

The background of the slide features a horizontal spectrum of light colors, including purple, blue, green, and yellow, set against a dark background. This spectrum is repeated in the top and bottom sections of the slide.

Electromagnetismo

Prof. Domenico Sapone

Copyright © 2022 Domenico Sapone

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

First printing, July 2022



Contents

1	Campo electrostático	7
1.1	Cargas eléctricas. Aislantes y conductores	7
1.1.1	Estructura de la materia	9
1.2	Ley de Coulomb	10
1.3	Campo electrostático	12
1.3.1	Cálculo del campo eléctrico por una carga puntual	13
1.4	\vec{E} producido por una distribución continua	13
1.5	Lineas de fuerza de \vec{E}	18
1.6	Movimiento de una carga en un campo electrostático: experimento de Rutherford	19
1.7	Comentarios conclusivos	24
2	Trabajo eléctrico	27
2.1	Calculo del campo electrostático	29
2.2	Energía potencial electrostática	31
2.3	El campo como gradiente del potencial	39
2.4	Superficie equipotencial	42
2.5	Rotor del campo vectorial	44
2.6	El dipolo eléctrico	46
2.6.1	Fuerza sobre un dipolo eléctrico	50
2.6.2	Potencial de un sistema de cargas en la aproximación de dipolo	53
3	Ley de Gauss	55
3.1	Flujo del campo eléctrico. Ley de Gauss.	55

3.2	Algunas aplicaciones y consecuencias de la ley de Gauss	58
3.3	Campo \vec{E} en el entorno de una capa superficial de carga	64
3.4	Ley de Gauss en forma diferencial	65
3.5	Ecuaciones de Maxwell para la electroestática	67
3.6	Repaso sobre las operaciones de gradiente, rotor y divergencia	68
4	Conductores	73
4.1	Capacidad de un conductor aislado	75
4.1.1	Conductor con una cavidad	76
4.2	Condensadores	78
4.2.1	Conexión de condensadores	80
4.3	Energía del campo electrostático	81
4.4	Energía de un sistema de cargas	83
4.5	Fuerza entre las armaduras	87
5	Dielectricos	91
5.1	Polarización de los dieléctricos	93
5.2	Campo \vec{E} producido por un dieléctrico polarizado	95
5.3	El campo eléctrico en un dieléctrico polarizado	97
5.4	Vector inducción eléctrica	98
5.5	Dieléctricos isotropos y anisotropos	100
5.6	Discontinuidades	102
5.7	Energía electrostática en los dieléctricos	105
6	Corriente eléctrica	109
6.1	Corriente eléctrica	112
6.2	Ley de conservación de la carga eléctrica	114
6.3	Ley de Ohm	116
6.4	Efecto Joule	117
6.4.1	Potencia. Efecto Joule	121
6.5	Resistencias en serie y en paralelo	122
6.5.1	Resistencias en serie	122
6.5.2	Resistencia en paralelo	123
6.6	Ley de Ohm generalizada	124
6.7	Carga y descarga de un condensador a través de una resistencia	126
6.8	Leyes de Kirchhoff	130
7	Campo magnético	133
7.1	Lineas de fuerza del campo magnético	136
7.2	Fuerza magnética sobre una carga en movimiento	137
7.2.1	Movimiento en un campo uniforme, $\theta = \pi/2$	139
7.2.2	Movimiento en un campo uniforme, θ genérico.	140

7.3	Fuerza magnética en un conductor	142
7.4	Principio de equivalencia de Ampère	145
7.5	Fuerza, torque y trabajo a través del flujo magnético	148
7.6	Efecto Hall	152
7.7	Ejemplos de movimiento de cargas en un campo magnético uniforme	154
8	Ley de Ampère	159
8.1	Campo magnético producido por una corriente	159
8.2	Campos magnéticos producidos por circuitos particulares	161
8.2.1	Hilo rectilíneo indefinido. Ley de Biot-Savart	161
8.2.2	Espiral circular	164
8.2.3	Solenoides lineales	166
8.3	Acciones electrodinámicas entre circuitos	167
8.4	Ley de Ampère	170
8.5	Flujo entre circuitos. Autoflujo	175
8.5.1	Autoflujo	176
8.6	Propiedad del campo \vec{B} en el vacío	177
8.7	Potencial vector	179
8.8	Transformaciones entre campos eléctricos y magnéticos	182
9	Propiedades magnéticas de la materia	185
9.1	Magnetización de la materia	185
9.2	Permeabilidad magnética	186
9.3	Corrientes amperianas	189
9.4	El campo H	191
9.5	Discontinuidades en medio magnetizados	194
9.6	Comparación electrostática y magnetostática	197
9.7	Materiales ferromagnéticos	198
9.8	Circuitos magnéticos	200
9.9	Electroimán. Ímán permanente	203
10	Inducción electromagnética	207
10.1	Campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo	207
10.2	Ley de Faraday de la inducción electromagnética	208
10.2.1	Ley de Lenz	210
10.3	Origen física de la fuerza electromotriz inducida	210
10.4	Aplicaciones de la ley de Faraday	215
10.5	Corrientes de Foucault	218
10.6	Autoinducción	219
10.7	Energía magnética	222
10.8	Presión magnética	225
10.9	Inducción mutua	228

10.10	Corriente de desplazamiento. Ley de Ampère-Maxwell.	229
10.11	Las ecuaciones de Maxwell	232
11	Ondas electromagnéticas	235
11.1	Ondas electromagnéticas planas	235
11.2	Polarización de las ondas electromagnéticas planas	239
11.3	Energía de una onda electromagnética. Vector de Poynting	243
11.4	Cantidad de movimiento de una onda electromagnética plana	246
11.5	Ondas electromagnéticas planas, esféricas, cilíndricas	250



1. Campo electrostático

1.1 Cargas eléctricas. Aislantes y conductores

Entre las interacciones fundamentales existentes en la naturaleza, la primera en haber sido descubierta y estudiada cuantitativamente fue la *interacción gravitacional*, responsable de la mayoría de los fenómenos que se observan a escala macroscópica.

Los movimientos de los planetas, así como de cualquier cuerpo, están sujetos a la *ley de Newton*, la cual se escribe en modulo como:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}; \quad (1.1)$$

dos cuerpos con masas m_1 y m_2 , puestos a una distancia r muy grande en comparación a las dimensiones de los mismos, interactúan con una fuerza cuya intensidad es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; donde las masas de los cuerpos, de la cual depende la interacción, pueden ser consideradas iguales a las masas inerciales, o sea, aquellas que aparecen en la segunda ley de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$; G corresponde a la constante de gravitación universal, con módulo $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{N m}^2/\text{Kg}^2$.

Otra interacción fundamental, que juega un papel esencial en la constitución de la materia, es la *interacción electromagnética*, cuyas leyes fueron formuladas de manera cuantitativa entre finales del siglo XVIII y la primera mitad del siglo XIX. Un aspecto particular de la interacción electromagnética es la *fuerza eléctrica*: cuyas propiedades se hablarán en los siguientes capítulos.

Las observaciones de los fenómenos eléctricos empezaron en el siglo VII a.C., cuando se descubrió que algunos materiales, como el ámbar y la ebonite, adquieren propiedades de atraer objetos livianos al ser fregados. Estas observaciones fueron retomadas por W. Gilbert en el siglo XVII, el cual, a través de un análisis sistemático, encontró y categorizó una serie de materiales que presentan los mismos comportamientos. Él llamó *electrizados* a los materiales que adquieren la propiedad de atraer cuerpos livianos y *fuerza eléctrica* a la fuerza que se manifiesta (basándose en el término *electrón*, que es el nombre griego del ámbar).

Hoy en día, usamos el término de *cargas eléctricas*, las cuales constituyen los cuerpos, pasan de un cuerpo a otro mediante roces y definen las fuerzas. Definimos:

- **Aislantes:** todos los cuerpos capaces de mantener la carga eléctrica.
- **Conductores:** todos los cuerpos que no mantienen la carga eléctrica. Ejemplos de estos materiales son los metales y el cuerpo humano.

Después de las experiencias de Gilbert, se dedujo que existen dos tipos de cargas eléctricas: positiva y negativa. Podemos por lo tanto resumir los resultados experimentales diciendo:

- Dos cuerpos aislantes ambos cargados con la misma carga (dos positivas o dos negativas) se repelen.
- Dos cuerpos aislantes con cargas opuestas (positiva y negativa respectivamente), se atraen.
- En el proceso de roce entre dos materiales, existe un traspaso de cargas de un material a otro.

Electroscopio de panes

El electroscopio de panes es el primer instrumento construido para detectar y reconocer el estado de carga. Consiste en dos hojas metálicas muy finas, de oro o aluminio, suspendidas por una varilla metálica. Para proteger las hojas de los movimientos del aire que alterarían su posición, las hojas están contenidas en una campana de vidrio; la varilla sale de la campana a través de una tapa de material aislante, por ejemplo, el ámbar.

Si se toca el extremo de la varilla con otra varilla cargada, las dos hojas adquieren una carga determinada del mismo signo de la varilla, por lo que tienden a divergir. El equilibrio estático de cada hoja (figura 1.1), caracterizado por un determinado ángulo de flexión α , se alcanza cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre la hoja es nula. El instrumento puede completarse con una escala graduada para la medición del ángulo α . El electroscopio permite reconocer el signo relativo de la carga de los cuerpos. Si, por ejemplo, tocamos el electroscopio previamente cargado con una carga de un signo determinado con una varilla cargada con el mismo signo la desviación de las hojas aumenta, mientras que si la carga de la varilla es de signo contrario la desviación disminuye.

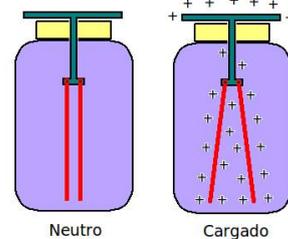


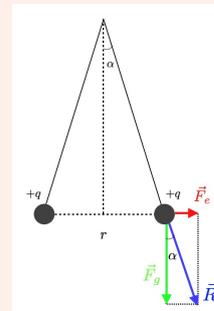
Figure 1.1: Esquema del electroscopio neutro y cargado.

Ejercicio 1.1 Dos esferas conductoras iguales, de masa m y carga q , están suspendidas cada una por un hilo largo l ; en equilibrio los hilos están puestos de manera simétrica con la vertical, cada uno con un ángulo α . Calcular la relación entre q y α y extender el resultado al caso en equilibrio del electroscopio.

Solución: Porque las esferas tienen masa, el problema nos está indicando que tenemos que balancear la fuerza peso de las esferas con la fuerza eléctrica debido a las cargas. Como mostrado en figura, la relación entre la dos fuerza y el ángulo α es

$$\tan \alpha = \frac{\vec{F}_e}{\vec{F}_g} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 mg} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2l \sin \alpha)^2 mg}$$

donde hemos utilizado $r = 2l \sin \alpha$ la distancia entre las dos esferas. La relación entre carga y



ángulo de separación es

$$q = 2l \sin \alpha \sqrt{4\pi \epsilon_0 m g \tan \alpha}. \quad (1.2)$$

La relación no es lineal, tampoco por ángulos pequeños $q \sim \alpha^{3/2}$. El resultado puede extenderse, en una primera aproximación, a las hojas de un electroscopio si se imagina que la carga de cada hoja se concentre en el centro, a una distancia l del punto de suspensión (en realidad la carga se distribuye por toda la superficie de la hoja).

La sensibilidad no es alta: si se considera una sensibilidad de 0.1° , se comete un error relativo del 1%, que para una carga de 10^{-7} C (valor típico de este experimento) significa 10^{-9} C. El valor mínimo de carga que se puede medir también es de este orden de magnitud. ■



Figure 1.2: Electroscopio de panes de oro o pozo de Faraday.

1.1.1 Estructura de la materia

Los fenómenos descritos se explican de manera coherente con la hipótesis de la preexistencia de las cargas eléctricas en los cuerpos; como sabemos la materia está formada por tres constituyentes elementales: el protón, el neutrón y el electrón. La carga eléctrica del electrón es la más pequeña observada en el laboratorio y se define como carga elemental $-e$ (el signo pone en evidencia el hecho que la carga es negativa). Todas las demás cargas son múltiplos de $-e$. Esta situación nos dice que la carga eléctrica es una cantidad *cuantizada*.

Los tres constituyentes de la materia se unen para formar los *átomos*. Precisamente, los protones y los neutrones constituyen el núcleo (por la interacción fuerte, otro tipo de interacción fundamental), el cual estará cargado positivamente; alrededor del núcleo se mueve un cierto número de electrones producto de la fuerza eléctrica atractiva ejercitada por el núcleo. La configuración de los electrones está determinada por las leyes de la mecánica cuántica.

La composición de un átomo está descrita por dos números:

- número atómico Z el cual proporciona el número de protones de un átomo;
- número de masa $A = Z + N$, suma del número de protones (Z) y el número de neutrones (N).

En un átomo neutro, la carga eléctrica total debe ser 0, por lo tanto, el número de protones y electrones debe ser igual.

Las propiedades de la masa de un átomo están representadas por su número de masa A ; de hecho, más del 99,9% de la masa de un átomo se concentra en el núcleo. El tamaño de los núcleos oscila entre 10^{-15} m (núcleos ligeros) y 10^{-14} m para los núcleos más pesados.

Los electrones de un átomo, sobre todo aquellos más lejanos al núcleo, están levemente atraídos por el núcleo, y por lo tanto fáciles de quitar, esto crea la diferencia fundamental entre materiales aislantes y conductores.

Las propiedades eléctricas del átomo, por otra parte, se describen mediante el número atómico Z ; en particular, la configuración de los electrones Z alrededor del núcleo determina la capacidad de un átomo para unirse a otros átomos y, por lo tanto, sus propiedades químicas.

En los materiales aislantes, los electrones están fuertemente atados al núcleo, por lo que no se pueden desplazar en el cuerpo. Esto produce que sea difícil transportar la carga eléctrica por un aislante. A través de una particular acción local, como por ejemplo un roce con un lienzo de lana, es posible dejar pasar desde un cuerpo C_1 a otro C_2 , en los puntos de contacto, un número N de electrones, y por lo tanto, una carga $-q = Ne$; de esta manera, C_2 quedará cargado negativamente en los punto de contacto con una carga $-q = Ne$, mientras que C_1 estará cargado positivamente con una carga $q = Ne$.

