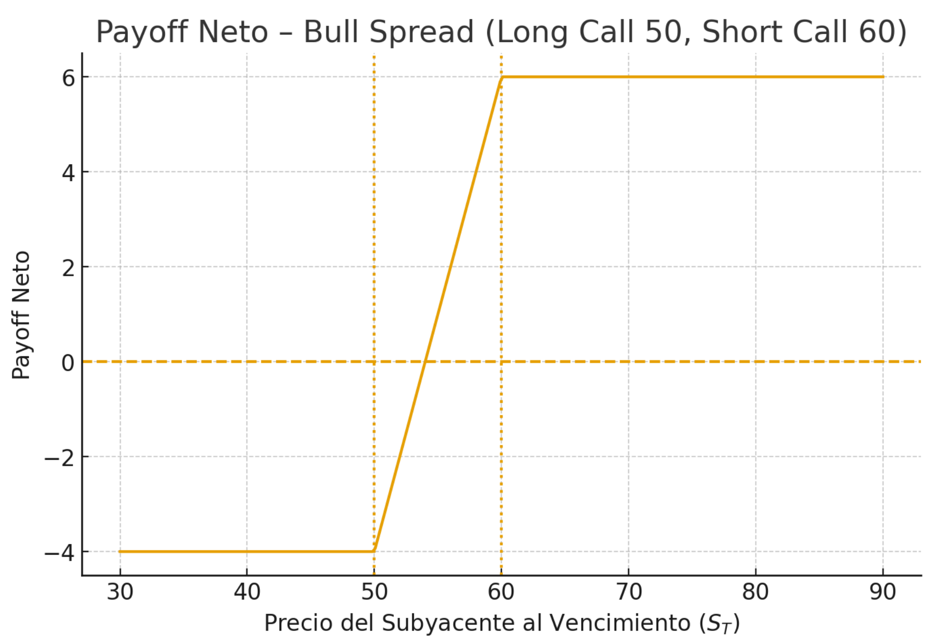


Figura 1: Payoff Diagram

d. Determine la ganancia máxima, la pérdida máxima y el punto de equilibrio.

- **Pérdida máxima**: ocurre cuando las opciones expiran out-of-the-money, es decir para $S_T \leq 50$.

$$\text{Pérdida máxima} = -4$$

- **Ganancia máxima**: ocurre cuando el precio es suficientemente alto para que ambas opciones estén in-the-money pero el spread entre strikes ya no crezca, es decir para $S_T \geq 60$.

$$\text{Ganancia máxima} = 6$$

- **Punto de equilibrio**: se obtiene cuando el payoff neto es cero. Usando el tramo intermedio:

$$\text{Payoff}(S_T) = S_T - 54 = 0 \Rightarrow S_T = 54$$

$\boxed{\textbf{P1.-}}$ Put-Call parity

El precio actual de la acción de Google es de \$100 por acción (esta no paga dividendos). Existe una opción put y call europea sobre la acción que madura en un año, con un precio strike de \$110. Las puts se transan por \$10 y las calls por \$6. Si la tasa libre de riesgo con madurez un año es 5 % compuesta continuamente. ¿Hay oportunidades de arbitraje?

Pauta:
Para esta pregunta debemos usar Put-Call parity para definir si existe oportunidad de arbitraje (considerando que tenemos una opción europea):

$$P_t + S_0 = C_t + VP(K) \leftrightarrow P_t + S_0 = C_t + K \cdot e^{-r \cdot T}$$

$$10 + 100 = 6 + 110 \cdot e^{-5\,\% \cdot 1}$$

De esto se puede ver: $110 \neq 111$ por ende existe una oportunidad de arbitraje ya que no se cumple la Put-Call parity

$\boxed{\textbf{P2.-}}$ Más opciones!!!

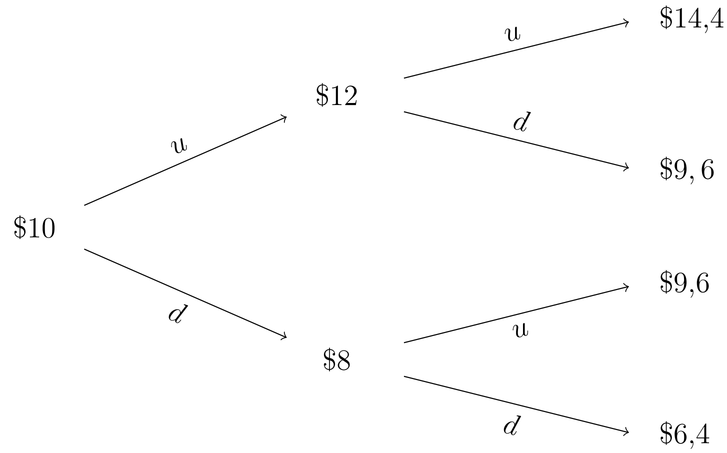
La acción de la empresa A se está transando a \$10. Se sabe que el precio aumentará o caerá en un 20 % para cada uno de los próximos dos años. La tasa de interés continua es de un 9,5 % para todos los periodos.
Pauta

a. **¿Cuál es el precio de una call europea a dos años sobre la acción de A que tiene un precio de ejercicio de \$8?**

