Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Industrial
IN4232 – Finanzas

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Guía CAPM y Risk & Return

Profesor: Luis Llanos y Rafael Epstein
Auxiliar: Josué Guillen
Ayudantes: Axel Ballesteros, Camila Galindo, Rubén Ortega y Fernanda Saavedra

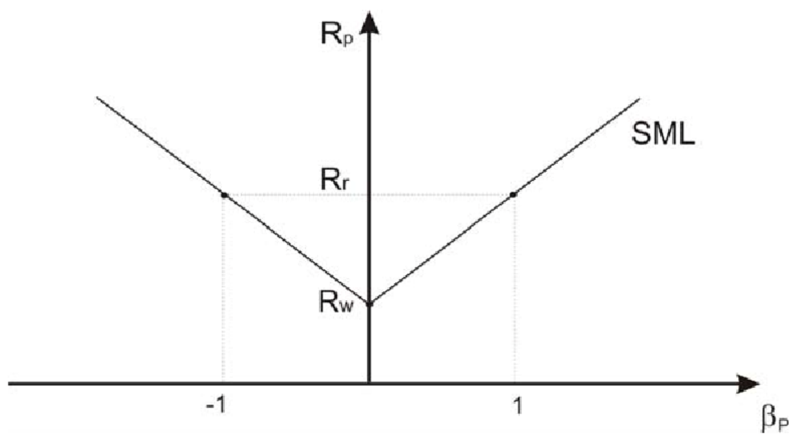
P1. Verdadero o Falso

a. Del CAPM se desprende que una inversión con un beta negativo tendría un rendimiento esperado menor que la tasa de interés libre de riesgo

Verdadero, basta ver la fórmula de SML:

$$r_i = r_f + \beta[E(r_M) - r_f]$$

Si $\beta < 0$ queremos demostrar que $r_i < r_f$, notemos que si beta es negativo entonces $\beta\left[E(r_M) - r_f\right] < 0$ pues en la curva de SML el retorno de mercado es mayor que el retorno del activo libre de riesgo.



Por lo que basta notar que $r_i = r_f + \beta\left[E(r_M) - r_f\right] < r_f$ es decir el rendimiento esperado será menor que la tasa de interés o tasa libre de riesgo.

b. Los inversionistas demandan tasas de rendimiento esperadas más altas para las acciones cuyos rendimientos son muy sensibles a las fluctuaciones del mercado de valores.

Verdadero, recordemos que la beta mide la sensibilidad de la acción ante movimientos del mercado, por lo que cuanto mayor sea la beta de una acción, mayor será su nivel de rendimiento esperado, como ejemplo un inversionista le exigirá un rendimiento esperado mayor a una empresa con un beta mayor a 1 que a otra con un beta menor a 1, esto pues un beta mayor a 1 indica mucho riesgo sistemático y por tanto el inversionista tratará de compensar este riesgo exigiendo un mayor retorno.

c. Los inversionistas demandan tasas de rendimiento esperadas más altas de las acciones cuyos rendimientos están altamente expuestos al riesgo macroeconómico.

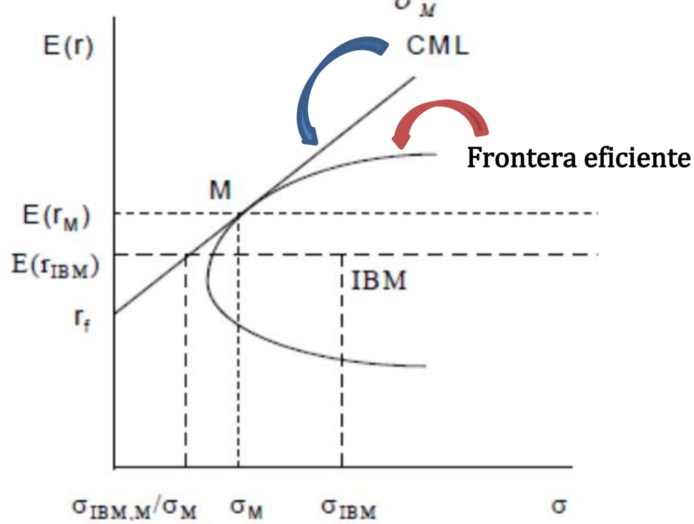
Verdadero, el riesgo total de un activo está conformado por dos componentes: el riesgo sistemático y el riesgo no sistemático. El primero de ellos, se refiere al riesgo visto a un nivel macroeconómico y que afecta a un gran número de activos en un grado u otro. como por ejemplo por la inflación, tasas de interés, tipo de cambio, Producto Bruto Interno, y, otros indicadores macroeconómicos. Estos tipos de condiciones económicas tienen un impacto en el valor o rendimiento de una acción, dado que el riesgo sistemático afecta a todos los activos y no se puede reducir a través de la diversificación, se exigirán mayores retornos para riesgos sistemáticos (betas) más expuestos a estos eventos macroeconómicos.

En la realidad cuando se calcula un beta de una empresa en un país en vías de desarrollo o en condiciones hiperinflacionarias, se usan fórmulas que consideran estas condiciones para el cálculo del beta.

d. Los inversionistas demandan tasas de rendimiento esperadas más altas para las acciones que tienen tasas de rendimiento más variables

Verdadero, cuando se tiene tasas de rendimiento más variables, se dice que tienen un alto riesgo (volatilidad), por lo que si utilizamos la curva de CML (Capital Market Line) para una acción o portafolio de acciones con una alta volatilidad o riesgo, se le exigirá un mayor retorno o rendimiento esperado:

$$E(r_p) = r_f + \sigma_p \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}$$