Como veremos en los capítulos siguientes, en un conductor aislado la carga se distribuye en toda la superficie, con lo cual, el conductor se queda cargado. Cuando un conductor no se encuentra aislado, por ejemplo, cuando está conectado al suelo a través de la persona que lo sostiene en su mano, la carga sigue distribuyéndose en toda la superficie del conductor disponible, pero como la superficie de la tierra es mucho más grande, la carga se distribuye en la tierra, por lo cual, el conductor queda descargado (*de facto* muy levemente cargado).

Una característica importante de un proceso eléctrico es que las cargas sólo se desplazan de un cuerpo a otro, pero nunca se pierden, lo cual es llamado como *principio de conservación de la carga*. Este fenómeno está verificado a cualquier nivel, ya sea macroscópico, atómico o sub-atómico. Podemos enunciar este principio de la siguiente manera:

Definición 1.1.1 — Conservación de la carga. En un sistema eléctricamente aislado, la suma algebraica de todas las cargas se mantiene constante en el tiempo, o sea, se conserva.

Cuando a un átomo se le añaden o se le quitan electrones se forma un *ion negativo* o *ion positivo* respectivamente; en particular, el fenómeno de substracción de electrones se llama *ionización*. Los átomos de los metales tienen la propiedad de ser fácilmente ionizables: uno o más electrones en los orbitales más externos se portan como electrones libres; las propiedades conductoras de los metales son consecuencia directa de estos electrones, que llamaremos electrones de *conducción*.

1.2 Ley de Coulomb

La formulación completa de la fuerza eléctrica se la debemos a Coulomb, quien efectuó una serie de mediciones sistemáticas en el año 1785 para establecer la dependencia de la fuerza entre dos cargas q_1 y q_2 puestas a una distancia r . Coulomb estableció que tal fuerza eléctrica tiene módulo igual a:

$$F_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.3)$$

enunciando que:

Definición 1.2.1 — Fuerza de Coulomb. La fuerza eléctrica es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las cargas.

La constante k que aparece en la ecuación (1.3) depende de las unidades de medidas y del medio en el cual están puestas las cargas, normalmente llamado *dieléctrico*.

Las unidades de medidas de las cantidades vistas hasta ahora, según el sistema internacional, llegan de la definición del *ampere* [A] (unidad de la corriente eléctrica), puramente por razones de precisión de las mediciones. Para la carga eléctrica definimos el Coulomb, cuyo símbolo es [C], y es igual a la carga transportada por una corriente de 1A en 1 segundo; la constante k será

$$k = 8.98 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}.$$

Por razones prácticas, que serán aclaradas más en adelante, es conveniente expresar la constante k de la siguiente manera:

$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \quad (1.4)$$

donde la constante ϵ_0 será denominada como la *constante dielectrica* del vacío con magnitud $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2$. De esta manera, la ecuación (1.3) se escribe como:

$$F_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.5)$$

La carga elemental tiene magnitud de $e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{C}$ y por lo tanto 1 C de carga equivale a $6.24 \cdot 10^{18}$ electrones (1 C dividido por la carga del electrón). En la tabla 5 se encuentran los valores de las cargas y masas de: electrón, protón y neutrón.

Cargas y masas de los constituyentes fundamentales		
	Carga (C)	Masa (kg)
electrón e	$-1.60277335 \cdot 10^{-19}$	$9.10938975 \cdot 10^{-31}$
protón p	$+1.60277335 \cdot 10^{-19}$	$1.67262311 \cdot 10^{-27}$
neutrón n	0	$1.67492866 \cdot 10^{-27}$

Table 1.1: Cargas y masas de las cargas de un átomo

La forma vectorial de la ley de Coulomb se puede escribir como:

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.6)$$

donde r es la distancia entre las cargas y \hat{u}_r el versor dirección o sea el vector unitario (vector de módulo 1) en la dirección de r : sea $\hat{u}_r = \vec{r}/r$.

Si las cargas tienen el mismo signo, la fuerza tiene el mismo sentido de \hat{u}_r y es repulsiva; si las cargas tienen signos opuestos la fuerza tiene el sentido opuesto a \hat{u}_r y es atractiva. La distancia r entre las dos cargas se expresa en coordenadas cartesianas como:

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$$

mientras las componentes de \hat{u}_r , o sea los cosenos directores del vector \vec{r} , son:

$$\frac{x_0 - x}{r}, \quad \frac{y_0 - y}{r}, \quad \frac{z_0 - z}{r},$$

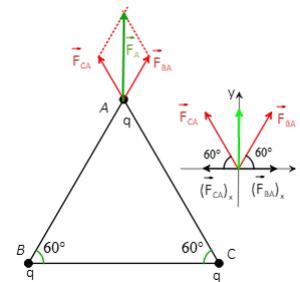


Figure 1.3: Forma vectorial de la ley de Coulomb.

1.3 Campo electrostático

Recordemos que las fuerzas que actúan sobre una carga q_0 debido a las cargas circundantes son de carácter vectorial, por lo tanto, rige *el principio de superposición*, también llamado *principio de independencia de las fuerzas simultáneas*. Por lo tanto, la fuerza total sobre una carga corresponde a la suma de todas las fuerzas eléctricas sobre la carga.

Para comprobarlo, consideremos tres cargas puntuales, q_1 , q_2 y q_0 . La carga q_1 ejerce separadamente una fuerza \vec{F}_1 sobre la carga q_0 mientras que la carga q_2 ejerce la fuerza \vec{F}_2 ; la fuerza total en q_0 está dada por la suma vectorial de \vec{F}_1 y \vec{F}_2 . Aplicando a cada fuerza la ecuación (1.6) obtenemos:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r_1^2} \hat{u}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_0}{r_2^2} \hat{u}_2$$

Generalizando la fórmula anterior para un sistema de N cargas, tenemos

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r_i^2} \hat{u}_i = q_0 \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{u}_i$$

Desde la fórmula anterior, hemos puesto en evidencia que la fuerza resultante sobre q_0 es proporcional a q_0 , lo que nos permite definir otro vector

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.7)$$

A este nuevo vector lo llamaremos *campo electrostático* y lo enunciaremos de la siguiente manera:

Definición 1.3.1 — Campo electrostático. El campo electrostático \vec{E} generado en un punto en el espacio por un sistema de cargas en reposo es definido como la fuerza eléctrica \vec{F} que actúa sobre una carga de prueba q_0 positiva puesta en aquel punto dividida por la carga q_0 misma.

En los casos concretos, la carga de prueba q_0 puede perturbar la distribución original, ya que ésta no puede estar formada por cargas exactamente puntuales, o sea, sin estructura. Si por ejemplo las cargas q_i están distribuidas en esferas conductoras, q_0 puede alterar la distribución de cargas en la superficie de las esferas a través del fenómeno de inducción electrostática. Si las esferas que llevan las q_i son de material aislante, q_0 no puede alterar la distribución de estas cargas, pero sí puede producir un micro-desplazamiento local a través del fenómeno de polarización de los dieléctricos (lo estudiaremos más adelante).

Por lo tanto, podemos escribir el campo eléctrico generado por un sistema discreto de cargas, como:

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{u}_i.$$

Lo anterior nos dice que, fijando un sistema de cargas, se puede asociar en cada punto $P(x, y, z)$ del espacio un valor del campo electrostático $\vec{E}(x, y, z)$, independiente de la presencia de una carga de prueba q_0 . Cuando q_0 viene puesta en el punto P , ésta siente una fuerza

$$\vec{F}(x, y, z) = q_0 \vec{E}(x, y, z) \quad (1.8)$$

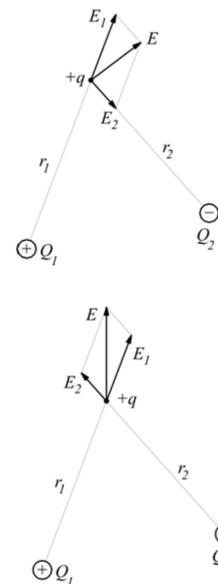


Figure 1.4: Suma de campos eléctricos producidos por dos cargas .

Lo anterior puede ser interpretado como que *el sistema de cargas es la fuente del campo electrostático \vec{E}* ; la carga q_0 interactúa con el campo, aumentando la fuerza \vec{F} ; la acción eléctrica entre cargas que interactúan a distancia, ocurre por interacción del campo (la misma interpretación viene dada por la acción de la atracción gravitacional con la introducción del campo gravitacional \vec{G}). En figura 1.4 se muestra la suma vectorial de los campos eléctricos producidos por dos cargas sobre una carga de prueba (nótese que campo eléctrico y fuerza eléctrica se suman de la misma manera por la ecuación (1.8)).

Unidades 1.3.1 — Campo eléctrico. La unidad de medida del campo eléctrico es claramente newton/coulomb (N/C). Más adelante veremos una unidad de medida equivalente más utilizada en la práctica.

1.3.1 Cálculo del campo eléctrico por una carga puntual

El campo eléctrico producido por una carga puntual q_1 en el punto $P(x, y, z)$ está dado, en coordenadas cartesianas, por

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \hat{u}_r \quad (1.9)$$

cuyas las componentes cartesianas son

$$E_{x,1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \hat{u}_x, \quad (1.10)$$

$$E_{y,1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \hat{u}_y, \quad (1.11)$$

$$E_{z,1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \hat{u}_z, \quad (1.12)$$

y donde $r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$. Acordamos que el versor \hat{u}_{r_1} es un vector unitario con dirección igual a la dirección del vector \vec{r}_1 ; por lo tanto, sus componentes serán los cosenos directores del vector \vec{r}_1

$$\hat{u}_{r_1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1}, \quad \hat{u}_{r_1} = \left\{ \frac{x-x_1}{r_1}, \frac{y-y_1}{r_1}, \frac{z-z_1}{r_1} \right\} \quad (1.13)$$

1.4 \vec{E} producido por una distribución continua

En la mayoría de los casos reales, las cargas eléctricas no están localizadas en un único punto del espacio, sino que están distribuidas en una región extendida. Estas distribuciones espaciales de cargas son fuentes de un campo electrostático; en las aplicaciones cotidianas no estamos interesados en conocer el campo local que existe entre cada carga (tal campo no sería calculable por el gran número de contribuciones, ni tampoco medible experimentalmente), sino que estamos interesados en el *campo medio* existente en puntos distantes de las cargas, puntos desde los cuales la distribución de carga está vista como una *distribución continua*. La distancia en cuestión, que puede ser también pequeña desde el punto de vista macroscópico, tiene que ser muy grande con respecto a la distancia media entre las cargas elementales, la cual es del orden de 10^{-10} m.

Si la carga está distribuida en un cuerpo C que tiene un volumen τ ; se define la densidad espacial de carga $\rho(x', y', z')$ a través de:

$$dq = \rho(x', y', z') d\tau$$

donde $d\tau = dx'dy'dz'$ es el volumen elemental alrededor del punto (x', y', z') ¹. La carga total será

$$q = \int_{\tau} \rho(x', y', z') d\tau$$

extendido en todo el volumen; en general la densidad puede ser variable de punto a punto.

La forma diferencial del campo electrostático, producido por la carga dq es

$$d\vec{E}(x, y, z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r, \quad (1.14)$$

donde \hat{u}_r es el vector unitario desde dq y el punto P corresponde al punto donde se quiere calcular el campo.

El campo resultante en el punto $P(x, y, z)$ se calcula utilizando el principio de superposición; pero como la suma se extiende a un número infinito de contribuciones infinitesimales, se reduce a una integral vectorial extendida a todo el volumen τ :

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r^2} \hat{u}_r, \quad (1.15)$$

cuyas componentes estarán dadas utilizando los cosenos directores.

La (1.15) es una fórmula general que, al menos en principio, permite calcular el campo en cada punto $P(x, y, z)$, dada la distribución de carga caracterizada por la densidad $\rho(x', y', z')$. Observamos que en la integración el punto P debe considerarse fijo: las variables de integración son las coordenadas x', y', z' de los puntos donde se encuentra la carga. Como hemos mencionado en los párrafos anteriores y como explicaremos más adelante, en algunos cuerpos la carga tiende a transportarse en la superficie ocupando una fina región de espesor despreciable, del orden de las dimensiones atómicas. En este caso y en otros análogos la distribución de la carga puede verse, para el cálculo del campo, como una distribución superficial de la carga $\sigma(x', y', z')$ o hablaremos de densidad de carga lineal $\lambda(x', y', z')$, si las cargas se distribuyen en una línea. Las cargas serán en cada caso:

$$\begin{aligned} dq &= \sigma(x', y', z') d\Sigma & q &= \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') d\Sigma \\ dq &= \lambda(x', y', z') d\ell & q &= \int_{\ell} \lambda(x', y', z') d\ell \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde $d\Sigma$ es el área de la superficie infinitesimal al alrededor del punto de coordenadas (x', y', z') , sobre la cual está distribuida la carga dq .

En el caso más general, las densidades ρ , σ , λ son funciones del punto, es decir, no son constantes dentro del dominio de integración. Cuando son constantes hablamos de *distribuciones uniformes* y se aplican las fórmulas más sencillas

$$q = \rho\tau; \quad q = \sigma\Sigma; \quad q = \lambda\ell.$$

donde τ es el volumen, Σ es la superficie y ℓ es la longitud del material cargado.

Unidades 1.4.1 Las unidades de medidas de las densidades de cargas son claramente: C/m^3 , C/m^2 y C/m , para ρ , σ y λ respectivamente.

¹estamos en coordenadas cartesianas.

Ejercicio 1.2 Un hilo de longitud 2ℓ , paralelo al eje x , tiene una carga q uniformemente distribuida a lo largo de toda su longitud. Calcular el campo electrostático \vec{E} en los puntos del eje del cable (eje y). Deducir la expresión del campo también para un cable infinitamente largo y uniformemente cargado.