En primer lugar, debemos notar que cada año el precio de la acción puede subir o bajat un 20 %. Esto significa que los factores de crecimiento y disminución serán:

$$u = 1 + 20\,\% = 1,2$$
$$d = 1 - 20\,\% = 0,8$$

Luego, notaremos que existirán 2 periodos, por esto mismo, construiremos el árbol de precios considerando $T = 0$, $T = 1$ y $T = 2$.



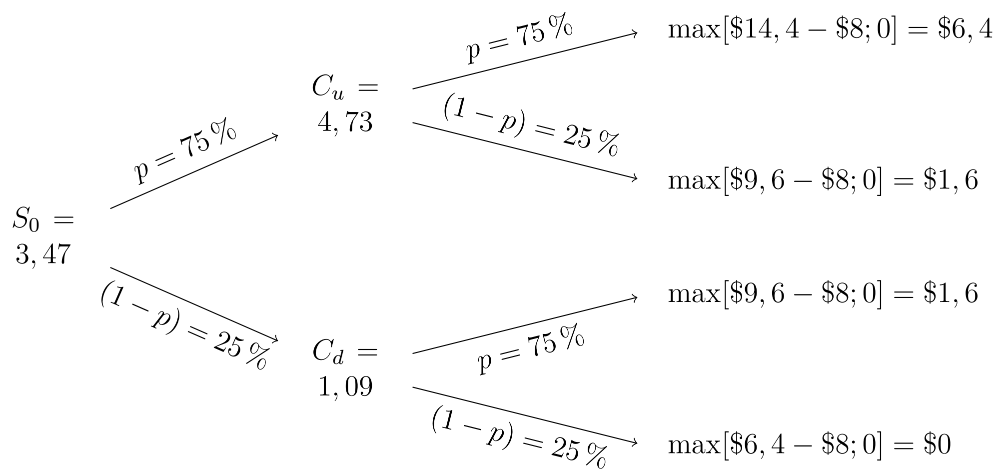
Luego, recordemos que la call vendrá dada por:

$$C_t = \max[S_t - K; 0]$$

Y que las probabilidades de subida y bajada p y $(1-p)$ vendrán dadas por:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{9,5\,\% \cdot 1} - 0,8}{1,2 - 0,8} \approx 75\,\% \implies (1-p) \approx 25\,\%$$

Con esto, el árbol de la call será:



Donde:

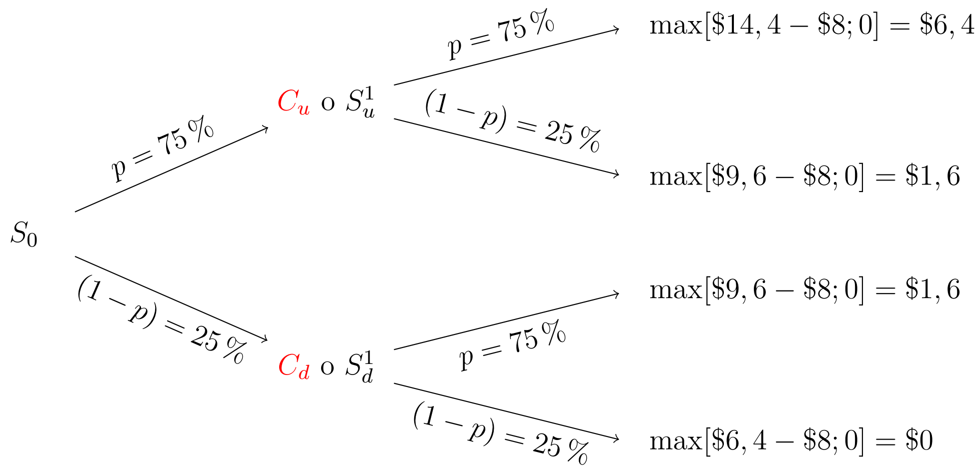
$$C_u = (6,4 \cdot 75\,\% + 1,6 \cdot 25\,\%) \cdot e^{-9,5\,\%} \approx 4,7$$
$$C_d = (1,6 \cdot 75\,\% + 0 \cdot 25\,\%) \cdot e^{-9,5\,\%} \approx 1,09$$
$$S_0 = (4,73 \cdot 75\,\% + 1,09 \cdot 25\,\%) \cdot e^{-9,5\,\%} \approx 3,47$$

Finalmente, el valor de la Call será de $3,47

b. **Repita el cálculo anterior, pero asumiendo que la opción es americana. ¿Existen diferencias?, explique.**

El árbol de precios es igual al del caso de la pregunta a), porque el activo subyacente sigue siendo el mismo. El arbol de la call cambia, ya que en cada período (excepto en el final) hay que decidir si se ejerce la opción en ese período o se espera, esto quiere decir que hay que comparar si conviene el flujo en ese período o el valor presente esperado de los flujos futuros.