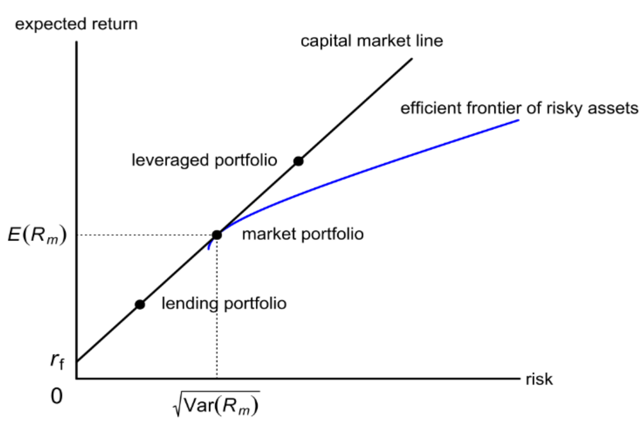


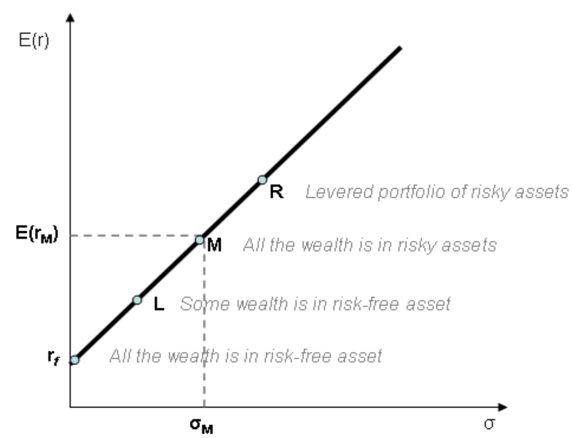
e. En un mundo donde se cumple CAPM. ¿Cómo distribuiría en forma óptima sus activos si quisiera minimizar el riesgo total? (asuma que dispone de un portafolio de mercado y un activo libre de riesgo)

Cuando se cumple CAPM, si se dispone de un portafolio de mercado y un activo libre de riesgo en nuestra cartera, se tendrá la siguiente ecuación: $E[r_P] = \alpha E[r_M] + (1-\alpha) r_f$ Si se quiere minimizar el riesgo total de este portafolio, la estrategia es invertir todo el capital a la tasa libre de riesgo ($\alpha = 0$), que si bien retornará menos que otras carteras si tendrá el menor riesgo ($\sigma = 0$).

f. Explique lo que es la CML. ¿Qué significa estar a la izquierda o a la derecha de la CML? (Hint: No confundir con sub/sobre valoración en la curva SML)

La línea del mercado de capitales (CML) muestra la compensación entre riesgo y rendimiento para las carteras que constan del activo libre de riesgo y la cartera de tangencia T, esta cartera de tangencia al tocar la frontera eficiente pasa a llamarse cartera o portafolio de mercado, recordemos que la frontera eficiente dibuja aquellas carteras que tienen el mayor nivel de rentabilidad para un nivel dado de riesgo o aquellas que minimizan el riesgo para un nivel dado de rentabilidad. Como los inversores buscarán maximizar la rentabilidad esperada dado un nivel de riesgo, escogerán una cartera dibujada en la CML y que se cruce con el punto de tangencia.





Por tanto, el punto de tangencia será la cartera óptima de mercado según el modelo CAPM.

Cualquier punto situado por **encima o a la izquierda de la CML son irrealizables**, mientras que aquellos puntos situados por **debajo o a la derecha de la CML son alcanzables pero ineficientes.**

A su vez todo punto de la CML con un retorno mayor al del mercado, será alcanzable si incorporamos deuda en nuestro portafolio (leveraged portfolio), en dónde nuestra tasa de interés al que pedimos prestado será la rentabilidad de la tasa libre de riesgo o r_f. Finalmente, el punto r_f en la CML es cuando invertimos el 100% de nuestro capital en el activo libre de riesgo, es decir cuando $\alpha = 0$ en la ecuación: $E[r_P] = \alpha E[r_M] + (1-\alpha)r_f$ el punto $E[r_M]$ es cuando invertimos el 100% de nuestro capital en el portafolio de mercado es decir $\alpha = 100\%$, cuando incorporamos deuda invertimos un monto mayor al 100% de nuestro capital en el portafolio de mercado, por ejemplo, si invierto el 200% de mi capital en el portafolio de mercado entonces $\alpha = 200\%$, notemos que el 100% que “no tengo” lo financió a través de deuda con la tasa libre de riesgo, por ende:

$$E[r_P] = 200\% E[r_M] + (1 - 200\%)r_f = 200\% E[r_M] - 100\% r_f$$

g. En un mundo donde se cumple CAPM, los inversionistas racionales preferirán siempre activos con Sharpe Ratio mayores, explique

La pendiente la CML es la denominada Sharpe Ratio, este ratio sirve para comparar carteras de diferentes riesgos y saber cuál ha sido más exitosa y ha obtenido una rentabilidad adicional por invertir en activos más arriesgados o dicho de otra forma mide el exceso de rentabilidad o retorno que se podría tener asumiendo una unidad extra de volatilidad o riesgo. Por ende carteras o activos con un Sharpe ratio mayor significarán que entregan un mayor exceso de retorno al asumir una unidad de riesgo mayor, por lo que se consideran mejores para ojos del inversionista.

$$SR_P = \frac{(\mathrm{E}(r_P) - r_f)}{\sigma_P}$$

O dicho de otra forma cuanto mayor sea el índice de Sharpe de una cartera o activo, mejor será su rendimiento ajustado al riesgo y por tanto los inversionistas preferían carteras o activos con un mayor índice de Sharpe.

Sharpe ratios superiores a 1 se consideran muy buenos, ya que ofrecen mayor rentabilidad a medida que el fondo asume más riesgo, por el contrario SR negativos indican rendimientos menores al de la rentabilidad de la tasa libre de riesgo y por tanto un inversionista "inteligente" nunca preferirá este tipo de activos, pues recordemos que según el modelo CAPM, el retorno óptimo para minimizar el riesgo total de una cartera conformada por el portafolio de mercado y un activo libre de riesgo será el de la tasa libre de riesgo. En general los SR están entre 0 y 1 lo que significa que el rendimiento del activo o portafolio P' conformado por una cartera de activos riesgosos y un activo libre de riesgo es inferior al riesgo o volatilidad asumido para este portafolio P'.

P2. En la siguiente tabla se muestran 3 activos de cierto mercado que cumple CAPM, **Determine los datos que faltan en esta tabla asumiendo que el retorno de mercado es del 8%** (Hint: Primero obtenga la tasa libre de riesgo)

	Beta individual	Retorno individual
Activo 1	1,2	9%
Activo 2	2,5	$\boldsymbol{r_2}$
Activo 3	$\boldsymbol{\beta_3}$	5%

Usando el hint, calculamos la tasa libre de riesgo para el Activo 1, usando la SML:

$$E(r_1) = r_f + \beta_1 \times (\mathrm{E}(r_m) - r_f)$$

$$9\% = r_f + 1{,}2 \times \left(8\% - r_f\right) \rightarrow 3\% = r_f$$

Con esto es directo, calcular el retorno esperado del activo 2:

$$E(r_2) = 3\% + 2{,}5 \times (8\% - 3\%) = 15{,}5\%$$

De la misma forma para el activo 3, se calcula el beta individual:

$$5\% = 3\% + \beta_3 \times (8\% - 3\%) \rightarrow \beta_3 = 0{,}4$$

P3. Suponga, las siguientes rentabilidades anuales de las acciones A, B, índice de mercado y un bono BCP 5 años en pesos chilenos:

	r_A	r_B	r_M	r_f
2018	11%	8%	9%	3%
2019	7%	6%	7%	3%
2020	5%	10%	8%	3%
2021	10%	16%	10%	3%
2022	14%	9%	12%	3%

Considerando que se cumple CAPM obtenga lo siguiente:

a. Obtenga el beta de las acciones A y B. ¿Cómo interpretaría los resultados?