Solución: La densidad de carga lineal, constante en todo el cable, viene dada por $\lambda = q/2\ell$. Cada elemento del hilo dx tiene una carga $dq = \lambda dx$, y produce en el punto $P(0, y)$ del eje, distante y del centro del hilo, el campo infinitesimal dado por la ecuación (1.26):

$$d\vec{E}(0, y) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

el elemento de carga simétrico a dq con respecto al centro del hilo produce en P un campo igual en modulo y puesto especularmente con respecto al campo producido por dq , por lo tanto las componentes x se suman anulándose y las componentes y se suman dando el campo en P

$$d\vec{E}(0, y) = dE_y(0, y) \hat{u}_y = \frac{2\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \hat{u}_y$$

el campo resultante es la suma de todas las contribuciones infinitesimales, paralelas y concordantes; además, valen las siguientes relaciones trigonométricas

$$r \cos\theta = y, \quad x = y \tan\theta, \quad dx = \frac{y d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Por lo tanto el campo es

$$d\vec{E}(0, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \cos\theta d\theta \hat{u}_y$$

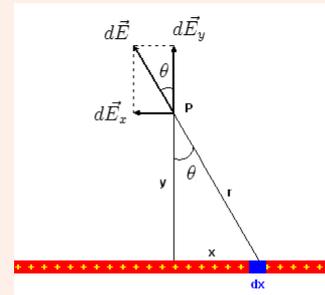
La integral se calcula entre $\theta = 0$ y $\theta = \theta_1 = \arcsin(\ell/\sqrt{y^2 + \ell^2})$ con y constante y:

$$\vec{E}(0, y) = \frac{\lambda \hat{u}_y}{2\pi\epsilon_0 y} \int_0^{\theta_1} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda \hat{u}_y}{2\pi\epsilon_0 y} \sin\theta_1$$

y substituyendo

$$\vec{E}(0, y) = \frac{\lambda \ell}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{y^2 + \ell^2}} \hat{u}_y = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{y^2 + \ell^2}} \hat{u}_y. \quad (1.17)$$

El resultado es válido en cualquier plano que pase por el eje x , es decir, existe una simetría cilíndrica. Es fácil comprobar, para confirmar el razonamiento basado en la simetría, que la componente dE_x , en P debida al elemento de carga dq es $-\lambda \sin\theta d\theta / (4\pi\epsilon_0 y)$, por lo tanto la integral extendida a todo el hilo es nula. Observamos que el campo (1.17) no presenta la dependencia $1/r^2$ típica de la carga puntual, justamente porque está producido por una



distribución extendida. Sin embargo, si nos alejamos mucho del hilo ($y \gg \ell$), la (1.17) se convierte en

$$\vec{E}(0, y \gg \ell) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \hat{u}_y$$

y coincide con el campo generado por una carga puntual q colocada en el centro del hilo: a medida que aumenta la distancia, el hilo parece cada vez más pequeño, hasta confundirse con un punto. Cuando el hilo es infinitamente largo resulta $\ell \gg y$, tenemos

$$\vec{E}(0, y \ll \ell) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \hat{u}_y.$$

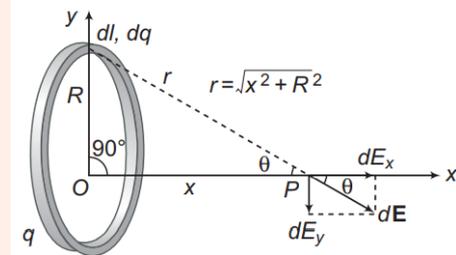
El campo electrostático generado por un alambre indefinido cargado uniformemente es perpendicular al alambre y constante en todos los puntos de una superficie cilíndrica de radio y con el alambre como eje. Esta situación ideal se realiza en la práctica con un cable de longitud finita en puntos cuya distancia desde el cable sea mucho menor que la longitud del mismo cable. Notase que en ningún caso las dimensiones del campo electrostático cambia. ■

Ejercicio 1.3 Una carga q se distribuye uniformemente en un anillo delgado de radio R . Calcular el campo electrostático en el eje del anillo.

Solución: La densidad de carga, constante en el anillo, es $\lambda = q/2\pi R$. Considerando dos elementos diametralmente opuestos del anillo, cada uno con carga $dq = \lambda d\ell$, en los puntos del eje tenemos la situación ya vista: las componentes a lo largo del eje x de los campos elementales debidos a las dos cargas son iguales y concordantes, mientras que las perpendiculares se eliden.

El campo resultante en los puntos del eje es paralelo al eje x y se calcula integrando la componente x de cada elemento $d\ell$:

$$dE_x(x) = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta.$$



Al variar de la posición de $d\ell$ sobre el anillo todos los términos de esta expresión se quedan constantes y

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda \hat{u}_x}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \int_{\ell} d\ell = \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2\pi R \hat{u}_x.$$

Porque $r^2 = R^2 + x^2$ y $\cos \theta = x/\sqrt{R^2 + x^2}$,

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_x. \quad (1.18)$$

El campo es paralelo y concordante con el eje del anillo para $x > 0$, es paralelo y discordante para $x < 0$ y es nulo para $x = 0$ (en el centro del anillo). Para $x \gg R$

$$\vec{E}(x \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \hat{u}_x.$$

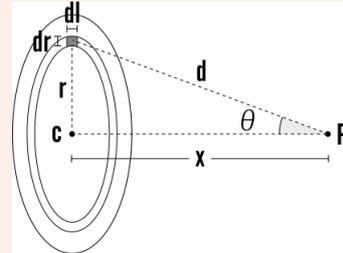
como si fuera una carga puntual. ■

Ejercicio 1.4 Un disco delgado de radio R tiene una carga q uniformemente distribuida sobre toda su superficie. Calcular el campo \vec{E} en el eje del disco. Extender el resultado al caso R tiende al infinito.

Solución: La carga está contenida en el disco cuyo grosor es despreciable; la densidad de carga superficial, constante en todo el disco, es $\sigma = q/\pi R^2$.

Aislemos, idealmente, una corona circular entre r y $r + dr$, comparable a un anillo, de superficie $d\Sigma = 2\pi r dr$ y carga $dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma r dr$. Esta distribución anular produce en el eje, a una distancia x del centro, el campo dado por la (1.18):

$$\begin{aligned} d\vec{E}(x) &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_x = \\ &= \frac{qx}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_x. \end{aligned}$$



El campo total se obtiene sumando todas las contribuciones de los infinitos anillos que componen el disco, o sea integrando r desde 0 hasta R (y con x constante):

$$\vec{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \hat{u}_x \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \hat{u}_x. \quad (1.19)$$

Esta es la expresión del campo para $x > 0$, donde el campo es paralelo y concordante con el eje x ; para $x < 0$ el módulo es el mismo, cambia sólo el sentido, por lo tanto escribimos

$$\vec{E}(x) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \hat{u}_x = \pm \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \hat{u}_x. \quad (1.20)$$

Y, como antes, para $x \gg R$ el disco se ve como una carga puntual.

Cuando $x \rightarrow 0$ los límites derecho e izquierdo del campo son distintos y valen

$$\vec{E}_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x, \quad \vec{E}_- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x.$$

Al cruzar el disco, el campo tiene una discontinuidad

$$\vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_x$$

Si ahora hacemos que R tienda al infinito, manteniendo σ constante, obtenemos un plano indefinido uniformemente cargado; el campo electrostático, calculado pasando al límite en (1.20), vale

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x.$$

Queremos concluir este apartado con algunas observaciones. Los resultados obtenidos en los ejemplos son válidos para distribuciones de carga positiva: si la carga fuera negativa, sólo cambiaría la dirección del campo, pasando a ser entrante hacia las cargas en lugar de saliente. Una característica común de los ejemplos mostrados es que las distribuciones de carga son uniformes.

Esta elección se ha hecho por razones de simplicidad analítica, pero en la práctica no es fácil de realizar, excepto con geometrías particulares.

1.5 Líneas de fuerza de \vec{E}

La introducción del concepto de campo electrostático subraya que la presencia de un sistema de cargas, desde el caso más simple de una carga puntual hasta el caso más general de una distribución espacial, modifica el espacio circundante en el sentido de que una carga de prueba q_0 colocada en cualquier punto se ve afectada por la fuerza $\vec{F} = q_0\vec{E}$, atribuida a la interacción con el campo (1.14). Partiendo de una posición genérica y moviéndose por sucesivos tramos infinitesimales, cada uno paralelo y concordante al campo electrostático en ese punto dado, se obtiene una línea que se llama *línea de fuerza* o *línea de campo*: por lo tanto en cada punto esta línea por definición es tangente al campo y su dirección indica la dirección del campo. Si se trazan varias líneas de fuerza, se obtiene una representación gráfica global del campo en todo el espacio, como veremos en los siguientes ejemplos.

En el caso de una carga puntual, las líneas de fuerza tienen dirección radial con origen en la carga y son salientes de ella si es positiva, entrantes si es negativa. En la figura 1.5 se observa que las líneas se hacen más gruesas a medida que uno se acerca a la fuente del campo y esto indica que la intensidad del campo está aumentando.

Podemos definir las propiedades de las líneas de fuerza, las cuales son:

- Una línea de fuerza en cada su punto es tangente y concorde al campo en aquel punto.
- Las líneas de fuerzas se hacen más densas donde la intensidad del campo es mayor.
- Las líneas de fuerza nunca se cruzan, esto porque en cada punto el campo está definido unívocamente y no puede tener dos direcciones distintas.
- Las líneas de fuerza tienen origen en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas; en el caso que existan sólo cargas del mismo signo, entonces las líneas de fuerzas se cierran al infinito.
- En el caso de que se tengan cargas de signo opuesto, pero de igual módulo, todas las líneas que empiezan desde las cargas positivas se cierran en las cargas negativas, algunas pasando eventualmente por el infinito; si las cargas no son iguales en modulo, algunas líneas terminan o llegan desde el infinito;

Un campo uniforme está representado por líneas paralelas (dirección y sentido constante) y equidistantes (módulo constante). Desde la propiedad a), la cual establece el paralelismo entre el tramo infinitesimal $d\ell$ de la línea de fuerza y el campo \vec{E} , se desprende la condición de proporcionalidad entre las componentes $d\ell$ y las componentes de \vec{E} :

$$\frac{dx}{E_x(x,y,z)} = \frac{dy}{E_y(x,y,z)} = \frac{dz}{E_z(x,y,z)} \quad (1.21)$$

las cuales pueden ser consideradas como definición analítica de las líneas de fuerza. Las últimas forman un sistema de dos ecuaciones que, integrado, proporciona las relaciones entre x , y y z , las cuales definen una familia de curvas.

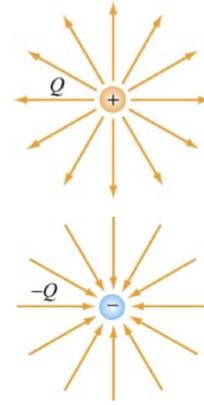


Figure 1.5: Líneas de fuerza de cargas separadas.

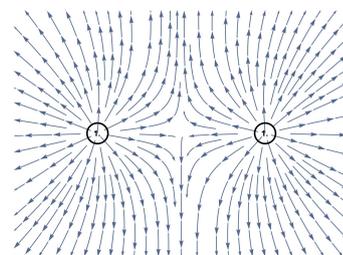


Figure 1.6: Líneas de fuerza: cargas iguales.

Aplicando la ecuación (1.21) a la situación tridimensional más simple, o sea, una carga puntual, tenemos:

$$\frac{dx}{x-x_1} = \frac{dy}{y-y_1} = \frac{dz}{z-z_1}, \quad (1.22)$$

integrando las últimas desde un punto (x_2, y_2, z_2) hasta un punto (x, y, z) , tenemos

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \quad (1.23)$$

las cuales corresponden a las ecuaciones de una recta en el espacio que pasa por el punto (x_1, y_1, z_1) donde se encuentra la carga y el punto genérico (x_2, y_2, z_2) .

En la figura 1.6 están dibujadas las líneas de fuerza del campo eléctrico por dos cargas iguales en signo y modulo. En la figura 1.7 están dibujadas las líneas de fuerza del campo eléctrico por un sistema de cargas de dos cargas distintas en signo e igual en modulo y para un sistema de cargas de dos cargas distintas.

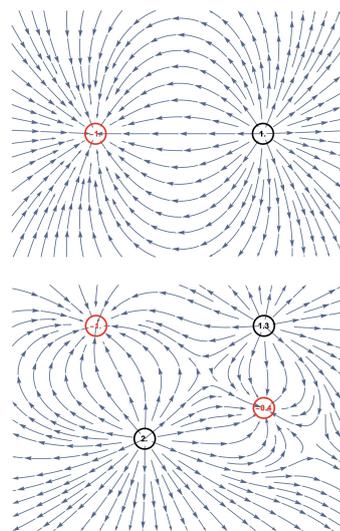


Figure 1.7: Líneas de fuerza para sistemas de cargas distintas.

1.6 Movimiento de una carga en un campo electrostático: experimento de Rutherford

Supongamos de introducir una carga puntual q en una zona de espacio en la que existe un campo electrostático generado por un sistema de cargas en reposo, que no son perturbadas de ninguna manera por la presencia de la carga. Esta carga, de masa m , está sometida a la fuerza (1.8) y la ley de la dinámica de Newton, en condiciones no relativistas, se escribe

$$q\vec{E} = m\vec{a} \implies \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\vec{E}. \quad (1.24)$$

Integrando la anterior, podemos determinar la posición y la velocidad de la carga, si conocemos la posición y velocidad iniciales. El problema no es sencillo porque, aunque el campo \vec{E} sea constante en el tiempo, no lo es en el espacio y la carga, al pasar en instantes sucesivos por distintos puntos, está sometida a la acción de un campo variable. Por supuesto, la solución es más accesible si la dependencia del campo de las coordenadas permite una integración fácil. Por ejemplo, si el campo tiene una dependencia radial $k\vec{r}$ y la carga es negativa, esta siente una fuerza $-kq\vec{r}$, y con condiciones iniciales apropiadas, describe un movimiento armónico simple. El caso más sencillo es, sin duda, el del campo uniforme, que analizamos en el siguiente ejemplo.

Ejercicio 1.5 Una carga q de masa m inicialmente en quiete en la posición $x = 0$ se encuentra en una región de espacio donde existe un campo electrostático uniforme \vec{E} paralelo y concordante con el eje x . Describir el movimiento de la carga.

