Auxiliar 10
Opciones

Finanzas - IN4232

Auxiliar: Felipe Vega

Qué son?

Una opción es un derivado financiero que da el derecho (no obligación) de comprar o vender un activo a un precio de ejercicio (K):

- Comprador: El comprador de una opción adquiere el derecho, pero no la obligación, de ejercer la compra (en el caso de una call) o venta (en el caso de una put) del activo subyacente al precio de ejercicio en el futuro si esto le resulta beneficioso.

- Vendedor: El vendedor de una opción, también conocido como escritor tiene la obligación de vender (en el caso de una call) o comprar (en el caso de una put) el activo subyacente al precio de ejercicio si el comprador decide ejercer su opción.

Qué son?

- Fecha de vencimiento (T): Es la fecha límite en la cual el comprador de la opción debe decidir si ejerce o no su derecho. Después de esta fecha, la opción expira y pierde su valor.

- Prima: Es el costo que el comprador paga al vendedor por adquirir la opción, este costo representa el derecho a comprar o vender el activo subyacente.

Opciones V/S F&F

- A diferencia de los forward y futuros, donde el valor del contrato en $t = 0$ es cero ($f_0 = 0$), en las opciones esto no sucede, ya que en un contrato de opciones el comprador tiene la libertad de decidir si ejerce o no el derecho de compra/venta del activo subyacente. En caso de que el comprador decida ejercer la opción, el vendedor estará obligado a realizar la venta/compra del activo subyacente al comprador.

Importante!!!

- Un vendedor vende la opción (en simple vende el contrato), en cambio un comprador puede comprar o vender el activo subyacente, todo dependerá del tipo de opciones

Tipos de opciones

- **Call**: Es una opción en donde el comprador puede ejercer el derecho de comprar el activo subyacente (por ejemplo una acción) a un precio K (precio strike) al comprador, es decir yo como comprador de la call compraré el activo subyacente a un precio K si así lo decido.

- **Put**: Es un opción en donde el comprador puede ejercer el derecho de vender el activo subyacente (por ejemplo una acción) a un precio strike (K) al vendedor, es decir yo como comprador vendo la acción a un precio K si así lo decido y el vendedor tiene la obligación de comprarme ese activo subyacente que estoy vendiendo aun precio K.

Opciones AM o EU

- **Opción Americana:** Derecho ejercible en cualquier momento antes del vencimiento.

- **Opción Europea:** Derecho ejercible solo en la fecha de vencimiento.

Put – Call Parity

Relación entre los precios de opciones call y put sobre el mismo activo subyacente.

$$P_t + S_0 = C_t + VP(K) \leftrightarrow P_t + S_0 = C_t + K \cdot e^{-r \cdot T}$$

Donde:

P_t: Precio de la put
C_t: Precio de la call
S_0: Precio spot en $t = 0$
$VP(K)$: Valor presente del precio de ejercicio

Importante!!!

- Es importante mencionar que la paridad put-call solo se aplica a opciones europeas, ya que las opciones americanas se pueden ejercer antes de la fecha de vencimiento.

- Adicionalmente, existirán oportunidadesde arbitraje en caso de que se cumlpa que:

$$P_t + S_0 \neq C_t + K \cdot e^{-r \cdot T}$$

Veamos las ganancias

Haremos análisis periódo a periódo (Comprador)

Posición larga

Call:

$$C_t = \mathrm{Max}[S_t - K; 0]$$

Put:

$$P_t = \mathrm{Max}[K - S_t; 0]$$

Veamos las ganancias

Haremos análisis Situacional

Ganancia bruta para un comprador			
	$S_T < K$	$S_T = K$	$S_T > K$
Call	0	0	$S_T - K$
Put	$K - S_T$	0	0

Veamos las ganancias

Haremos análisis Situacional

Ganancia neta para un comprador			
	$S_T < K$	$S_T = K$	$S_T > K$
Call	$-c_0$	$-c_0$	$S_T - K - c_0$
Put	$K - S_T - p_0$	$-p_0$	$-p_0$