Para obtener el beta de las acciones debemos usar la fórmula:

$$\beta_X = \frac{s(r_X, r_M)}{\hat{\sigma}_M^2}$$

Para calcular ambos términos se puede usar Excel calculando la matriz Varianza-Covarianza usando la función covarianza muestral: COVARIANZA.M() para el activo A, B y el mercado M (ver archivo adjunto) o calcularlos mediante la siguiente fórmulas:

$$s(X, Y) = \sum_{1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n-1}$$

$$\hat{\sigma}_X^2 = \sum_{1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})}{n-1} = \sum_{1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Esta fórmula de la covarianza i.e varianza con denominador n-1 se considera cuando tenemos un n chico, cuando n es muy grande por ley de los grandes números se usa:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma(X, Y) = \sum_{1}^{n} \frac{(X_i - E[X])(Y_i - E[Y])}{n}$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})}{n-1} = \sum_{1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Como tenemos solo 5 años de muestras anuales, usamos la varianza y covarianza muestral:

$$s(r_A, r_M) = \sum_{1}^{n} \frac{(r_{A_i} - \overline{r_A})(r_{M_i} - \overline{r_M})}{n-1}$$

Donde se calculan los retornos promedios para A y el mercado M a partir del promedio de los retornos anuales:

$$s(r_A\ ,r_M) = \sum_1^5 \frac{({r_A}_i - 9{,}4\%)({r_M}_i - 9{,}2\%)}{5-1} = 0{,}059\%$$

Análogamente para B:

$$s(r_B\ ,r_M) = \sum_1^5 \frac{({r_B}_i - 9{,}8\%)({r_M}_i - 9{,}2\%)}{5-1} = 0{,}028\%$$

Calculando la varianza muestral del mercado:

$$\hat{\sigma}_M^2 = \sum_1^5 \frac{({r_M}_i - 9{,}2\%)^2}{5-1} = 0{,}0370\%$$

Finalmente se obtienen los betas:

$$\beta_A = \frac{s(r_A\ ,r_M)}{\hat{\sigma}_M^2} = \frac{0{,}059\%}{0{,}0370\%} = 1{,}59$$

$$\beta_B = \frac{\mathrm{Cov}(r_B\ ,r_M)}{Var(r_M)} = \frac{0{,}028\%}{0{,}0370\%} = 0{,}76$$

Si hubiéramos tenido datos diarios de los 5 años, podríamos haber usado la varianza σ_X^2 y covarianza $\sigma(X,Y)$ para calcular el beta de la forma $\beta_X = \frac{\sigma(X,M)}{\hat{\sigma}_M^2}$ ya que cuando n es grande (5 años de muestras diarias) entonces el n-1 de las fórmulas de la varianza y covarianza muestral es irrelevante por ley de los grandes números.

Podemos interpretar dado los resultados, que el riesgo sistemático o no diversificable del activo A (β_A) es mayor que el de B, por tanto, un inversionista le exigirá un mayor retorno esperado al activo A, debido a que se esta asumiendo un mayor riesgo sistemático al adquirirlo (mayor sensibilidad a movimientos del mercado). Esto se puede corroborar aplicando CAPM y notando que el retorno esperado de A será mayor a B (usando la SML), como se aprecia en la pregunta b).

b. En base al modelo CAPM, ¿cuáles serían las rentabilidades esperadas para los instrumentos A y B? (Considere como esperanza de retorno de mercado, el promedio de las rentabilidades anuales de los últimos 5 períodos).

Dado que se cumple CAPM, queremos valorizar la rentabilidad esperada para activos individuales, por ende usaremos la fórmula de la SML:

$$E(r_A) = r_f + \beta_A \times (\mathrm{E}(r_M)\ -\ r_f)$$

Notemos que el retorno del activo libre de riesgo es 3% durante los 5 años no varía, recordemos que la varianza i.e. volatilidad del activo libre de riesgo es cero, en la teoría del CAPM.

$$E(r_A) = 3\% + 1{,}59 \times (9{,}2\%\ -\ 3\%) = 17{,}189\%$$

Análogamente para B:

$$E(r_B) = 3\% + 0{,}76 \times (9{,}2\% \; - \; 3\%) = 9{,}782\%$$

¿Qué podría concluir al comparar dichos retornos CAPM con las esperanzas de retorno anual como promedio histórico de los últimos 5 períodos de A y B?

Tomando el promedio histórico de los últimos 5 años, obtenemos para A y B:

$$\overline{r_A} = 9{,}40\%$$
$$\overline{r_B} = 9{,}80\%$$

Notemos que la acción A está sobrevalorada, pues el punto se ubica debajo de la curva SML, ya que la rentabilidad media anual efectiva (en base a los últimos 5 años) es menor a lo estimado por CAPM.

Por el contrario, la acción B está subvaluada, pues el punto se ubica por encima de la curva SML, ya que la rentabilidad media anual efectiva (en base a los últimos 5 años) es mayor a lo estimado por CAPM.