Solución: En un campo uniforme la aceleración es constante; si la velocidad inicial tiene dirección hacia el eje x , el movimiento de la carga es lineal uniformemente acelerado con ecuaciones por el espacio y velocidad

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2; \quad v(t) = v_0 + a t; \quad v^2(t) = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

donde $a = qE/m$ es paralelo a \vec{E} si $q > 0$ y antiparalelo si $q < 0$. En particular, $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$

$$x(t) = \frac{qE}{2m}t^2; \quad v(t) = \frac{qE}{m}t; \quad v^2(t) = \frac{2qE}{m}x.$$

Si, por el contrario, la velocidad inicial formara un cierto ángulo con el eje x , el movimiento tiene una componente uniformemente acelerada a lo largo del eje x y una componente uniforme ortogonal al eje x , de modo que la trayectoria es una parábola.

La variación de energía cinética es

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2(t) - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma(x - x_0) = qE(x - x_0) = F(x - x_0),$$

Igual al trabajo de la fuerza (constante), como debe ser; nótese que ΔE_k no depende de la masa de la carga (pero sí de la velocidad). En el caso propuesto, la carga positiva parte de la posición $x = 0$ y llega a la posición x después de un tiempo $t = \sqrt{2mx/qE}$ con velocidad $v = \sqrt{2qEx/m}$ y energía cinética qEx . Si ponemos una partícula de igual masa e igual carga, pero negativa, con velocidad cero en la posición x , llega al origen en el mismo tiempo y con la misma velocidad en módulo; la energía cinética también es la misma y de hecho el trabajo de la fuerza eléctrica es el mismo en los dos casos (si q hubiera tenido velocidad inicial v_0 , $-q$ habría tenido $-v_0$). Este es el caso particular de un hecho general, que está contenido en (1.24): un campo dado acelera una carga q y decelera una carga $-q$ con las mismas condiciones iniciales, pero acelera una carga $-q$ que se mueve en la dirección opuesta. Una vez determinada la trayectoria de una partícula con carga positiva en un determinado campo, esa misma trayectoria puede ser recorrida en sentido contrario y con la misma velocidad por una partícula con la misma masa y carga opuesta, siempre que se elijan adecuadamente las condiciones iniciales. ■

El ejemplo que acabamos de ver demuestra el uso de campos electrostáticos para acelerar partículas cargadas: históricamente, este fue el primer método que funcionó. Volveremos a tratar este tema en capítulos siguientes. Un caso dinámico muy particular, pero extremadamente importante, es el del movimiento relativo de dos cargas puntuales sometidas a su interacción mutua, que, para velocidades muy inferiores a la de la luz, viene dado por la ley de Coulomb. Si las cargas son de signo contrario, la fuerza es atractiva y tenemos una situación análoga a la de dos masas sometidas a la interacción gravitatoria, que retomaremos en el párrafo 2.3 para describir el primer modelo atómico, el de Bohr (1913), y sus modificaciones debidas a Sommerfeld. El caso de las cargas del mismo signo también tuvo una aplicación histórica fundamental por parte de Rutherford (1911), que describimos brevemente.

Experimento de Rutherford

En esa época, no se sabía cómo se distribuían las cargas eléctricas en el átomo. Un modelo, debido a Thomson, sugería que las cargas negativas, los electrones, se distribuían dentro de una esfera cargada con un radio igual al del átomo. Una consecuencia de esta estructura, que podemos intuir cualitativamente, es que una carga lanzada contra a un átomo no debe ser muy desviada de su dirección de incidencia debido a la interacción eléctrica con los constituyentes atómicos. Suponiendo que la masa de la partícula cargada del proyectil sea mucho mayor que la del electrón, en las interacciones con este último la carga experimenta aceleraciones casi despreciables, mientras que en las interacciones con los constituyentes positivos los efectos de muchas interacciones sucesivas se compensan por término medio con el resultado de que suelen provocar pequeñas desviaciones y prácticamente nunca desviaciones importantes (la desviación global resulta del hecho de que las aceleraciones debidas a las interacciones individuales no son en general paralelas a la velocidad). Por lo tanto, al cruzar un espesor finito de material, el efecto global debería ser pequeño.

Una primera comprobación experimental se realizó bombardeando láminas metálicas sutiles, oro, plata, cobre, con un espesor del orden de $0.1 \mu\text{m} = 10^{-7} \text{m}$, con partículas α , con carga $2e$ y masa unas cuatro veces la del protón, emitidas con una determinada energía cinética desde una fuente radiactiva y debidamente colimadas en dirección (hoy sabemos que la partícula α está compuesta por dos protones y dos neutrones y es idéntica al núcleo del átomo de helio). Se comprobó que las desviaciones eran, en promedio, de aproximadamente 1° , pero que un cierto número de partículas α , muy superior al esperado, sufría desviaciones considerables, incluso superiores a 90° .

Para explicar los resultados experimentales que iban en contra del modelo de Thomson, Rutherford propuso un nuevo modelo en el que la carga positiva (núcleo), en lugar de estar distribuida por todo el volumen del átomo, se acumulaba en el centro, prácticamente en forma de punto, mientras que la carga negativa transportada por los electrones ocupaba todo el volumen del átomo. En la mayoría de los casos, las partículas que atraviesan la lámina pasan lejos de los núcleos y sufren pequeñas desviaciones, pero si la trayectoria pasa muy cerca de un núcleo, debido a la fuerza de Coulomb, la interacción puede ser muy violenta y provocar una gran desviación. Cuantitativamente, consideremos una partícula α con energía cinética $E_k = 1/2mv^2$ que inicialmente se mueve a lo largo de un eje paralelo al eje x : en la figura 1.8 se muestran tres instantes particulares, cuando la partícula está a una distancia $-\infty$, cuando está cerca del núcleo, cuando está a una distancia $+\infty$. La desviación es causada por la fuerza eléctrica repulsiva que vale en módulo $F = 2Ze^2/4\pi\epsilon_0r^2$, si Ze es la carga positiva del núcleo. Esta fuerza central es conservativa y, por lo tanto, el momento angular (con respecto al centro de la fuerza) y la energía mecánica se conservan durante el movimiento, que tiene lugar en un plano. En el instante inicial la energía coincide con E_k y es positiva: estamos en el caso en el que la trayectoria es una “hipérbola”. Supongamos que el núcleo tiene una masa mucho mayor que la de la partícula, por lo que puede considerarse estacionario durante el proceso (en caso contrario, aplicaremos el concepto de masa reducida).

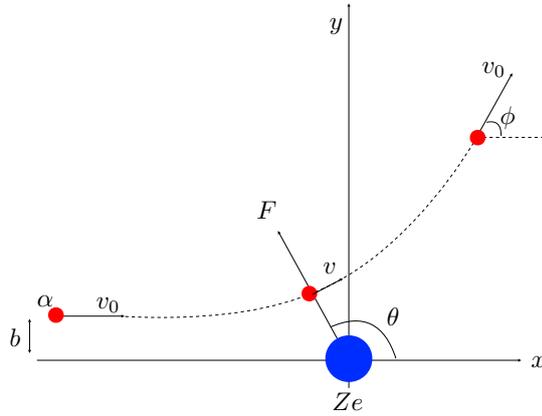


Figure 1.8: Experimento de Rutherford

La desviación es causada por la fuerza eléctrica repulsiva que vale en módulo $F = 2Ze^2/4\pi\epsilon_0r^2$, si Ze es la carga positiva del núcleo. Esta fuerza central es conservativa y, por lo tanto, el momento angular (con respecto al centro de la fuerza) y la energía mecánica se conservan durante el movimiento, que tiene lugar en un plano. En el instante inicial la energía coincide con E_k y es positiva: estamos en el caso en el que la trayectoria es una “hipérbola”. Supongamos que el núcleo tiene una masa mucho mayor que la de la partícula, por lo que puede considerarse estacionario durante el proceso (en caso contrario, aplicaremos el concepto de masa reducida).

La conservación del momento angular conlleva la igualdad

$$mv_0b = mr^2 \frac{d\theta}{dt},$$

donde en el segundo miembro tenemos la expresión genérica del módulo del momento angular de un punto que describe un movimiento plano; mv_0b es el momento angular inicial y b es el parámetro de impacto.

La ecuación del movimiento en el eje y es

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y = F \cos \theta' = F \sin \theta = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0r^2} \sin \theta,$$

y expresando r^2

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0mv_0b} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Podemos eliminar el dt e integrar

$$\int_0^{v_0 \sin \phi} dv_y = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0 b} \int_{\pi}^{\phi} \sin \theta d\theta,$$

de hecho, a lo largo del eje y , la velocidad inicial es nula y la velocidad final es la componente y de v_0 (podemos decir esto porque la energía mecánica final es toda cinética y coincide con la inicial: la velocidad de la partícula α es la misma en módulo): el ángulo polar θ , medido con respecto al eje positivo de x varía de π a ϕ pasando de $-\infty$ a $+\infty$. Por lo tanto

$$v_0 \sin \phi = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0 b} (1 + \cos \phi)$$

y por la identidad trigonométrica

$$\frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi} = \tan \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

tenemos

$$\tan \left(\frac{\phi}{2} \right) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2} \frac{1}{b}.$$

que conecta el parámetro de impacto b con el ángulo de difusión ϕ en el choque de la partícula α con el núcleo de carga Ze y masa mucha más grande. Se puede notar que si b es muy pequeño, es posible encontrar valores muy grande de ϕ ; al límite de $b \rightarrow 0$, $\phi \rightarrow \pi$, la partícula α vuelva atrás.

El parámetro de impacto de cada choque no es controlable experimentalmente, pero no es difícil calcular la probabilidad de desviación que es proporcional al producto ns , si n es el número de átomos por unidad de volumen de la hoja de espesor s , a la cantidad $(2Ze^2/4\pi\epsilon_0 m v_0^2)^2$ y a la función $1/\sin^4 \phi/2$; eso quiere decir que la fracción de partículas α desviadas de un ángulo ϕ , a paridad de características del objetivo y a paridad de energía cinética, es proporcional a $[\sin^4(\phi/2)]^{-1}$.

Todas estas predicciones del modelo de Rutherford fueron verificadas con precisión por Geiger y Marsden en 1913, encontrando plena concordancia con los resultados experimentales. El experimento de Rutherford tiene una importancia capital en la historia de la física moderna, no sólo por el descubrimiento de la estructura nuclear del átomo, sino también porque ha dado origen a un método de investigación todavía único, que consiste en estudiar las estructuras nucleares y subnucleares y las interacciones entre sus constituyentes a través de las colisiones entre un proyectil y un objetivo: de las características de estos procesos de difusión (o dispersión, como se llaman en inglés) se ha derivado prácticamente toda la información que poseemos sobre los fenómenos subatómicos.

En 1919, el propio Rutherford provocó las primeras reacciones nucleares artificiales utilizando partículas α como proyectiles. En aquellos años, se comprendió no sólo que era importante disponer de diferentes tipos de proyectiles y objetivos, sino también que era necesario operar con energías variables y controlables, lo que impulsó el desarrollo de aceleradores de partículas, cuyos primeros ejemplos, basados en la utilización de campos electrostáticos, entraron en funcionamiento alrededor de 1930.

Experimento de Millikan

En los párrafos anteriores hemos dicho que una de las propiedades de la carga eléctrica es de estar cuantizada, es decir que es siempre múltiplo entero de un determinado valor mínimo, llamada carga elemental, que corresponde a la carga que llevan el electrón y el protón.

Las mediciones realizadas por Millikan entre 1909 y 1917 han permitido determinar el valor de la carga elemental; a partir de ésta, y conocida por otros métodos que discutiremos más adelante la relación e/m entre carga y masa del electrón, se ha podido derivar el valor de la masa del electrón.

En la figura 1.9 se muestra esquemáticamente la instrumentación. Entre dos discos *A* y *B* es posible establecer un campo eléctrico, del orden de 10^5 N/C, dirigido, por ejemplo, de arriba abajo y uniforme en la zona central (la distancia entre los discos es unas diez veces menor que el diámetro). Las gotas de aceite, rociadas con un atomizador (pulverizador), pasan a través de un orificio en la placa superior *A*, algunas de las cuales se cargan, normalmente de forma negativa, al rozar con la boquilla del pulverizador. El espacio entre los discos está convenientemente iluminado y el movimiento vertical de las gotas, que se produce en el aire, se observa con un microscopio equipado con un ocular micrométrico: así es posible medir el espacio cubierto por una gota en un tiempo determinado y, por lo tanto, su velocidad de caída. Todo está controlado termostáticamente para evitar movimientos convectivos en el aire debido a los gradientes de temperatura.

En ausencia de campo eléctrico la ecuación de movimiento es

$$ma = m'g - 6\pi\eta rv;$$

donde m es la masa del gota, $m'g$ es la fuerza peso que actúa sobre la gota, corregida por el empuje hidrostático

$$m'g = (\rho - \rho_a) \frac{4}{3} \pi r^3 g,$$

con ρ la densidad del aceite, ρ_a densidad del aire, r radio de la gota. El término proporcional a la velocidad representa la resistencia del aire, cuya viscosidad es η (ley de Stokes). A régimen, cuando la resistencia iguala la fuerza peso, el movimiento es lineal uniforme con la velocidad

$$v_0 = \frac{m'g}{6\pi\eta r} = \frac{2(\rho - \rho_a)gr^2}{9\eta};$$

desde la medición de v_0 se puede calcular el radio de la gota; valores típicos son $v_0 \sim 1$ mm/s, $r \sim 1 \mu\text{m} = 10^{-6}$ m.

Cuando se aplica un campo eléctrico la ley del movimiento es

$$ma = m'g - qE - 6\pi\eta rv,$$

si la carga es negativa y el campo va hacia abajo (como mencionado); a régimen la velocidad de caída es

$$v_1 = \frac{m'g - qE}{6\pi\eta r} = v_0 - \frac{qE}{6\pi\eta r}, \quad (1.25)$$

menor que el anterior porque en la situación descrita la fuerza eléctrica frena el movimiento; con el valor mencionado del campo, $v_1 \sim 0.1 v_0 \sim 10^{-4}$ m/s = 0.1 mm/s.