Veamos las ganancias

Haremos análisis periódo a periódo (Vendedor)
Posición corta

Call:

$$C_t = -\mathrm{Max}[S_t - K; 0]$$

Put:

$$P_t = -\mathrm{Max}[K - S_t; 0]$$

Veamos las ganancias

Haremos análisis Situacional

Ganancia bruta para un vendedor			
	$S_t < K$	$S_t = K$	$S_t > K$
Call	0	0	$K - S_t$
Put	$S_t - K$	0	0

Veamos las ganancias

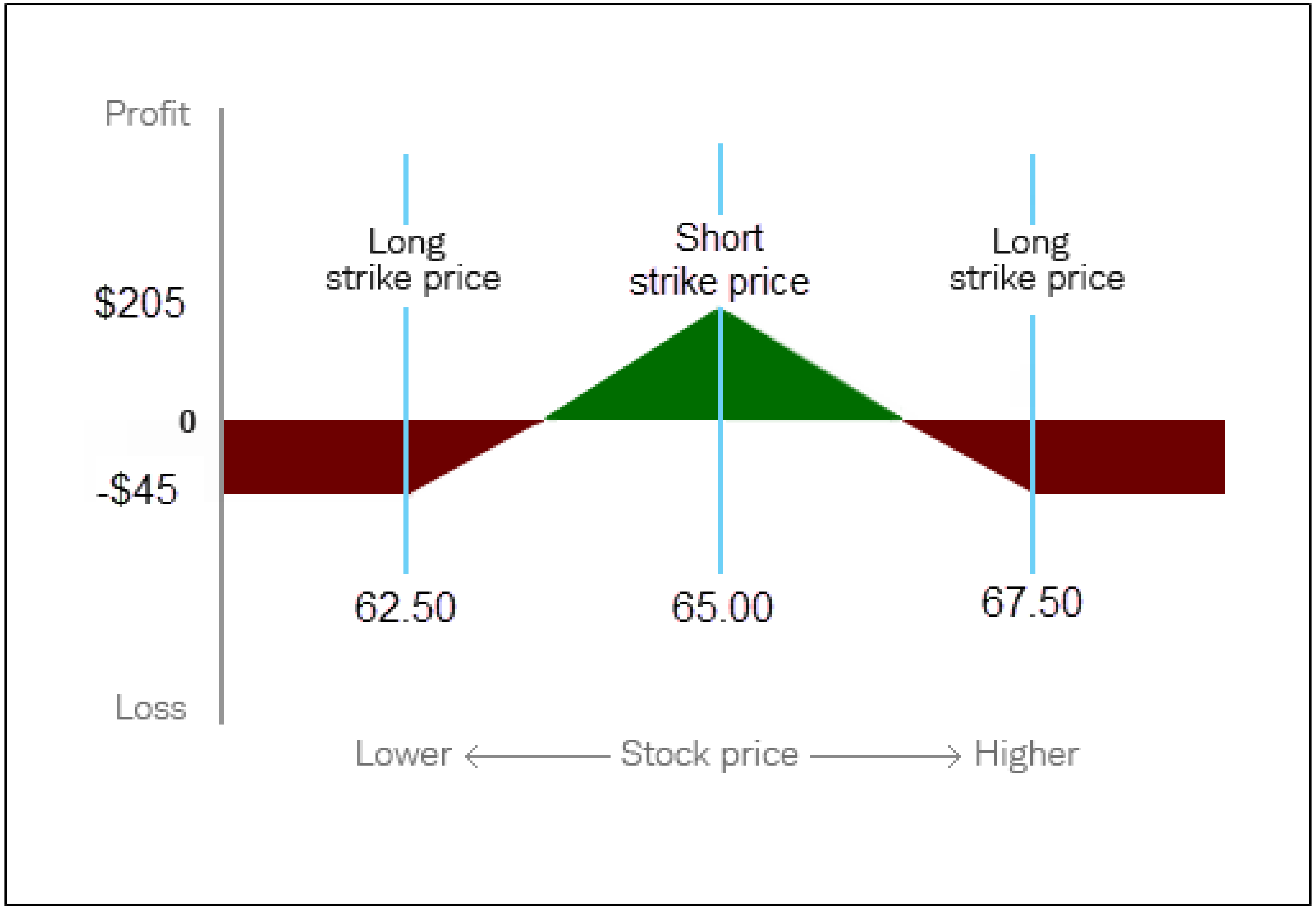
Haremos análisis Situacional

Ganancia neta para un vendedor			
	$S_t < K$	$S_t = K$	$S_t > K$
Call	c_0	c_0	$K - S_t + c_0$
Put	$S_t - K + p_0$	p_0	p_0