P4. Suponga una empresa que cotiza en el IPSA con ticker: JOSUEZIT2, se sabe que la prima por riesgo de mercado para este activo es del 10%, la tasa libre de riesgo es del 3% y el beta del activo es del 1,3. Con estos datos obtenga:

a. El retorno esperado de la acción JOSUEZIT2 (Asuma que se cumple CAPM)

Dado que se cumple CAPM, obtenemos el retorno del activo individual usando la SML:

$$E(r_J) = r_f + \beta_A \times (\mathrm{E}(r_M) \; - \; r_f)$$

Usando los datos del enunciado y observando que la prima/premio por riesgo de mercado es $\left(\mathrm{E}(r_M) - \; r_f\right) = 10\%$ obtenemos:

$$E(r_J) = 3\% + 1{,}3 \times 10\% = 16\%$$

b. Considerando los datos del enunciado, ¿qué pasa con el retorno esperado calculado en la parte anterior, si la tasa libre de riesgo sube en un 1%? (Hint: Considere lo que sucede con la prima por riesgo de mercado del activo, además asuma que el retorno de mercado se mantiene)

La tasa libre de riesgo aumenta a 4% y la prima de riesgo cambia de 10% a 9%, usando los nuevos datos, se calculada el retorno esperado:

$$E(r_J) = 4\% + 1{,}3 \times 9\% = 15{,}70\%$$

Por tanto, el retorno disminuye en 0,3% cuando aumenta la tasa libre de riesgo en 1% o 100 bps (1 bps = 0,01%)

P5. Suponga que hay dos acciones, A y B, con $\boldsymbol{\beta_A} = 1{,}4$ y $\boldsymbol{\beta_B} = 0{,}8$. Suponga también que el modelo CAPM se cumple en esta economía. Obtenga lo siguiente:

a. Si la rentabilidad media de la cartera de mercado es del 10% y la tasa de rentabilidad libre de riesgo es del 5%, calcule la rentabilidad media de las carteras compuesta por:

Dado que se cumple CAPM, calculamos el retorno esperado de A y B, usando la SML:

$$E(r_A) = r_f + \beta_A \times (\mathrm{E}(r_M) - r_f)$$

$$E(r_A) = 5\% + 1{,}4 \times (10\% - 5\%) = 12\%$$

$$E(r_B) = 5\% + 0{,}8 \times (10\% - 5\%) = 9\%$$

i. 75% de las acciones A y 25% de las acciones B

$$E(r_P) = w_A \times E(r_A) + w_B \times E(r_B)$$

$$E(r_P) = 75\% \times 12\% + 25\% \times 9\% = 11{,}25\%$$

ii. 50% de las acciones A y 50% de las acciones B

$$E(r_P) = 50\% \times 12\% + 50\% \times 9\% = 10{,}50\%$$

iii. 25% de las acciones A y 75% de las acciones B

$$E(r_P) = 25\% \times 12\% + 75\% \times 9\% = 9{,}75\%$$

b. Si la volatilidad de la acción A es 4%, B es 2%. Calcule la varianza de las carteras en (i), (ii), (iii). Asuma que la covarianza entre los activos A y B es 0,07%

Sabemos que la fórmula de la varianza en un portafolio de 2 activos es:

$$\sigma_P^2 = W_A^2\sigma_A^2 + 2W_AW_B\,\sigma_{A,B} + W_B^2\sigma_B^2$$

i. 75% de las acciones A y 25% de las acciones B

$$\sigma_P^2 = 75\%^2 4\%^2 + 2 \times 75\% \times 25\% \times 0{,}07\% + 25\%^2 2\%^2 = 0{,}119\%$$

ii. 50% de las acciones A y 50% de las acciones B

$$\sigma_P^2 = 50\%^2 4\%^2 + 2 \times 50\% \times 50\% \times 0{,}07\% + 50\%^2 2\%^2 = 0{,}085\%$$

iii. 25% de las acciones A y 75% de las acciones B

$$\sigma_P^2 = 25\%^2 4\%^2 + 2 \times 25\% \times 75\% \times 0{,}07\% + 75\%^2 2\%^2 = 0{,}059\%$$

c. ¿Cuál es el rendimiento esperado y la varianza de las carteras si están financiadas en un 50% con préstamo a la tasa libre de riesgo?

Considerando la cartera conformada por el portafolio i) y el préstamo del 50% de nuestro capital a la tasa libre de riesgo:

$$E(r_P) = 150\% \times 11{,}25\% - 50\% \times 5\% = 12{,}81\%$$

Considerando la cartera conformada por el portafolio ii) y el préstamo del 50% de nuestro capital a la tasa libre de riesgo:

$$E(r_P) = 150\% \times 10{,}5\% - 50\% \times 5\% = 11{,}88\%$$

Considerando la cartera conformada por el portafolio iii) y el préstamo del 50% de nuestro capital a la tasa libre de riesgo:

$$E(r_P) = 150\% \times 9{,}75\% - 50\% \times 5\% = 10{,}94\%$$

d. ¿Cuál es la volatilidad de estos portafolios con deuda calculados en c)?

Hallaremos primero la varianza de los portafolios en c) mediante la fórmula:

$$\sigma_P^2 = W_A^2\sigma_A^2 + 2W_AW_B\,\sigma_{A,B} + W_B^2\sigma_B^2$$

Considerando que la varianza del activo libre de riesgo es 0 y covarianza entre cualquier cartera/activo y el activo libre de riesgo también es 0, la fórmula queda como:

$$\sigma_{P'}^2 = W_P^2\sigma_P^2$$

Luego basta notar que la varianza del portafolio P' conformado por el portafolio P (cartera con distintas ponderaciones entre el activo A y B) y el activo libre de riesgo solo dependerá del peso asignado al portafolio P.

Obteniendo las varianzas y las volatilidades:

Considerando la cartera conformada por el portafolio i) y el préstamo del 50% de nuestro capital a la tasa libre de riesgo (i.e. un 150% invertido en el portafolio i)

$$\sigma_{P'}^2 = 150\%^2 \times 0{,}119\% = 0{,}268\% \rightarrow \sigma_{P'} = \sqrt{0{,}268\%} = 5{,}17\%$$

Considerando la cartera conformada por el portafolio ii) y el préstamo del 50% de nuestro capital a la tasa libre de riesgo (i.e. un 150% invertido en el portafolio ii)

$$\sigma_{P'}^2 = 150\%^2 \times 0{,}085\% = 0{,}191\% \rightarrow \sigma_{P'} = \sqrt{0{,}191\%} = 4{,}37\%$$

Considerando la cartera conformada por el portafolio iii) y el préstamo del 50% de nuestro capital a la tasa libre de riesgo (i.e. un 150% invertido en el portafolio iii)

$$\sigma_{P'}^2 = 150\%^2 \times 0{,}059\% = 0{,}133\% \rightarrow \sigma_{P'} = \sqrt{0{,}133\%} = 3{,}64\%$$

e. De los portafolios con deuda, cuyos retornos y volatilidades fueron calculados en c y d, ¿cuál preferiría?

Para decidir esto, podemos usar el Sharpe Ratio, que mide el exceso de rendimiento que se tiene al asumir una unidad extra de riesgo (volatilidad).