Hay que observar que variando el valor del campo se puede hacer bajar más o menos rápidamente la gota o mantenerla firme o hacerla subir; así se pueden ejecutar con la misma gota más medidas de velocidad y por lo tanto de la carga que posee la gota, según la ecuación (1.25).

Si se irradia el aire con la radiación emitida por una fuente radiactiva o con rayos X, se produce el fenómeno de la ionización y en el aire se forman iones positivos (átomos que han perdido electrones a causa de la radiación) e iones negativos (átomos que han capturado los electrones liberados por la radiación, normalmente iones de oxígeno).

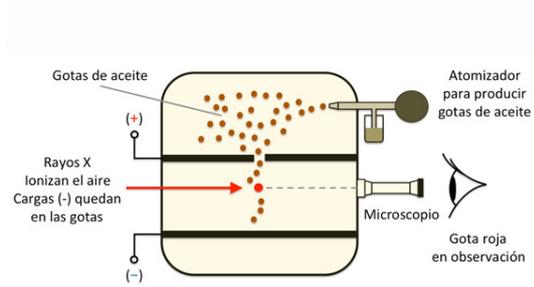


Figure 1.9: Experimento de Millikan.

Observando el movimiento de las gotas, se ven ocasionalmente cambios bruscos en la velocidad v_1 , que pueden atribuirse a cambios en la carga de la gota que ha capturado algunos iones en su movimiento. O bien, si la gota está equilibrada, es decir, está en equilibrio estático, se observa que a veces empieza a moverse repentinamente hacia arriba o hacia abajo, siempre por la captura de uno o varios iones. En ambos casos, desde la ecuación (1.25), se deduce que, en módulo

$$\Delta v_1 = \frac{E}{6\pi\eta r} \Delta q.$$

En particular, en el caso de las gotas en equilibrio, la medición del cambio de velocidad da el valor de la carga de los iones capturados, independientemente de la carga preexistente de la gota. Haciendo un gran número de mediciones en una determinada gota y repitiendo la experiencia con otras varias gotas, Millikan descubrió que la velocidad siempre variaba de forma discreta, indicando cambios discretos en la carga, y que las cantidades calculadas Δv_1 eran siempre expresables como pequeños múltiplos enteros de un valor preciso, es decir como $\Delta q = ne$ con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Además también las cargas de las gotas, medidas en ausencia de radiación, siempre fueron múltiplos de la misma cantidad y con n mayor ($10 \div 100$). Estas mediciones se realizaron también con gotas de glicerina y mercurio y todas dieron el mismo resultado. En conclusión, tanto las cargas de los iones como las que se forman por rozamiento en materiales aislantes o conductores, ya sean positivas o negativas, son siempre múltiplos de una carga elemental.

En el curso de sus mediciones, Millikan descubrió que la ley de Stokes en su forma habitual no se aplica si el radio de la gota es tan pequeño que se aproxima al camino libre medio de las moléculas, que en el aire a presión atmosférica es de $\sim 10^{-7}$ m, es decir, si el medio no parece continuo para la gota que cae. Obtuvo datos consistentes sustituyendo

$$v \rightarrow \frac{v}{1 + \frac{k}{rp}};$$

la velocidad de caída se corrige en términos del radio de la gota y de la presión del aire; k es una constante que se determina experimentalmente. El valor actual de e es solamente 0.6% mayor del valor medido con el método descrito. La diferencia ha sido atribuida al valor de la viscosidad del aire utilizada por Millikan.

1.7 Comentarios conclusivos

En este párrafo haremos algunos comentarios sobre los temas tratados.

El primer concepto nuevo que hemos encontrado es el de carga eléctrica. Podemos decir que la carga de un cuerpo caracteriza la intensidad de la interacción eléctrica sufrida por el cuerpo y en este sentido sería espontánea la comparación con la masa, que caracteriza la intensidad de la interacción gravitatoria: el comportamiento de un cuerpo con respecto a las dos interacciones diferentes depende de la masa y de la carga. Sin embargo, hay otra característica conectada a la masa que es independiente del tipo de interacción: según la ley de la dinámica de Newton, la masa expresa la respuesta de un cuerpo a cualquier fuerza, es decir, la inercia del cuerpo. Sólo experimentalmente se comprueba que la masa inercial es igual a la masa gravitatoria. El papel de la masa parece, por lo tanto, doble al de la carga.

Las propiedades específicas de ambas cantidades son muy diferentes. La carga eléctrica tiene dos signos, está cuantizada, se conserva y es invariante relativista, es decir, tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia. La masa sólo tiene un signo. No está cuantizada y no se conserva: al igual que la carga, es invariante relativista (una partícula tiene la misma masa en cualquier sistema de referencia). Sin embargo, hay que destacar que algunas de estas propiedades sólo se manifiestan claramente en los fenómenos microscópicos. Si consideramos, por ejemplo, la cuantización de

la carga, ésta es evidente a nivel atómico y subatómico, pero se vuelve inaplicable cuando el valor de la carga es tal que no se pueden medir variaciones del orden de la carga elemental (en el experimento de Millikan el límite estaba cerca de $200e$). De consecuencia, en los experimentos electrostáticos normales, las cargas usadas no muestran su naturaleza discreta. Por otra parte, la conservación de la carga se manifiesta siempre, tanto en los procesos elementales, como en los fenómenos macroscópicos, en los que, dentro de los errores de medición, la carga total de todos los cuerpos participantes permanece constante.

En el caso de la masa, la no conservación es evidente sólo cuando pueden tener lugar transformaciones de masa en energía: por ejemplo, se realizan fácilmente reacciones entre núcleos o entre partículas subnucleares en las que en el estado final hay componentes diferentes de las que aparecen en el estado inicial y la masa total no es la misma. Sin embargo, cuando se consideran los fenómenos macroscópicos ordinarios, como en el estudio de la dinámica de los cuerpos sólidos o de las propiedades de los fluidos, no se dan las condiciones para las transformaciones de masa en energía o viceversa (típicas de los fenómenos nucleares y subnucleares) y, por lo tanto, la masa se conserva: esta conservación se observa para cuerpos individuales o, si se producen cambios de fase o reacciones químicas, para todo el sistema. El hecho de que la masa no esté cuantizada es, en cambio, una característica que se manifiesta a cualquier nivel.

Un concepto fundamental en el estudio del electromagnetismo es el de *campo*, introducido por el momento como campo estático debido a una distribución de cargas. En esta fase inicial, el campo aparece como una cantidad formal, útil para separar en la fórmula de la fuerza la contribución de la fuente (el campo) y, por lo tanto, para escribir la fuerza como interacción de una carga con un campo. De hecho, en los casos estáticos o lentamente variables, el campo es inseparable de la fuente: veremos más adelante que, en cambio, en el caso de los fenómenos rápidamente variables que implican la emisión de ondas electromagnéticas, un campo que se propaga adquiere una realidad física independiente de la fuente.

La presencia del campo es detectable exclusivamente a través de una interacción, por ejemplo la fuerza subida por una carga, y esta es una noción básica, válida tanto para el campo electrostático como para el campo magnetostático que se introducirá más adelante, y para los campos electromagnéticos variables en el tiempo.

La ley que expresa la fuerza eléctrica entre cargas estacionarias o que se mueven con baja velocidad es la ley de Coulomb, de la que ahora queremos destacar dos aspectos interesantes. La dependencia $\sim 1/r^2$ implica que para $r \rightarrow 0$ la fuerza tiende al infinito, lo que no tiene sentido físico: esto significa que la carga verdaderamente puntual no es un objeto real. No tenemos ninguna dificultad en admitir esto para los cuerpos macroscópicos, que obviamente nunca son puntuales. Sin embargo, en la naturaleza existe el electrón cuyas dimensiones son inferiores a 10^{-17} m y que lleva la carga elemental e : es por definición un objeto puntual cargado. Esta dificultad conceptual, insuperable en la física clásica, sólo se ha resuelto en la electrodinámica cuántica.

Otra característica típica de la ley de Coulomb, así como de la ley de gravitación de Newton, es la llamada acción a distancia: la interacción tiene lugar sin ningún contacto entre los cuerpos (piénsese, por ejemplo, en el experimento de Rutherford, pero también en las fuerzas de atracción o repulsión entre dos cuerpos cargados distantes o en la atracción entre cuerpos celestes). Esta propiedad parece muy diferente de las de otras fuerzas que se estudian en mecánica, como las fuerzas que empujan o tiran los cuerpos, o las fuerzas de rozamiento, o viscosas, que son todas fuerzas que no se manifiestan a distancia. En realidad, esto se debe a que la materia es neutra, pero cuando, por ejemplo, se empuja un cuerpo, las distribuciones electrónicas de los átomos del objeto que empuja y del cuerpo tienden a acercarse mucho y se crean fuerzas eléctricas repulsivas que dan lugar a la fuerza realmente observada. Este es el sentido del contacto a nivel macroscópico, que es una acción a muy corta distancia.

Una última observación: en los experimentos electrostáticos descritos anteriormente y en los de

los capítulos siguientes, se hace generalmente referencia a los cuerpos sólidos, y la experimentación con éstos es realmente más fácil: en particular, los conductores son típicamente metales en fase sólida. No es fácil experimentar con fluidos (aparte del caso muy especial del experimento de Millikan) y, por otra parte, en las aplicaciones prácticas, las cargas suelen ser transportadas por metales, mientras que los fluidos se utilizan principalmente como aislantes. De hecho, desde el punto de vista de la subdivisión en aislantes y conductores, los líquidos, con la notable excepción del mercurio, son aislantes (tan buenos como algunos aceites o no tan buenos como el agua) y lo mismo para los gases. Tanto los líquidos como los gases pueden convertirse en conductores por electrólisis e ionización, respectivamente.

Ejercicio 1.6 Un hombre de masa 70 Kg, aislado de la tierra, posee una carga $-q$ que, en este ejemplo, está concentrada en un punto a distancia $r = 1\text{m}$ del suelo. Se deposita en el suelo una carga q de manera que la distancia de la carga a $-q$ sea de r . Calcular el valor de q de manera que la fuerza eléctrica entre las cargas sea igual al peso del hombre.

Solución: Tenemos que calcular la carga q estableciendo la igualdad entre la fuerza peso y la fuerza eléctrica

$$mg = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

por lo tanto, despejando q se obtiene que $q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 m g r^2} = 2.76 \times 10^{-4}\text{C}$. Como la carga negativa es producto de los electrones, el cuerpo del hombre presenta un exceso de electrones, los cuales poseen una masa. Calculando la cantidad de electrones que posee el hombre se tiene:

$$N = \frac{q}{e} = \frac{2.76 \cdot 10^{-4}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 1.73 \cdot 10^{15} \text{ electrones};$$

Por lo tanto, la masa de los electrones en exceso es de $Nm_e = 1.58 \cdot 10^{-15}\text{kg}$, lo cual es completamente despreciable con respecto a la masa del hombre!

El ejemplo, que es debidamente paradójico, indica que si los cuerpos no fueran neutros, sino que tuvieran un exceso de carga (aunque extremadamente pequeño), la fuerza eléctrica cancelaría completamente la fuerza gravitacional. De hecho, la fuerza gravitacional, responsable de la formación de estructuras de las galaxias, estrellas y planetas, ha podido manifestarse solamente cuando la fuerza eléctrica ha disminuido, o sea cuando los protones, electrones y neutrones se unieron para formar los átomos neutros. ■

2. Trabajo eléctrico

La expresión

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

que expresa la fuerza sobre una carga de prueba q_0 en un campo eléctrico, es válida cuando las cargas que generan el campo están en reposo y son constantes y cuando la carga q_0 está también en reposo o se mueve sin perturbar la distribución de las fuentes. El término electrostático se utiliza para evidenciar esta situación de inmutabilidad.

Más adelante veremos que cuando en una carga q_0 actúa una fuerza \vec{F} de cualquier naturaleza, no necesariamente electrostática, siempre podemos definir un campo eléctrico \vec{E} , que se llamará *campo electromotor*, dado siempre como la razón entre la fuerza y la carga de prueba. Por lo tanto, en toda generalidad podemos decir que *la fuerza que actúa sobre una carga (y por eso se seguirá llamando fuerza eléctrica) se expresa siempre como el producto de la carga q_0 por un determinado campo*, o sea, valdrá siempre la expresión $\vec{F} = q_0 \vec{E}$.

El trabajo de la fuerza \vec{F} por un desplazamiento elemental $d\vec{s}$ (es un elemento de línea) de la carga q_0 está dado por

$$dW_1 = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 E \cos \theta ds$$

donde θ es el ángulo entre el campo \vec{E} y el desplazamiento $d\vec{s}$, véase la figura 2.1. Por un desplazamiento finito desde el punto A hasta el punto B en el camino C_1 , el trabajo está dado por

$$W_1 = \int_{C_1} dW_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.1)$$

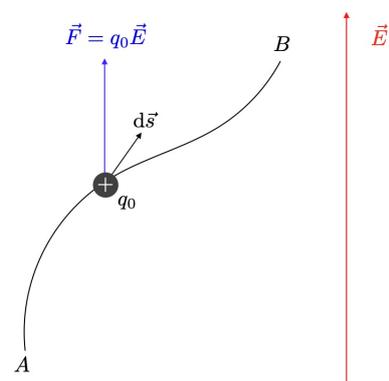


Figure 2.1: Trabajo de una fuerza eléctrica.

correspondiente a la integral de línea del campo \vec{E} en C_1 . Esta integral, o sea la razón W_1/q_0 entre trabajo y carga de prueba, define la *tensión eléctrica entre los puntos A y B relativa al camino C_1* :

$$T_1(A \rightarrow B \text{ en } C_1) = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Si se considera otro camino C_2 , se encuentra en general un trabajo distinto y por lo tanto un distinto valor de la tensión eléctrica, también, si A y B son iguales, se tiene:

$$T_1(A \rightarrow B \text{ en } C_1) \neq T_1(A \rightarrow B \text{ en } C_2).$$

Por un camino cerrado C compuesto, por ejemplo, por C_1 de A a B y de $-C_2$ de B a A, el trabajo es

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{-C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} - \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = W_1 - W_2,$$

donde hemos utilizado de la propiedad de la integral de línea de cambiar solamente el signo si se cambia el sentido a lo largo de la línea.