Estrategias de inversión

Estrategia	Implementación
Bull Spread *(El inversor espera un mercado alcista)*	1 Call Largo + 1 Call Corto con mismo vencimiento. El precio de ejercicio de la posición larga es menor que el de la posición corta. o 1 Put Largo + 1 Put Corto con mismo vencimiento. El precio de ejercicio de la posición larga es menor que el de la posición corta.
Bear Spread *(El inversor espera un mercado bajista)*	1 Call Largo + 1 Call Corto con el mismo vencimiento. El precio de ejercicio de la posición larga es mayor que el de la posición corta. o 1 Put largo + 1 put corto con el mismo vencimiento. El precio de ejercicio de la posición larga es mayor que el de la posición corta.
Straddle Largo *(Mercado con alta volatilidad)*	1 Call Largo + 1 Put Largo con los mismos vencimientos y precios de ejercicio.
Straddle Corto *(Mercado con volatilidad estable)*	1 Call Corto + 1 Put Corto con los mismos vencimientos y precios de ejercicio.
Strangle Largo *(Mercado con alta volatilidad)*	1 Call Largo + 1 Put Largo con el mismo vencimiento. El precio de ejercicio del put es menor que el del call.
Strangle Corto *(Mercado con volatilidad estable)*	1 Call Corto + 1 Put Corto con el mismo vencimiento. El precio de ejercicio del put es menor que el del call.
Mariposa Corta	1 Call Corto con precio de ejercicio K1 + 2 Call Largos con precio de ejercicio K2 + 1 Call Corto con precio de ejercicio K3. Los precios de ejercicios son K1 < K2 < K3.
Mariposa Larga	1 Call largo con precio de ejercicio K1 + 2 Call cortos con precio de ejercicio K2 + 1 Call largo con precio de ejercicio K3. Los precios de ejercicios son K1 < K2 < K3.

Estrategias de inversión



Modelando opciones

Para modelar los precios utilizaremos 2 métodos

Árboles Binomiales

Black & Scholes

Árboles Binomiales

Los árboles binomiales modelan el precio del activo subyacente en función de una probabilidad **p**, que puede subir un factor **u** o bajar un factor **d**.

Probabilidad neutra al riesgo

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Donde r es la tasa libre de riesgo, Δt es el paso entre cada periodo de valorización, el factor up (u) nos indicará cual es el factor en el que aumenta el precio spot del activo subyacente en un tiempo t y el factor down (d) nos indicará cual es el factor en el que disminuye el precio del activo subyacente.

Árboles Binomiales

- Factor Up (u): Multiplicador para una subida en el precio del activo.
- Factor Down (d): Multiplicador para una bajada en el precio del activo.

Ejemplo:

  - Si se espera un alza de 8%, entonces u = 1.08.
  - Si se espera una baja de 10%, entonces d = 0.9

Árboles Binomiales

Pasos

1. Calcular el precio spot futuro del activo desde t = 0 hasta t =T mediante un árbol binomial.

2. Valorar la opción en t = T usando:

$$C_T = \max(S_T - K, 0) \quad \text{y} \quad P_T = \max(K - S_T, 0)$$

3. Retroceder desde t = T a t = 0, ponderando con las probabilidades **p** y **1− p**, y descontando a valor presente.

Árboles Binomiales

▶ Cada nodo tiene dos ramas: una de subida (**u**) y una de bajada (**d**).