Considerando la cartera conformada por el portafolio i) y el préstamo del 50% de nuestro capital a la tasa libre de riesgo:

$$SR_P = \frac{(12{,}81\% - 5\%)}{5{,}17\%} = 1{,}51$$

Considerando la cartera conformada por el portafolio ii) y el préstamo del 50% de nuestro capital a la tasa libre de riesgo:

$$SR_P = \frac{(11{,}88\% - 5\%)}{4{,}37\%} = 1{,}57$$

Considerando la cartera conformada por el portafolio iii) y el préstamo del 50% de nuestro capital a la tasa libre de riesgo:

$$SR_P = \frac{(10{,}94\% - 5\%)}{3{,}64\%} = 1{,}63$$

Por lo que preferiremos la cartera conformada por el portafolio iii) y el préstamo del 50% de nuestro capital a la tasa libre de riesgo ya que entrega un Sharpe Ratio de 1,63 es decir si la volatilidad de este portafolio aumenta en un 1% entonces el retorno esperado de la cartera con aumentará en 1,63*1%=1,63%

P6.

a) Verdadero o Falso:

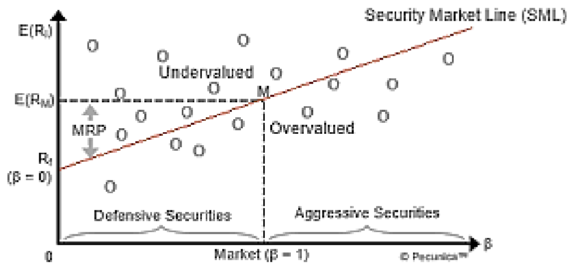
- Acciones con β=0 tienen un retorno esperado igual a cero.

Falso, recordando la fórmula SML:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_{\mathrm{M}}) - r_f)$$

Podemos notar que si el beta β_i de un activo es cero, el retorno esperado $E(r_i)$ será igual al retorno del activo libre de riesgo, por lo que para que se cumpla el comente, se requiere que la tasa libre de riesgo r_f sea igual a cero.

- Si una acción se encuentra bajo la SML, el precio está sobrevalorado.



MRP: Market risk premium o premio/prima por riesgo de mercado.

Verdadero, si una acción se encuentra por debajo de la SML, se dice que está sobrevalorada u overpriced **(es decir su precio hoy es considerado alto)**, esto si bien es contraintuitivo tiene su lógica, pues si una acción se encuentra en ese punto significa que **a futuro se espera un retorno menor para un mismo riesgo sistemático beta.**

Para aclarar esto, recordemos que el retorno de un activo en función de su precio sigue la siguiente fórmula (asumiendo que no se pagan dividendos para simplificar la demostración):

$$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}}$$

Si movemos los índices, podemos encontrar una relación para el retorno esperado de **un activo** conociendo el **precio esperado en el año t+1:**

$$E[r_{t+1}] = \frac{(E[P_{t+1}] - P_t)}{P_t}$$

Esta fórmula nos indica que para que el retorno del activo disminuya en t+1 entonces el precio esperado en t+1 debe disminuir, es decir el precio esperado de la acción debe ser menor al precio de hoy. Llevando esta lógica a la curva SML si se espera un retorno menor (punto debajo de la SML), entonces hoy la acción está sobrevalorada, porque se espera que el precio disminuya en t+1 y hoy estamos comprando la acción a un precio mayor (overpriced).

De manera similar, si la acción se grafica por encima de la SML, significa que **hoy** esta tiene un **precio de compra que es considerado bajo** (underpriced), pues se está **esperando un rendimiento i.e. precio de la acción mayor al de hoy, para un mismo riesgo sistemático beta**.

Para este comente, deben recordar que la teoría del CAPM se basa en que el mercado de capitales se encuentra en equilibrio (oferta=demanda), por tanto, la interacción de oferta y demanda determinará el precio de los activos. Por lo que, si los inversionistas empiezan a comprar acciones subvaloradas, la cantidad demandada por estas aumentará, sin embargo, este punto fuera del equilibrio (encima de la curva SML) tarde o temprano volverá nuevamente a este, ósea a formar parte de la recta SML (O=D) forzando una disminución del precio esperado i.e retorno (es decir no se puede sacar una ventaja al comprar acciones subvaloradas porque el mercado es eficiente).

- Según CAPM, las acciones con igual beta tienen la misma varianza

Falso, tener la misma varianza significa tener la misma volatilidad (riesgo) de una cartera, sin embargo el riesgo se puede dividir en dos:

- Riesgo diversificable/no sistemático/idiosincrático/específico
- Riesgo no diversificable/sistemático/de mercado

El riesgo diversificable, es el **riesgo inherente** causado por las operaciones de una empresa específica **y refleja el impacto de sus decisiones** a nivel operativo y financiero, por ejemplo, una empresa puede reducir este riesgo incluso volviéndolo cero, eligiendo correctamente los directivos, controlando adecuadamente el nivel de endeudamiento, etc.

Por otro lado, el **riesgo no diversificable o sistemático, es representado por el beta** y refleja el impacto de factores económicos, geopolíticos y financieros. Si bien el riesgo sistemático es impredecible e **imposible de evitar por completo**, los inversores pueden administrarlo asegurándose de que sus carteras incluyan una variedad de clases de activos, como renta fija, efectivo y bienes raíces, cada uno de los cuales reaccionará de manera diferente ante un evento que afecte el mercado en general. Un **aumento en las tasas de interés**, por ejemplo, hará que algunos **bonos de reciente emisión** sean más **valiosos**, que **acciones de algunas empresas** que pueden **disminuir su valor**. Por lo tanto, asegurarse de que una **cartera o portafolio incorpore diversos generadores de ingresos** ayudara a mitigar la pérdida de valor de un portafolio.

b) Considere que la cartera de mercado renta un 14% y que su volatilidad es del 20%. Latasa libre de riesgo es de un 5.5%

i.- Parametrice la CML de esta economía

Cuando nos piden parametrizar la CML, se nos debe venir a la mente **parametrizar un portafolio**, recordemos que la CML se utiliza para graficar el **riesgo - rentabilidad** de **los portafolios que combinan de manera óptima la tasa de retorno libre de riesgo y el portafolio de mercado de activos riesgosos,** en cambio la SML se utiliza para mostrar el **riesgo - rentabilidad** de **acciones individuales**.