En general el trabajo en un camino cerrado es distinto que cero:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \mathcal{E}. \quad (2.2)$$

El trabajo para desplazar una carga a lo largo del camino C está dado por el producto de la carga por la *circulación* del campo eléctrico en C . La integral

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.3)$$

se llama *fuerza electromotriz* (f.e.m.) relativa al camino C . Ésta es en general distinta de cero y depende de las características del campo y del camino C pero no de la carga de prueba q_0 ; a pesar del nombre, \mathcal{E} no es una fuerza.

En mecánica se vieron una categoría de fuerzas, llamadas conservativas, por las cuales el trabajo cumplido en el desplazamiento de A a B es una función solamente de la posición inicial y final, y no del camino elegido:

$$W(C_1) = W(C_2) = \dots = W(C_i) = \dots W(C_n)$$

cualquier sea C_i , lo importante es que empiecen de A y acaben en B. Consecutivamente obtenemos que el trabajo en cualquier camino cerrado es nulo, o sea, que la circulación de una fuerza conservativa es nula.

En la naturaleza no todas las fuerzas eléctricas son conservativas, pero sí lo es para el caso de la fuerza electrostática, por lo tanto, decimos que *el campo electrostático es conservativo*. No dependiendo del camino, la integral desde el punto A hasta el punto B se puede expresar como una diferencia de los valores de una función en aquellos puntos:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A). \quad (2.4)$$

Esta función se llama *potencial electrostático* del campo \vec{E} , el cual se define como

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (2.5)$$

En la realidad, es la *diferencia de potencial* (d.d.p) entre el punto A y el punto B a ser definida por la ecuación (2.5). Si insertamos la última en la ecuación del trabajo dada por la ecuación (2.1), tenemos

$$W_{AB} = q_0 (V_A - V_B) = -q_0 \Delta V : \quad (2.6)$$

Definición 2.0.1 — Trabajo electrostático. El trabajo hecho por la fuerza eléctrica para desplazar una carga q_0 desde el punto A hasta el punto B está dado por el producto de q_0 por el opuesto aditivo de la d.d.p. entre el punto inicial y el punto final.

Recordemos que a cada fuerza conservativa tiene asociada una determinada *energía potencial* y que el trabajo de la fuerza conservativa es igual al opuesto aditivo de la variación de la correspondiente energía potencial. En el caso electrostático tenemos

$$W_{AB} = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B). \quad (2.7)$$

Comparando la ecuación (2.7) con la ecuación (2.6) encontramos

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V, \quad U_e = q_0 V. \quad (2.8)$$

Una carga q_0 puesta en un campo eléctrico posee una energía potencial proporcional al potencial.

Además, desde la definición de la fuerza conservativa y observando que la d.d.p. es nula cuando $A = B$, entonces tenemos, para un recorrido cerrado

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \quad W = q_0 \mathcal{E} = 0.$$

Definición 2.0.2 — Campo electrostático conservativo. En un campo electrostático la fuerza electromotriz es siempre igual a 0, y por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica para llevar una carga de su posición inicial a la misma posición inicial es siempre igual a 0 para cualquier camino.

2.1 Cálculo del campo electrostático

Repasemos brevemente los resultados del párrafo anterior: el trabajo de una fuerza eléctrica puede expresarse siempre a través de la integral de línea del campo eléctrico a lo largo de la trayectoria seguida por la carga y, en general, depende de la trayectoria. Si, por el contrario, el campo es electrostático, hemos afirmado que es conservativo y, por lo tanto, el trabajo es independiente de la trayectoria: esto nos lleva a la definición de potencial y de energía potencial. En esta sección mostramos que el campo electrostático de cualquier distribución de carga es conservativo y derivamos las expresiones explícitas de V y U_e .

Empecemos con el caso más sencillo, o sea, de un campo generado por una carga puntual. El trabajo de la fuerza \vec{F} por un desplazamiento elemental $d\vec{s}$ de la carga q_0 en el campo de la carga q , fijada en O , está dado por, véase figura 2.2

$$dW = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{s}}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

por lo tanto

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r \cdot d\vec{s}}{r^2}.$$

La cantidad $dr = \hat{u}_r \cdot d\vec{s} = ds \cos \theta$, proyección de $d\vec{s}$ en la dirección \hat{u}_r del campo, representa de cuanto varió la distancia r entre q_0 y q debido al desplazamiento ds . La cantidad integrada dependerá solamente de la coordenada r , y se obtiene que para un desplazamiento entre A y B , caracterizados por las distancias r_A y r_B desde el punto O :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B}. \quad (2.9)$$

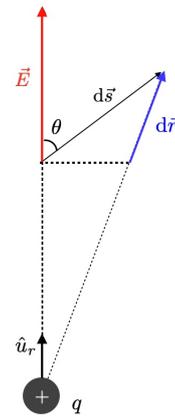


Figure 2.2: Trabajo por un campo eléctrico generado por una carga puntual.

El trabajo correspondiente es, véase figura 2.3

$$W = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Hemos así verificado que el trabajo no depende del camino elegido. Claramente el resultado es banal ya que la fuerza es de tipo central y su modulo depende sólo de la distancia r , pero el cálculo nos proporciona las expresiones de la d.d.p. y la variación de la energía potencial en el campo de una carga puntual; tendremos

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

$$U_e(A) - U_e(B) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (2.10)$$

Es importante mencionar que el potencial y la energía potencial están definidos, pero sin considerar la constante aditiva (por la definición de una integral), por lo tanto es posible considerar

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + c_1, \quad U_e(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r} + c_2$$

las cuales proporcionan respectivamente el potencial en un punto a distancia r desde la carga q y la energía potencial de q_0 a una distancia r de q .

El hecho que la fuerza entre dos cargas decrezca con la distancia sugiere que para cargas muy lejanas entre ellas la fuerza sea despreciable. Por limite, de distancias infinitas, es lícito pensar que:

$$E(\infty) = 0, \quad F(\infty) = 0, \quad V(\infty) = 0, \quad U_e(\infty) = 0.$$

Por lo tanto podemos calcular el potencial y la energía potencial en un punto distante r simplemente tomando el limite de $B \rightarrow \infty$ y tendremos

$$\int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s} = V(r) - V(\infty) \implies V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$U_e(r) = q_0 V(r) = q_0 \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En fin, observamos que el potencial es constante en todos los puntos de la superficie esférica de radio r con centro q .

Los resultados encontrados se extienden sin dificultades al caso de un campo eléctrico generado por un número cualquiera de cargas puntuales, gracias al principio de superposición. El trabajo por un desplazamiento finito A y B de la carga q_0 es

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \sum_i \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{s}.$$

Cada integral lleva a un resultado como en la ecuación (2.9), por lo tanto, podemos definir la d.d.p. y el trabajo para un sistema de cargas puntuales

$$V_A - V_B = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}} - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}} \quad (2.11)$$

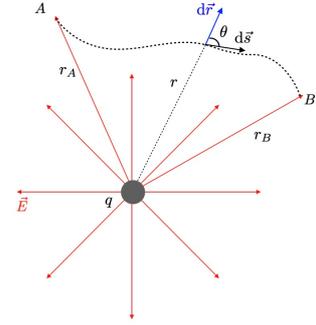


Figure 2.3: Trabajo de una fuerza eléctrica en un camino finito.

$$W = q_0(V_A - V_B) = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}} - \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}} = -\Delta U_e.$$

Finalmente, si las cargas están distribuidas de manera continua con densidad lineal λ , superficial σ o espacial ρ , el campo electrostático es todavía conservativo y, para el cálculo del potencial y de la energía potencial basta substituir las sumas de las cargas por las densidades, o sea

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\ell \frac{\lambda d\ell}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\ell \frac{\lambda(x', y', z') d\ell}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\ V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \frac{\sigma d\Sigma}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \frac{\sigma(x', y', z') d\Sigma}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\ V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\tau \frac{\rho d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\tau \frac{\rho(x', y', z') d\tau}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \end{aligned}$$

Las anteriores ofrecen las reglas por el cálculo del potencial generado por un sistema de cargas. En el hacer las operaciones de suma o de integral las coordenadas x, y, z están fijas mientras que son variables las coordenadas de las fuentes, como en figura 2.4.

Resumiendo, hemos visto que el potencial y la energía potencial están conectadas entre sí a través de

$$U_e(x, y, z) = q_0 V(x, y, z).$$

El potencial electrostático, en todas las situaciones descritas, resulta ser una función unívoca del punto, continua y derivable, la cual puede ser calculada una vez que tengamos la distribución de cargas (discreta o continua) independientemente de la presencia de la carga de prueba. Como en el caso del campo \vec{E} se habla de campo vectorial, así por el potencial electrostático se puede hablar de campo escalar. A diferencia del campo eléctrico, no es el valor del potencial a ser significativo, sino que sus variaciones, o sea la d.d.p..

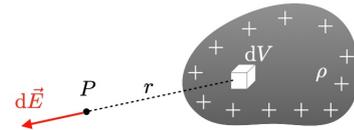


Figure 2.4: Distribución continua de carga.

Unidades 2.1.1 Ya que la diferencia de potencial es trabajo partido por una carga, la unidad de media en el SI es joule/coulomb [J/C], la cual define una nueva unidad muy importante que es el volt [V], por lo tanto $V=J/C$.

La d.d.p. de 1 V es aquella que crea un trabajo de 1J para transportar una carga de 1C. Con la introducción de esta nueva unidad de medida podemos expresar el campo eléctrico (definido como [N/C]) como

$$\frac{N}{C} = \frac{N \cdot m}{C \cdot m} = \frac{J}{C \cdot m} = \frac{V}{m}.$$

La unidad V/m (volt/metro) es aquella usada más frecuentemente. Es importante notar que el volt es también la unidad de medida de las tensiones eléctricas y de las fuerzas electromotrices.

2.2 Energía potencial electrostática

Hemos verificado que la fuerza electrostática es conservativa y hemos determinado la expresión de la energía potencial correspondiente por una carga q_0 . Analicemos más en detalle el significado de la fórmula $U_e(r) = q_0 q / 4\pi\epsilon_0 r$: ésta puede ser escrita como $U_e(r) - U_e(\infty)$ y por lo tanto al trabajo W de la fuerza eléctrica para llevar las cargas desde una distancia r a la distancia infinita, en acuerdo con $W = -\Delta U_e$.

Si las cargas son del mismo signo, y por lo tanto, se repelen, la energía potencial $U_e(r)$ es positiva y el trabajo eléctrico es también positivo: de hecho, la fuerza repulsiva quiere alejar las cargas. En el proceso de alejamiento, la energía potencial disminuye y viene dando trabajo al exterior. Si se quisiera construir el sistema de dos cargas del mismo signo inicialmente a distancia infinita y al final a distancia r , es necesario gastar trabajo externo contra la fuerza repulsiva y encontramos este trabajo bajo forma de energía potencial $U_e(r)$, la cual aumenta a medida que se acercan las cargas.

Por otro lado, si tenemos dos cargas de signo opuesto, y por lo tanto se atraen, la energía potencial y el trabajo eléctrico para separar las cargas son negativos: la fuerza atractiva en el alejamiento cumple trabajo negativo. El alejamiento puede ocurrir sólo por efecto de una fuerza exterior que cumple trabajo positivo y encontramos este trabajo en la energía potencial que aumenta (se hace menos negativa) en el proceso. Cuando dos cargas de signo opuestos se acercan desde el infinito hasta una distancia r , la energía potencial disminuye y viene dado trabajo desde el exterior.

Por lo tanto, el sistema de dos cargas de mismo signo evoluciona espontáneamente hacia la distancia infinita y para contrarrestarlo necesitamos gastar un trabajo igual a $U_e(r)$, el sistema de dos cargas de signo opuesto evoluciona hacia la situación de distancia mínima y para separarlo necesitamos gastar el trabajo $-U_e(r)$. Observamos que en ningún caso es posible mantener dos cargas en reposo a distancia finita sin la intervención de otras fuerzas que contrabalanceen la fuerza eléctrica.

Siendo el potencial igual a la energía potencial dividida por la carga q_0 podemos afirmar que:

Definición 2.2.1 el potencial en un punto es igual al trabajo que la fuerza eléctrica cumple para desplaza una carga positiva unitaria desde aquel punto hasta el infinito.

Las mismas consideraciones se aplican a un sistema de cargas discreto y continuo.

Un examen crítico del argumento muestra una asimetría: la carga q_0 ha sido considerada separada del sistema de cargas fijas que generan el campo. Pero este sistema posee su energía potencial porque las cargas que lo componen, y las cuales están a distancias finitas entre ellas, ejercen entre ellas fuerzas electrostáticas. La energía potencial electrostática total debería de ser escrita

$$U_e(\text{tot}) = U_e + U_e(\text{sistema}) :$$

el hecho es que $U_e(\text{sistema})$ es constante durante los procesos descritos, o sea, por desplazamientos de la carga q_0 de una posición a otra, y, por lo tanto, las variaciones de la energía potencial total coinciden con $\Delta U_e(q_0)$.

De todos modos, resolvemos ahora el problema del cálculo de energía potencial de un sistema de cargas fijas utilizando los resultados obtenidos hasta ahora por q_0 .

Cada carga está en el campo eléctrico de las otras cargas y tiene una determinada energía potencial, la cual depende de las distancias relativas y de los valores de las cargas. La energía total es la suma de todos los términos, que escribimos explícitamente en la tabla.

	q_1	q_2	\cdot	q_n
q_1	0	$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{1,2}}$	\cdot	$\frac{q_1 q_n}{4\pi\epsilon_0 r_{1,n}}$
q_2	$\frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{2,1}}$	0	\cdot	$\frac{q_2 q_n}{4\pi\epsilon_0 r_{2,n}}$
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
q_n	$\frac{q_n q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{n,1}}$	$\frac{q_n q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{n,2}}$	\cdot	0

El elemento i, j es la energía potencial de la pareja de cargas q_i, q_j ; escribiendo cero para los elementos i, i asumimos que una carga no sienta el propio campo. Ya que $r_{i,j} = r_{j,i}$, resulta evidente

notar que cada contribución aparece dos veces en la tabla y, por lo tanto, el resultado es

$$U_e(\text{sistema}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{i,j}}.$$

Llamando $V_{j,i}$ al potencial que genera la carga q_j en el punto donde se encuentra la carga q_i , lo anterior se escribe como:

$$U_e(\text{sistema}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i V_{j,i}.$$

Las expresiones para una distribución de cargas continuas es conceptualmente análogas.