Dado esto, el árbol de la call quedará (Notemos que en el árbol se marcará en rojo el valor que sea mayor) y bajo el árbol se verán los desarrollos.



Es importante mencionar que la notación S_i^T con $i \in \{u, d\}$ significará Ejercer, mientras que la notación C_i significará Esperar.

En T = 1, para la rama de arriba se tendrá:

$$C_u = (6,4 * 0,75 + 1,6 * 0,25) \cdot e^{-9,5\,\%} \approx 4,7$$
$$S_u^1 = \max[12 - 8; 0] = 4$$

En T = 1, para la rama de abajo se tendrá:

$$C_d = (1,6 \cdot 75\,\% + 0 \cdot 25\,\%) \cdot e^{-9,5\,\%} \approx 1,09$$
$$S_d^1 = \max[8 - 8; 0] = 0$$

Finalmente, P_0 será:

$$C_0 = (4,73 \cdot 75\,\% + 1,09 \cdot 25\,\%) \cdot e^{-9,5\,\%} \approx 3,47$$

En este caso siempre conviene esperar y sólo ejercer en el último período, por lo que el resultado da igual al de la opción europea. En todo caso hay que hacer el análisis en cada período, ya que puede pasar que convenga ejercer.

Notemos que, para calcular los precios utilizando las probabilidades, siempre se usarán los valores mayores de cada rama, es decir, si en la rama superior se hubiese cumplido que $S_u^1 > C_u$, entonces P_0 se hubiese calculado tal que (Suponiendo que $S_u^1 = 5$

$$S_0 = (5 \cdot 75\,\% + 1,09 \cdot 25\,\%) \cdot e^{-9,5\,\%} \approx \$3,65$$

$\boxed{\textbf{P4.-}}$ CTP 5 - Primavera 2024

Utilice la fórmula de Black-Scholes para encontrar el valor de una opción de venta (Put) sobre acciones con las siguientes características:

- Plazo de vencimiento:6 meses
- Desviación estándar (σ): 34 % anual
- Precio del ejercicio (K): \$102,5
- Precio actual de las acciones (S): \$100
- Tasa de interés: 5 % (APR, plano para todos los periodos)

Respuesta:
Para encontrar el valor de la put utilizando Black&Scholes (Merton) debemos primero calcular el valor de la call y luego utilizar la Put-Call Parity para encontrar el valor de la put. El valor de la call vendrá dado por:

$$C(S_t, t) = N(d_1) \cdot S_t - N(d_2) \cdot K \cdot e^{-rT}$$

No obstante, recordemos que esta fórmula exige tasas continuas para su consistencia. De esta forma, lo primero que debemos hacer es transformar las tasas.

$$r_{\text{Continua}} = \ln(1 + r_f) \implies r_{\text{continua}} = 4,88\,\%$$

Lo siguiente que debemos hacer es calcular los parámetros d_1 y d_2.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{PV(K)}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

En este caso $T = 0,5$ y $t = 0$. Luego, reemplazando los valores se tendrá:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{100}{102,5 \cdot e^{-4,88\,\% \cdot \frac{6}{12}}}\right)}{34\,\%\sqrt{0,5}} + \frac{1}{2}34\,\%\sqrt{0,5} = 0,1189$$

$$d_2 = 0,1189 - 34\,\%\sqrt{0.5} = -0.12142$$

Dado esto, los respectivos valores para las funciones acumuladas serán: $\Phi(d_1) \approx 0,55$ y $\Phi(d_2) \approx 0,45$. Reemplazando los valores, el valor de la call será:

$$C(S_t, t) = 0,55 \cdot 100 - 0,45 \cdot 102,5 \cdot e^{-4,88\,\% \cdot \frac{6}{12}} = \$9,98$$

No olvidemos que, lo que buscamos es el precio de la Put. Dado que implícitamente la opción es europea, entonces podemos utilizar la Put-Call Parity:

$$P_t + S_0 = C_t + K \cdot e^{-r \cdot T} \Rightarrow P_t = 9,9868 + 102,5 \cdot e^{-4,88\,\% \cdot 0,5} - 100 \Rightarrow P_t \approx 10$$