Como queremos parametrizar un portafolio cualquiera en esta economía mediante CML, debemos comparar esta cartera con una referencia, esta referencia es el portafolio o cartera de mercado (caracterizado por su retorno y volatilidad de mercado), además debemos considerar la tasa de retorno del activo libre de riesgo y una prima o premio de riesgo de mercado, en efecto:

$$E(r_P) = r_f + \frac{\sigma_P}{\sigma_M}(\mathrm{E}(r_M) - r_f)$$

Reemplazando:

$$E(r_P) = 0{,}055 + \frac{\sigma_P}{0{,}2}(0{,}14 - 0{,}055)$$

$$\mathrm{E}(r_\mathrm{P}) = 0{,}055 + 0{,}425\ \sigma_P$$

ii.- ¿Qué rentabilidad exigiría a una inversión que presenta una volatilidad del 25%?

Basta reemplazar en la fórmula anterior una volatilidad $\sigma_P = 0{,}25$

$$\mathrm{E}(r_\mathrm{P}) = 0{,}055 + 0{,}425 \times 0{,}25 = 16{,}13\%$$

iii.- Con los datos que posee, ¿Cómo replicaría la inversión anterior?

El modelo CAPM introduce el concepto de activo libre de riesgo, el cual permite tener una cartera con una parte riesgosa y otra no riesgosa, en efecto:

$$\mathrm{E}(r_{P'}) = \alpha\,\mathrm{E}(r_{\mathrm{P}}) + (1 - \alpha)\, r_f$$

Donde $\mathbf{E}(\boldsymbol{r_{P'}})$ es el retorno de un portafolio conformado por una **cartera de solo activos riesgosos con retorno $\mathbf{E}(\boldsymbol{r_{\mathrm{P}}})$** y **un activo libre de riesgo (bono) con un retorno $\boldsymbol{r_f}$**.

Podemos darnos cuenta de la parte i) y ii) que $\mathrm{E}(r_{P'}) = 16{,}13\%$ pues contiene una componente de un portafolio con solo activos riesgosos $\mathrm{E}(r_{\mathrm{P}})$ y una tasa libre de riesgo r_f. Por ende, para replicar la inversión anterior basta considerara $\mathrm{E}(r_{\mathrm{P=M}})$ el retorno del portafolio de mercado*, esto dado que la curva CML contiene la cartera de mercado (ver gráfico P1a)

Finalmente:

$$\mathrm{E}(r_{P'}) = \alpha\,\mathrm{E}(r_{\mathrm{M}}) + (1 - \alpha)\, r_f$$

$$0{,}1613 = \alpha \times 0{,}14 + (1 - \alpha) \times 0{,}055$$
$$\alpha = 1{,}25 = 125\%$$

De aquí podemos concluir que para replicar un portafolio de 16,13% de rendimiento, se debe utilizar un 125% de nuestro dinero en el portafolio de mercado y el -25% en el activo libre de riesgo (algún bono).

Veamos un ejemplo para entender estas ponderaciones:

Imaginemos que disponemos de 100 dólares de dinero para invertir **hoy** y quiero un retorno esperado de 16,13%, entonces para replicar esta inversión y lograr este retorno esperado, comprare 125 dólares en un portafolio de mercado.

Notemos que los 25 dólares extra que "no tengo" es deuda** que adquirí (similar a cuando pido un préstamo en un banco***), hoy recibí estos 25 dólares para totalizar una inversión de 125 en el portafolio de mercado y estos 25 dólares a su vez representan una deuda que adquirí al emitir el bono.

***Nota 1: Para replicar la inversión, pudimos haber escogido otros portafolios con activos riesgosos (sin considerar activo libre de riesgo), sin embargo, el enunciado brinda el retorno y volatilidad de mercado, por ende, usamos inteligentemente el portafolio de mercado, que también resulta ser un portafolio de solo activos riesgosos.**

****Nota 2: Es una deuda porque, si bien yo como emisor del bono recibí el facevalue de 25 dólares por parte del comprador, a su vez deberé pagarle los cupones respectivos (flujos futuros negativos "deuda").**

*****Nota 3: En el caso de un bono el "valor del préstamo" es el valor cara o valor nominal que recibo cuando alguien me compra el bono (acreedor) y que luego de ciertos periodos (al igual que un préstamo) deberé pagar cuotas, en este caso cupones al acreedor del bono.**

P7.
Su actual portafolio consiste en 3 activos, A, B y el activo libre de riesgo Usted tienen la siguiente información acerca de las acciones (A y B), portafolio de mercado (m) y el activolibre de riesgo (f):

$$\rho_{A,m} = 0{,}6 \qquad \sigma_A^2 = 0{,}09 \qquad r_m = 0{,}13$$
$$\rho_{A,B} = 0{,}4 \qquad \sigma_B^2 = 0{,}0625 \qquad r_f = 0{,}04$$
$$\rho_{B,m} = 0{,}8 \qquad \sigma_m^2 = 0{,}04$$

Suponga que las personas pueden pedir prestado y prestar a la tasa libre de riesgo y que el modelo CAPM se cumple. Considere además que usted tiene invertido \$ 200.000 en la acción A, \$200.000 en la acción B y \$100.000 en el activo libre de riesgo a.- ¿Cuáles son los retornos de las acciones?

Como queremos saber los retornos esperados de cada acción individualmente y se cumple CAPM, podemos usar la ecuación de SML para la acción A y B:

$$E(r_A) = r_f + \beta_A \times (\mathrm{E}(r_m) - r_f)$$

$$E(r_B) = r_f + \beta_B \times (\mathrm{E}(r_m) - r_f)$$

Notemos que tenemos todos los datos menos los betas, recordemos que en CAPM, el beta de un activo se puede hallar mediante la siguiente fórmula:

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_m)}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_i \, \sigma_m \, \rho_{i,m}}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_i \, \rho_{i,m}}{\sigma_m}$$

Reemplazando y obteniendo los betas de cada acción:

$$\beta_A = \frac{\sqrt{0{,}09} \times 0{,}6}{\sqrt{0{,}04}} = 0{,}9 \qquad \beta_B = \frac{\sqrt{0{,}0625} \times 0{,}8}{\sqrt{0{,}04}} = 1$$

Obteniendo los retornos de cada acción:

$$E(r_A) = 0{,}04 + 0{,}9 \times (0{,}13 - 0{,}04) = 0{,}129$$

$$E(r_B) = 0{,}04 + 1 \times (0{,}13 - 0{,}04) = 0{,}13 = E(r_M)$$

b.- ¿Cuál es la varianza y beta del portafolio?