Ejercicio 2.1 Desde el curso de mecánica, sabemos que si una fuerza es conservativa, se define una energía potencial aquella función escalar del espacio $U(x, y, z) = U(r)$ que satisface:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = U_p(A) - U_p(B) = -\Delta U. \quad (2.12)$$

Si la energía potencial aumenta ($U_B > U_A$), entonces el trabajo es negativo $W < 0$ y no se puede extraer trabajo de la fuerza durante el proceso y será necesario dar trabajo.

Si la energía potencial disminuye ($U_B < U_A$), entonces el trabajo es positivo $W > 0$ y el trabajo se puede utilizar en el proceso.

Por el trabajo de las fuerza conservativas, tenemos también el teorema de la energía cinética (o teorema de las fuerzas vivas)

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2.$$

o sea el trabajo es igual a la variación de la energía cinética.

$$W = E_c(B) - E_c(A) \quad (2.13)$$

Igualando las ecuaciones (2.12) y (2.13) obtenemos el principio de conservación de la energía

$$E_c(A) + U_p(A) = E_c(B) + U_p(B) = \text{const} \quad (2.14)$$

Movimiento de una carga. Conservación de la energía

Supongamos de tener una carga puntual q_0 que se mueve en un campo \vec{E} ; cuando la carga q_0 de masa m se mueve desde la posición A hacia la posición B su energía cinética cambia en acuerdo con el *teorema de la energía*:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W;$$

de otro lado, ya que la carga se encuentra en una región donde actúa un campo electrostático, el trabajo hecho por la fuerza eléctrica será:

$$W = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B) = q_0V_A - q_0V_B.$$

Igualando y ordenando los términos tenemos

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + q_0V_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + q_0V_B. \quad (2.15)$$

que expresa la conservación de la energía

$$E = E_c + U_e = \frac{1}{2}mv^2 + q_0V. \quad (2.16)$$

Durante el movimiento de la carga la energía total (suma de la energía cinética y de la energía potencial) se mantiene constante.

En la ecuación (2.15) se consideró sólo el término electrostático; si actúan otras fuerzas conservativas, como la fuerza peso y fuerzas elásticas, hay que añadir los términos correspondientes. Durante el movimiento los distintos términos cambian y hay transformaciones de una forma de energía a otra, pero la suma es siempre constante.

La ecuación (2.15) muestra que, eligiendo oportunamente el signo de la d.d.p., es posible acelerar la carga, transformando la energía potencial en energía cinética.

Una carga positiva es acelerada si $V_A > V_B$ mientras que una carga negativa es acelerada si $V_A < V_B$. Lo dicho hasta ahora está a la base de la aceleración de partículas con campos electrostáticos. Si $V_A = V_B$ no existe ningún efecto global; esto no quiere decir que entre A y B no exista un campo, sino que en el camino $A \rightarrow B$ hay zonas en las cuales la partícula aceleró y en otra deceleró. Un ejemplo de $V_A = V_B$ es cuando $A \equiv B$: al final de un camino cerrado la energía cinética es la misma que al principio, la velocidad puede cambiar de dirección pero no en módulo.

Unidades 2.2.1 Cuando una carga elemental viene acelerada por la d.d.p. de 1 V, ésta adquiere una energía cinética

$$e\Delta V = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Esta unidad de energía, que es útil para describir las energías de los fenómenos en escalas atómicas, define la unidad de medida *electronvolt*, cuyo símbolo es *eV*.

Ejercicio 2.2 Separador electrostático. Osciloscopio

Se inyecta un electrón con velocidad inicial v_0 en una región limitada en la que actúa un campo electrostático uniforme perpendicular a v_0 . Al salir de la región, el electrón choca con una pantalla S en el punto C . Calcular el ángulo de desviación α , la energía cinética final y la velocidad del electrón y la distancia d del punto C al eje x .

Solución: El electrón está sometido a una aceleración $a = eE/m$ dirigida hacia el eje y y cuando pasa por la región donde hay un campo eléctrico. El movimiento a lo largo de x es lineal uniforme con

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2.$$

La trayectoria es un arco de parábola de ecuación

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{x^2}{v_0^2}.$$

Se trata del mismo movimiento descrito por un cuerpo de masa m bajo la acción de la fuerza peso mg . El ángulo de desviación se calcula (véase figura)

$$\tan \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big|_{x=\ell} = \frac{eE}{m} \frac{\ell}{v_0^2},$$

y la distancia h vale

$$h = y(\ell) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{\ell^2}{v_0^2}. \quad (2.17)$$

La energía cinética en el punto B se obtiene con la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + eEh = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2 E^2}{m} \frac{\ell^2}{v_0^2}, \quad (2.18)$$

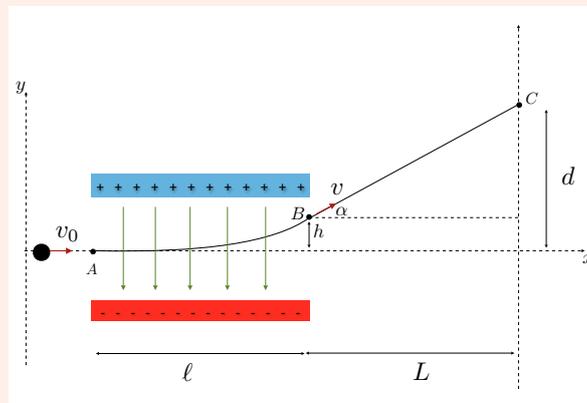
acordando que en el potencial en el punto A , fuera de la zona del campo eléctrico es zero, y el potencial en el punto B es $V_B = Eh$. La velocidad final es:

$$v^2 = v_0^2 + \frac{e^2 E^2}{m^2} \frac{\ell^2}{v_0^2} = v_0^2 + 2ah.$$

Fuera del campo, el electrón describe una trayectoria lineal y

$$d = h + L \tan \alpha = \frac{eE\ell}{mv_0^2} \left(\frac{\ell}{2} + L \right). \quad (2.19)$$

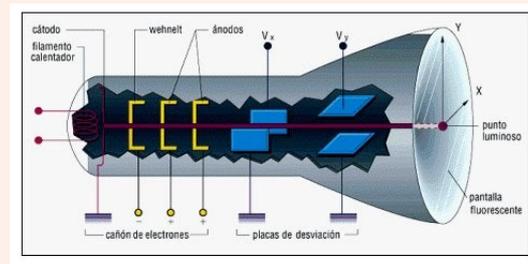
Dados los parámetros geométricos ℓ y L , el valor del campo y la velocidad inicial, se puede determinar la relación e/m para los electrones simplemente midiendo d . Para tener una idea cuantitativa de d , asumiendo conocido el valor $e/m = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C/Kg}$, una velocidad inicial $v_0 = 3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, un campo $E = 10^4 \text{ V/m}$ y $\ell = L = 10 \text{ cm}$: se obtiene $h = 0.98 \text{ cm}$ y $d = 2.93 \text{ cm}$.



La ecuación (2.19) permite también, si se conoce todo excepto el campo, determinar su valor midiendo d : ya que el valor del campo está relacionado con el d.d.p. entre los planos cargados distantes h_0 desde $\Delta V = E h_0$, la medida de d proporciona la d.d.p. aplicada y también el signo desde la orientación de la desviación.

Veamos algunas aplicaciones del dispositivo descrito. Si las partículas con la misma carga y diferentes masas entran a lo largo del eje x , chocan con la pantalla en diferentes puntos: con un diafragma adecuado, sólo las que tienen masas dentro de un rango determinado por la anchura del diafragma pueden seguir pasando la pantalla. El sistema se denomina separador de electrólisis. Un instrumento muy utilizado en el que se adoptan dos pares de placas de deflexión como las descritas es el osciloscopio, cuyo elemento principal, el tubo de rayos catódicos, se muestra en la figura. Su funcionamiento puede entenderse ya desde ahora, aunque se utiliza principalmente para mediciones de d.d.p. variables en el tiempo. Dentro de una envoltura

de vidrio en la que se hace el vacío se encuentran una fuente que emite a lo largo del eje x un haz colimado de electrones, un par de placas verticales de desviación, un par de placas deflectoras horizontales y una pantalla S formada por material fluorescente depositado en el interior de la pared extrema: la remisión de luz de la pantalla en el punto en el que incide el haz de electrones permite visualizar la posición del haz (un tubo de rayos catódicos es también el elemento esencial de los televisores y los terminales de ordenador clásicos: el nombre de rayos catódicos es el que se dio a los electrones en el momento de su descubrimiento).



Ejercicio 2.3 En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno el electrón cumple una órbita circular de radio $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m alrededor del protón. Calcular la energía de enlace del hidrógeno.

Solución: El potencial eléctrico del protón, puntual con respecto a las dimensiones del átomo, a una distancia r , es

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = 27.2 \text{ V},$$

y la energía potencial del electrón en el campo del protón es

$$U_p = -eV = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -27.2 \text{ eV} = -4.35 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

Sobre el electrón actúa la fuerza dada por la ley de Coulomb y, por la ley de Newton,

$$ma = m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

la fuerza coulombiana es la fuerza centrípeta que mantiene el electrón en la órbita circular. La energía cinética del electrón es

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

y resulta $v = 2.19 \cdot 10^6$ m/s y su energía total es

$$U = E_c + U_e = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -13.6 \text{ eV} = -21.8 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

La energía total es negativa porque la energía potencial en módulo es mayor que la energía cinética; por lo tanto, el sistema está ligado con una energía de enlace de -13.6 eV. Si se quiere

separar el electrón del protón llevándolo al infinito, el mínimo gasto de energía se produce cuando el electrón llega al infinito con velocidad cero. Su energía final es cero y, por lo tanto, también lo es su energía inicial: por lo tanto, al principio debe ser

$$U + U' = 0 \quad \implies \quad -13.6\text{eV} + U' = 0 \quad \implies \quad U' = 13.6\text{eV} \quad (2.20)$$

Es llamada *energía de ionización* del átomo de hidrógeno. Recordemos que la ionización es el proceso de separación de electrones de un átomo, como resultado del cual se forma un ion positivo (el átomo que carece de uno o más electrones) y electrones libres; otros átomos pueden capturar estos electrones y convertirse en iones negativos. Obsérvese que la energía de enlace no es la energía potencial: esto sería cierto si ambas cargas estuvieran en reposo ($E_c = 0$); sin embargo, hemos observado que este sistema no es estable eléctricamente, mientras que el átomo es estable. De hecho, la estabilidad bajo la acción de una fuerza atractiva sólo se consigue porque el electrón gira. Volveremos a tratar este problema de la estabilidad del átomo en breve, hablando del modelo atómico de Bohr-Sommerfeld.

Consideramos que son necesarias dos aclaraciones. En los ejemplos que describen el movimiento de los electrones o protones o iones, siempre se da a entender que el movimiento tiene lugar en el vacío; si no fuera así, el movimiento de las partículas sería completamente diferente, debido a las colisiones con las moléculas del medio.

Otra suposición, implícita en las fórmulas que utilizamos, es que las velocidades son siempre suficientemente inferiores a la de la luz para poder utilizar la mecánica clásica. Para los electrones suponemos que podemos hacerlo hasta energías cinéticas $E_c = 5\text{KeV}$, que corresponden a velocidades inferiores a $0.14c = 4.2 \cdot 10^7\text{ m/s}$, para los protones la misma situación se da hasta energías cinéticas $E_c = 10\text{MeV}$ (los límites son $\sim 0.01mc^2$). Por supuesto, la transición es gradual. Más allá de estos límites, la aproximación clásica es cada vez menos precisa hasta que se vuelve completamente errónea. La diferencia de comportamiento entre los electrones y los protones radica en la diferencia de masa, de modo que es mucho más fácil acelerar un electrón que un protón: al mismo aumento de la energía cinética, es decir, al mismo valor absoluto de la d.d.p. que acelera, el electrón tiene una variación de velocidad mucho mayor y, por lo tanto, ya alcanza el régimen relativista a pequeñas energías cinéticas.

El modelo atómico de Bohr-Sommerfeld

El modelo atómico de Bohr fue propuesto en el 1913; aceptando la hipótesis nuclear de Rutherford y aplicándola al átomo de hidrógeno, Bohr asumió que el electrón podía describir órbitas circulares alrededor del protón, obedeciendo la llamada condición de cuantización del momento angular; el momento angular L del electrón con respecto al núcleo debe ser un múltiplo entero de la cantidad $\hbar = h/2\pi$; la constante h es la constante de Planck.

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34}\text{ Js} \quad \implies \quad \hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}\text{ Js}$$

Por lo tanto, para una órbita circular de radio r_n , debe ser

$$mvr_n = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.21)$$

La condición clásica de equilibrio ha sido descrita en el ejercicio anterior

$$m \frac{v^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}, \quad \implies \quad v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r_n}}, \quad \implies \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m e^2} = n^2 \cdot 0.529 \cdot 10^{-10}\text{ m}.$$

La cuantización del momento angular impone que los radios de las órbitas tengan que ser

$$r_1 = 0.529 \cdot 10^{-10}\text{ m}, \quad r_2 = 2.116 \cdot 10^{-10}\text{ m}, \quad r_3 = 4.761 \cdot 10^{-10}\text{ m}, \dots$$

En cada uno de estos estados, que se llaman *estados cuánticos*, la energía total del electrón es

$$U_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2} \frac{m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}.$$

La energía, por lo tanto, también está cuantizada: su valor mínimo es para $n = 1$ y es $U_1 = -13.6 \text{ eV}$: a medida que aumenta n , la energía aumenta tendiendo a cero para valores discretos. Hablamos de niveles de energía del átomo de hidrógeno: el correspondiente al nivel de energía U_1 se llama nivel fundamental, los otros niveles serán excitados. En condiciones normales el electrón se encuentra en el nivel de energía U_1 .