▶ Para calcular el valor de una opción call o put en cada nodo, se pondera con **p** y **1−p** y se descuenta a valor presente un periodo Δt.

Árboles Binomiales

En caso de desconocer los factores u y d, se pueden calcular de la siguiente forma:

En donde sigma será el riesgo asociado al activo.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u}$$

Black & Scholes

- Modelo continuo que asume que el precio del activo subyacente sigue una distribución log-normal.

- La tasa libre de riesgo debe estar en composición continua y el activo subyacente no paga dividendos.

$$C(S, K, t=0, r, \sigma, T) = S_0 \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2) \cdot e^{-rT}$$

Black & Scholes

- S: Precio del activo subyacente
- K: Precio de ejercicio (strike) de la opción
- t: Tiempo actual (generalmente $t = 0$)
- r: Tasa libre de riesgo (composición continua)
- σ: Volatilidad del activo subyacente
- T: Tiempo hasta la fecha de vencimiento
- $\Phi(d1)$ y $\Phi(d2)$: Función de distribución acumulativa de la normal estándar.

Black & Scholes

Fórmulas de los factores d1 y d2

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{Ke^{-rT}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Black & Scholes

Aunque Black & Scholes modela solo calls, la paridad Put-Call permite calcular el precio de una put equivalente:

$$P_0 = C_0 - S_0 + K \cdot e^{-rT}$$

Tips

Si entregan la tasa en capitalización no continua (Por ejemplo APR)

$$r_C = ln(1 + r_f)$$

Análisis de sensibilidad

		Calls	Puts
Delta	$\frac{\partial V}{\partial S}$	$N(d_1)$	$-N(-d_1) = N(d_1) - 1$
Gamma	$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	$\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$	
Vega	$\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	$SN'(d_1)\sqrt{T-t}$	
Theta	$\frac{\partial V}{\partial t}$	$-\frac{S\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{S\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$
Rho	$\frac{\partial V}{\partial r}$	$K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Der. with respect to strike price	$\frac{\partial V}{\partial K}$	$-N(d_2)e^{-r(T-t)}$	$N(-d_2)e^{-r(T-t)}$

P1

P1.- Payoff Diagram

Un inversionista implementa un **Bull Spread** utilizando opciones Call europeas sobre un activ financiero. Para ello:

- Compra una opción Call con precio de ejercicio $K_1 = 50$ y paga una prima de $c_1 = 6$.
- Vende una opción Call con precio de ejercicio $K_2 = 60$ y recibe una prima de $c_2 = 2$.

a. Escriba la fórmula del payoff neto al vencimiento.

b. Construya una tabla con el payoff bruto y neto para $S_T = 40, 50, 55, 60, 70$.

c. Grafique el payoff neto de la estrategia.

d. Determine la ganancia máxima, la pérdida máxima y el punto de equilibrio.

P2

El precio actual de la acción de Google es de \$100 por acción (esta no paga dividendos). Existe una opción put y call europea sobre la acción que madura en un año, con un precio strike de \$110. Las puts se transan por \$10 y las calls por \$6. Si la tasa libre de riesgo con madurez un año es 5 % compuesta continuamente. ¿Hay oportunidades de arbitraje?

P3

La acción de la empresa A se está transando a \$10. Se sabe que el precio aumentará o caerá en un 20 % para cada uno de los próximos dos años. La tasa de interés continua es de un 9,5 % para todos los periodos.

a. ¿Cuál es el precio de una call europea a dos años sobre la acción de A que tiene un precio de ejercicio de \$8?

b. Repita el cálculo anterior, pero asumiendo que la opción es americana. ¿Existen diferencias?, explique.

P4

Utilice la fórmula de Black-Scholes para encontrar el valor de una opción de venta (Put) sobre acciones con las siguientes características:

- Plazo de vencimiento:6 meses
- Desviación estándar (σ): 34 % anual
- Precio del ejercicio (K): \$102,5
- Precio actual de las acciones (S): \$100
- Tasa de interés: 5 % (APR, plano para todos los periodos)

Auxiliar 10
Opciones

Finanzas - IN4232

Auxiliar: Felipe Vega