Tenemos que calcular σ_P^2, β_P para ello debemos notar que, si incorporamos el activo libre de riesgo al portafolio conformado por A y B, la varianza y beta de este portafolio no se verá afectada.

Demostración:

$$\sigma_P^2 = [W_A \quad W_B \quad W_f] \times \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{A,B} & \sigma_{A,f} \\ \sigma_{A,B} & \sigma_B^2 & \sigma_{B,f} \\ \sigma_{A,f} & \sigma_{B,f} & \sigma_f^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_A \\ W_B \\ W_f \end{bmatrix}$$

Operando nos damos cuenta de que la varianza de la cartera al incorporar al activo libre de riesgo es la misma que si no lo incorporáramos, ósea:

$$\sigma_P^2 = W_A^2\sigma_A^2 + W_A W_B \, \sigma_{A,B} + W_A W_f \, \sigma_{A,f} + W_A W_B \, \sigma_{A,B} + W_B^2\sigma_B^2 + W_B W_f \, \sigma_{B,f} + W_A W_f \, \sigma_{A,f} + W_B W_f \, \sigma_{B,f} + W_f^2\sigma_f^2$$

Sabemos que para un activo libre de riesgo se cumple que: $\sigma_f^2 = 0 \; i.e. \; \sigma_f = 0 \; y \; \sigma_{i,f} = 0$, es decir al ser la varianza i.e. volatilidad del activo libre de riesgo igual a 0, además de la covarianza entre cualquier acción con el activo libre de riesgo igual 0, la ecuación anterior se transformaría en la varianza del portafolio de 2 acciones (A y B) es decir:

$$\sigma_P^2 = W_A^2\sigma_A^2 + 2W_A W_B \, \sigma_{A,B} + W_B^2\sigma_B^2$$

Notemos que faltan $W_A\ y\ W_B$, el enunciado menciona que invertimos $200.000 en A, $200.000 en B y $100.000 en el activo libre de riesgo. Notemos que si bien en la fórmula anterior la varianza del portafolio no se ve afectada por el activo libre de riesgo, si calculamos el retorno de la cartera formada por A, B y el activo libre de riesgo si afectará cuanto invertimos en el activo libre de riesgo a nuestro retorno de portafolio.

Obteniendo $W_A\ y\ W_B$:

$$W_A = \frac{\$200.000}{\$500.000} = 0{,}4$$

$$W_B = \frac{\$200.000}{\$500.000} = 0{,}4$$

$$W_f = \frac{\$100.000}{\$500.000} = 0{,}2$$

Basta reemplazar los pesos en la fórmula de la varianza de portafolio:

$$\sigma_P^2 = 0{,}4^2 \times 0{,}09 + 2 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \times\ \sigma_{A,B} + 0{,}4^2 \times 0{,}0625$$

Usando que la covarianza de dos activos es:

$$Cov(r_A, r_B) = \sigma_A\, \sigma_B\, \rho_{A,B}$$

$$\sigma_P^2 = 0{,}4^2 \times 0{,}09 + 2 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \times \sigma_A\, \sigma_B\, \rho_{A,B}\ + 0{,}4^2 \times 0{,}0625$$
$$\sigma_P^2 = 0{,}4^2 \times 0{,}09 + 2 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \times \sqrt{0{,}09} \times \sqrt{0{,}0625}\ \times 0{,}4 + 0{,}4^2 \times 0{,}0625$$
$$\sigma_P^2 = 0{,}034$$

Para hallar el beta del portafolio de los 3 activos, debemos recordar la siguiente ecuación:

$$\beta_P = \beta_A \times W_A + \beta_B \times W_B + \beta_f \times W_f$$

Basta notar que como $\beta_f = 0$, es decir el riesgo sistemático de un activo libre de riesgo es 0, entonces el beta del portafolio solo considerará la aportación de los activos A y B:

$$\beta_P = 0{,}9 \times 0{,}4 + 1 \times 0{,}4 + 0 \times 0{,}2 = 0{,}76$$

c.- Suponga que también puede invertir en el portafolio de mercado. Encuentre el portafolio eficiente que tenga la misma desviación estándar que su portafolio, pero que tenga el retorno esperado más alto posible ¿Cuál es el retorno esperado de este portafolio eficiente?
¿Cuáles son los activos que componen este portafolio eficiente y en que proporciones?

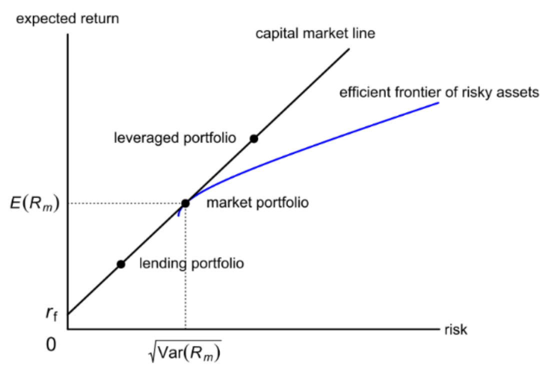
¿Cuál es el retorno esperado de este portafolio eficiente?
Nos piden hallar el retorno de un portafolio conformado por una cartera de mercado y un activo libre de riesgo, además nos dicen que este portafolio debe tener una varianza $\sigma_P^2 = 0{,}034$, como en este problema se cumple CAPM, entonces dado que estamos tratando con portafolios usaremos CML, recordemos que todo portafolio que está en la curva CML representa la rentabilidad eficiente para una volatilidad dada*.

$$E(r_P) = r_f + \frac{\sigma_P}{\sigma_M}(\mathrm{E}(r_M) \; - \; r_f)$$

Como la varianza de este portafolio debe ser $\sigma_P^2 = 0{,}034$ entonces $\sigma_P = \sqrt{0{,}034}$

$$E(r_P) = 0{,}04 + \frac{\sqrt{0{,}034}}{\sqrt{0{,}04}}(0{,}13 \; - \; 0{,}04) = 0{,}123$$

*Nota 1: Recordar que riesgo de una cartera o acción = volatilidad = desviación estándar



¿Cuáles son los activos que componen este portafolio eficiente y en que proporciones?

La cartera calculada en la anterior pregunta esta conformada por el portafolio de mercado y un activo libre de riesgo, para ver en que proporciones usemos la siguiente ecuación:

$$\mathrm{E}(r_\mathrm{P}) = \alpha \, \mathrm{E}(r_\mathrm{M}) + (1 - \; \alpha) \, r_f$$

$$0{,}123 = \alpha \times 0{,}13 + (1 - \alpha) \times 0{,}04$$
$$\alpha = 0{,}92 = 92\%$$

Por lo que el portafolio estará conformado en un 92% de activos riesgosos (cartera de mercado) y un 8% en un activo libre de riesgo, es decir si tengo $100 de dinero disponible para invertir $92 lo invertiré en un portafolio de mercado y $8 lo invertiré adquiriendo un bono de gobierno, recordemos que un activo libre de riesgo es "libre de riesgo" porque existe "nula" probabilidad de impago en los bonos emitidos por los gobiernos (comúnmente se usa el US Treasury para carteras indexadas al dólar, en Chile se usan los bonos en pesos emitidos por el Banco Central de Chile también conocidos como BCP)

d.- Suponga que desea endeudarse a la tasa libre de riesgo para invertir el doble de lo que tiene invertido en los activos riesgosos y mantener la misma cantidad de $100.000 invertidos en el activo libre de riesgo. Calcule el retorno de este portafolio.

Como me piden invertir el doble en los activos riesgosos entonces la ponderación será la siguiente:

$$W_A = \frac{\$400.000}{\$500.000} = 0{,}8$$

$$W_B = \frac{\$400.000}{\$500.000} = 0,8$$

Podemos notar que dispongo de \$500.000 para armar mi cartera, por un lado \$400.000 se va para el activo A y \$400.000 se debe ir para B, además no dicen que debo mantener mi inversión de \$100.000 en el activo libre de riesgo, por lo que se deben tener las siguientes ponderaciones:

$$W_f = \frac{\$100.000 - \$400.000}{\$500.000} = \frac{-\$300.000}{\$500.000} = -0,6$$

Si analizamos los numeradores de cada ponderación, para este portafolio debo comprar \$400.000 del activo A, \$400.000 del activo B y \$100.000 del activo libre de riesgo, totalizando \$900.000 en activos, como yo solo dispongo de \$500.000 debo endeudarme con \$400.000 que es la financiación que me falta, es decir se adquiere un pasivo a la tasa libre de riesgo, por lo que ahora si puedo adquirir \$900.000 en los activos, adquiriendo \$400.000 en forma de deuda (como es deuda es un flujo negativo y por tanto al sumar este monto con lo destinado a inversión en el activo libre de riesgo se restan estos flujos).

Luego basta notar que los pesos suman 100%, es decir se encuentra correctamente conformada en términos matemáticos, ahora para calcular el retorno del portafolio se debe considerar la siguiente fórmula:

$$\mathrm{E}(r_\mathrm{P}) = W_A\ \mathrm{E}(r_\mathrm{A}) + W_B \mathrm{E}(r_\mathrm{B}) + W_f\ r_f$$

$\mathrm{E}(r_\mathrm{A})$ y $\mathrm{E}(r_\mathrm{B})$ los obtuvimos en la parte a) por lo que solo basta reemplazar las ponderaciones y las tasas:

$$\mathrm{E}(r_\mathrm{A}) = 0,129; \mathrm{E}(r_\mathrm{B}) = 0,13;\ r_f = 0,04$$

$$\mathrm{E}(r_\mathrm{P}) = 0,8 \times 0,129 + 0,8 \times 0,13 - 0,6 \times 0,04 = 0,1832$$

P8.

Suponga que el activo de portafolio de mercado tiene un retorno esperado de 11%, una varianza de 0,09 y la tasa libre de riesgo es de 5%. Además, existe un activo X con un retornode 14% y una volatilidad de 0,5

a.- Calcule el Sharpe Ratio del portafolio de mercado.
b.- Calcule el Sharpe Ratio de la acción X. Basado en su resultado ¿usted preferiría invertir enel portafolio de mercado o en la acción X? Explique.

a) Sharpe Ratio del portafolio de mercado

Sabemos que el Sharp Ratio tiene la siguiente fórmula:

$$SR_P = \frac{(\mathrm{E}(r_P)\ -\ r_f)}{\sigma_P}$$

Recordemos que esta fórmula es la pendiente la ecuación de un portafolio que incorpora una cartera de solo activos riesgosos y un activo libre de riesgo:

$$E(r_{P'}) = r_f + \frac{\sigma_{P'}}{\sigma_P}(\mathrm{E}(r_P) - r_f)$$

Cuando el portafolio P de solo activos riesgosos es igual al mercado (P=M) entonces la ecuación se llama CML (Capital Market Line):

$$E(r_P) = r_f + \frac{\sigma_P}{\sigma_M}(E(r_M) - r_f)$$

Dicho esto, el Sharpe Ratio del portafolio de mercado será el siguiente:

$$SR_M = \frac{(\mathrm{E}(r_M) - r_f)}{\sigma_M} = \frac{0{,}11 - 0{,}05}{\sqrt{0{,}09}} = 0{,}2$$

$$E(r_P) = 0{,}05 + 0{,}2 \times \sigma_P$$

El ratio de Sharpe nos dice que si aumentamos en una unidad el riesgo (volatilidad) que estamos dispuestos a asumir en nuestro portafolio, el retorno esperado tendrá un aumento de 0,2 unidades, por ejemplo, si la volatilidad del portafolio es de 10% y tiene un aumento de 1%, entonces tendré un exceso de retorno de $0{,}2 \times 1\% = 0{,}002$, comprobomeslo:

$$E(r_P) = 0{,}05 + 0{,}2 \times 10\% = 0{,}07$$

Al aumentar en un 1% la volatilidad o riesgo, se tiene:

$$E(r_P) = 0{,}05 + 0{,}2 \times (10\% + 1\%) = 0{,}0072$$

Es decir, un exceso de retorno de 0,002

b) Sharpe ratio del activo X

Análogamente:

$$SR_X = \frac{(\mathrm{E}(r_X) - r_f)}{\sigma_X}$$

Recordemos que la fórmula de Sharpe ratio es en base a portafolios, sin embargo, un portafolio puede estar conformado de una sola acción como es el caso de este problema.

$$SR_X = \frac{0{,}14 - 0{,}05}{0{,}5} = 0{,}18$$

Cuanto mayor sea el índice de Sharpe de una cartera o activo, mejor será su rendimiento ajustado al riesgo y por tanto los inversionistas preferían carteras o activos con un mayor índice de Sharpe, en este caso preferiríamos el portafolio de mercado pues $SR_M > SR_X$