Sommerfeld amplió el modelo de Bohr considerando la posibilidad de que el electrón describa órbitas elípticas con el protón en uno de los focos: de hecho, esta órbita es la más general para un sistema de dos puntos unidos por una fuerza atractiva central del tipo k/r^2 y con energía total negativa. El semieje mayor a sólo depende de la energía, mientras que la excentricidad $\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ siendo b el semieje menor, depende, para una energía dada, del momento angular con el que se recorre la órbita. A esta configuración clásica Sommerfeld impuso que tanto el momento angular del electrón con respecto al protón como su proyección a lo largo de una determinada dirección fuesen cuantizados, o sea múltiplos enteros de \hbar . Las consecuencias de estas hipótesis son las siguientes:

- la energía del electrón depende del número cuántico principal n como en el modelo originario de Bohr.
- En cada nivel energético U_n el electrón puede recorrer n órbitas elípticas, todas con el mismo semieje mayor $a_n = -e^2/8\pi\epsilon_0 U_n$ y con semieje menor, y por lo tanto momento angular, distintos, dado por

$$L = (\ell + 1)\hbar, \quad \text{con } \ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

El entero ℓ se llama *número cuántico azimutal*; porque se demuestra que $b_n/a_n = (\ell + 1)/n$, resulta que la órbita con $\ell = n - 1$ es una circunferencia.

- Para cada órbita caracterizada por el valor ℓ , son posibles $2\ell + 1$ inclinaciones del plano de la órbita; precisamente, el ángulo α entre la normal al plano y una dirección dada debe ser tal que

$$\cos \alpha = \frac{m}{\ell + 1}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell.$$

El entero m se llama *número cuántico magnético*.

Fijando n son posibles

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = n^2$$

estados dinámicos; en el nivel fundamental ($n = 1, \ell = 0, m = 0$) existe sólo un estado dinámico accesible.

El modelo Bohr-Sommerfeld, desarrollado y perfeccionado entre el 1913 y el 1925, explicaba muchas características de los fenómenos atómicos observados en la época, especialmente en el campo de la emisión y absorción de la radiación electromagnética por parte de los átomos, y establecía el concepto de energía y momento angular cuantificados según valores discretos en los fenómenos atómicos: por estas razones, su importancia histórica es fundamental.

Sin embargo, este modelo no era consistente: aplicaba al movimiento del electrón con respecto al protón los resultados bien conocidos en la mecánica clásica relativos al movimiento en un campo de fuerzas centrales newtonianas (k/r^2), pero introducía hipótesis *ad hoc* sobre la cuantización

del momento angular, esenciales para explicar los datos experimentales, pero sin justificación teórica. Por otra parte, si por un lado se explotan los resultados clásicos, por el otro lado se ha tenido que ignorar el fenómeno clásico de la emisión de radiación por una carga en movimiento con aceleración centrípeta, emisión que debería haber llevado muy rápidamente al electrón a perder su energía y caer sobre el protón, mientras que experimentalmente se demuestra que los átomos son estables.

El modelo Bohr-Sommerfeld fue superado en 1925 con la llegada de la mecánica cuántica, propuesta por Heisenberg y Schrödinger, en cuyo marco se formulan de forma coherente las leyes que rigen los fenómenos atómicos y que explican con extrema precisión las observaciones experimentales pertinentes.

2.3 El campo como gradiente del potencial

En las secciones anteriores hemos demostrado que si se conoce el campo electrostático en cada punto de una curva que une dos puntos A y B podemos calcular la d.d.p. entre los puntos utilizando la ecuación (2.5) y que el resultado no depende del camino elegido.

Queremos ahora demostrar que, junto con la relación integral, existe una relación local que permite calcular el campo electrostático conociendo el potencial. Hemos ya dicho que el potencial es una función escalar continua y derivable. Para un desplazamiento $d\vec{r} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y + dz\hat{u}_z$ que une dos puntos $A(x, y, z)$ y $B(x + dx, y + dy, z + dz)$ la variación del potencial¹ es

$$dV = V(x + dx, y + dy, z + dz) - V(x, y, z) = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

de acuerdo con la ecuación (2.5). Por otro lado, por el teorema del diferencial total, se cumple:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

y, confrontando las dos expresiones obtenemos:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Hemos encontrado las relaciones entre las componentes del campo electrostático y del potencial electrostático. La anterior se puede escribir de manera general como:

$$\vec{E} = -\mathbf{grad} V = -\nabla V \quad (2.22)$$

Definición 2.3.1 El campo electrostático es igual al gradiente del potencial electrostático cambiado de signo.

La ecuación (2.22) es la relación local, la cual, a través del cálculo de las derivadas parciales del potencial, permite calcular las componentes del campo eléctrico en cada punto de la región donde estén definidos campo y potencial.

La representación de la operación de gradiente puede describirse de manera diferente utilizando el operador vectorial *del* o *nabla* en inglés:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z, \quad (2.23)$$

¹Tenemos que tener cuidado con las definiciones: la variación del potencial es la diferencia del potencial entre el punto final y el punto inicial, la d.d.p es la diferencia entre el punto inicial y el punto final.

normalmente se omite el signo de vector en el operador ∇ aunque en algunos textos se encuentra $\vec{\nabla}$, queda claro desde la ecuación (2.23) que estamos hablando de un operador vectorial. Por lo tanto ∇ se porta como un vector, que toma significado cuando opera sobre una función escalar o se multiplica por otro vector.

Según la ecuación (2.22), la ecuación (2.5) puede ser escrita como

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = \nabla V \cdot d\vec{s}, \quad V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \nabla V \cdot d\vec{s}$$

o sea

$$V_B - V_A = \int_A^B \nabla V \cdot d\vec{s}. \quad (2.24)$$

La ecuación (2.24) es la aplicación al potencial de un teorema general del calculo vectorial, el *teorema del gradiente*, según el cual

Theorem 2.3.1 la variación de una función escalar entre dos puntos A y B está dada por la integral de línea del gradiente de la función a lo largo de un camino que une los puntos A y B .

La definición dada por la ecuación (2.22) nos proporciona otro método para calcular el campo eléctrico. Conocida la distribución de carga, para calcular el campo \vec{E} (que es un vector), tenemos que calcular 3 integrales (una por cada componente); mientras que con la ecuación (2.22) tenemos que calcular una sola integral para obtener V y luego calcular las componentes del \vec{E} simplemente derivando el potencial (operación mucho más simple porque, a parte puntos de discontinuidades, una función escalar es siempre derivable).

De todos modos, conociendo el potencial, es más sencillo calcular el trabajo de las fuerzas eléctricas sobre una carga q_0 . Para terminar el discurso, es útil acordarse de la propiedad de invariancia de la operación gradiente, conectada a la forma vectorial del operador. Modulo, dirección y sentido del vector ∇V no dependen del sistema de coordenadas: por lo tanto, fijando dos puntos infinitamente cercanos, la expresión

$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s} \quad (2.25)$$

tiene un significado intrínseco, ya que corresponde a una operación entre vectores. La ecuación (2.25) puede ser considerada como definición del gradiente de la función escalar V :

Definición 2.3.2 El gradiente de V es aquel vector tal que su producto escalar con el vector desplazamiento infinitesimal $d\vec{s}$ proporciona la variación de V a través del desplazamiento.

Por otra parte, en la mayoría de los cálculos prácticos, es necesario utilizar un sistema de coordenadas y determinar las componentes del gradiente en el sistema dado. En otras palabras, la expresión explícita del operador de (2.23), válida en un sistema cartesiano tridimensional, depende del sistema de coordenadas.

Si se utiliza un sistema de coordenadas polares en el espacio, que es particularmente apropiado para los casos de simetría esférica, los desplazamientos infinitesimales, correspondientes a la variación de una coordenada manteniendo las otras dos constantes, son dr , $r d\theta$, $r \sin \theta d\phi$ y por lo tanto:

$$d\vec{s} = dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{u}_\phi,$$

siendo \hat{u}_r , \hat{u}_θ , \hat{u}_ϕ tres versores variables, a 90° entre ellos.

Insertando en la ecuación (2.25) e igualándola a la expresión general para dV :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi = (\nabla V)_r dr + (\nabla V)_\theta r d\theta + (\nabla V)_\phi r \sin \theta d\phi,$$

y el operador ∇ en coordenadas polares (esféricas) se escribe:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{u}_\phi.$$

El mismo razonamiento se puede hacer para encontrar el operador diferencial en coordenadas cilíndricas, y se encuentra:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z$$

Ejercicio 2.4 Una carga q se distribuye uniformemente en un cable largo 2ℓ , como en el ejemplo 1.2. Calcular el potencial y el campo electrostático en los puntos del eje del cable y extienda el resultado a un cable de longitud infinita.

Solución El potencial debido a la carga infinitesimal λdx en un punto del eje es

$$dV = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e integrando sobre todo el hilo

$$V = \int_{-\ell}^{\ell} dV = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right]_{-\ell}^{\ell} \implies V(y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + y^2}}{-\ell + \sqrt{\ell^2 + y^2}}.$$

Si se calcula $-dV/dy$ se obtiene

$$E(y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y \sqrt{\ell^2 + y^2}},$$

que es el mismo resultado del ejemplo 1.2.

Cuando ℓ tiende al infinito, $E(y)$ tiende a $\lambda/2\pi\epsilon_0 y$ pero el potencial tiende al infinito. El resultado no tiene que asustar, porque el hilo indefinido no es un sistema físico real; en primer lugar, éste tendría una carga infinita, además la presencia de carga al infinito no permitiría imponer $V_\infty = 0$. De hecho, como ya dicho, la expresión límite del campo es válida a distancia y y desde el hilo largo 2ℓ cuando $y \ll 2\ell$; y calculamos

$$V(y_1) - V(y_2) = \int_{y_1}^{y_2} E(y) dy = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{y_2}{y_1}. \quad (2.26)$$

En la práctica, las d.d.p. se pueden calcular, también si el valor del potencial tiende al infinito. Alternativamente, si en la fórmula divergente del potencial $V(y)$ escribimos las raíces, cuando $\ell \gg y$, como $\ell \sqrt{1 + y^2/\ell^2} = \ell (1 + y^2/(2\ell^2))$, tenemos

$$V(y) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln y + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 2\ell$$

y el término constante, por cuando grande sea, en las diferencias desaparece. Se encuentra así:

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{y_2}{y_1}, \quad \text{o sea} \quad E = -\frac{dV}{dy}. \quad (2.27)$$

Ejercicio 2.5 Un disco de espesor despreciable de radio R tiene una carga q distribuida por toda su superficie, como en el ejemplo 1.4. Calcular el potencial y el campo electrostático en el eje del disco y extender el resultado cuando R tiende a infinito.

Solución: La densidad de carga superficial es $\sigma = q/\pi R^2$. Como en el ejemplo 1.4, consideramos un anillo, concéntrico al disco, de radio r y de área $d\Sigma = 2\pi r dr$ sobre el cual hay una carga $dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma r dr$; el potencial generado por este anillo en un punto del eje es

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{r^2+x^2}}.$$

Se integra sobre todo el disco y se obtiene

$$V = \int_{\Sigma} dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2+x^2} - x \right). \quad (2.28)$$

Para $x = 0$, $V = \sigma R/2\epsilon_0$. A grandes distancias, escribiendo el término entre paréntesis como

$$x \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - 1 \right) \quad (2.29)$$

y aproximando la raíz con $1 + R^2/(2x^2)$, o sea desarrollando en serie y parando el primer orden) se encuentra

$$V(x \gg R) = \frac{\sigma R^2}{3\epsilon_0 x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}, \quad (2.30)$$

como si la carga estuviese puesta en el centro del disco.

También en este caso, el potencial depende sólo de la x , por lo tanto $E_y = E_z = 0$ y

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \right), \quad (2.31)$$

que es la misma que se encontró en el ejemplo 1.4. Las fórmulas de V y E_x así escritas valen para $x > 0$; el potencial para $x < 0$ es idéntico y es suficiente substituir x con $|x|$; el campo, en vez, es discontinuo cuando se cruza el disco. ■

2.4 Superficie equipotencial

En la sección anterior se completó la discusión sobre la relación entre el campo y el potencial eléctrico. En la práctica, el potencial se puede pensar como la primitiva del campo, en el sentido que sus variaciones se calculan desde el campo a través de la integral. Además, el signo negativo entre campo y potencial llega de una propiedad bien definida de las fuerzas conservativas, o sea, $\vec{F} = -\nabla U_e$ en la cual, el signo negativo significa que el trabajo cumplido por la fuerza y utilizable en el exterior ocurre debido a la energía potencial que disminuye. En electrostática, más que sobre la relación entre la fuerza y la energía potencial se pone el acento sobre la relación entre el campo y el potencial, pero el significado físico es el mismo.

En el capítulo anterior hemos introducido la representación visual del campo a través de las líneas de fuerzas, cuya expresión analítica está dada por la ecuación (1.21). También, el comportamiento del potencial puede ser visualizado utilizando las superficies equipotenciales, las cuales se define como *una superficie en espacio tridimensional en cuyos puntos el potencial toma*

el mismo valor. En coordenadas cartesianas escribimos

$$V(x, y, z) = \text{constante}$$

y variando el valor de la constante, se obtiene toda una familia de superficies equipotenciales. Está claro que éstas nunca se cruzan: *en cada punto pasa una y una sola superficie equipotencial, siendo el potencial una función unívoca.*

Recordando las propiedades de dirección y sentido del gradiente, las cuales se pueden deducir desde la expresión

$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot d\vec{s},$$

tenemos que, para un desplazamiento $d\vec{s}$ tangente a una superficie equipotencial, la variación dV es obviamente nula (variación del potencial en la misma superficie equipotencial) y por lo tanto, el *gradiente es ortogonal en cada punto a la superficie equipotencial.* Además, para un desplazamiento $d\vec{s} = d\vec{n}$ ortogonal a la superficie equipotencial y orientado en el sentido de crecimiento de V , o sea, de una superficie $V = V_1$ a otra $V = V_1 + dV$ con $dV > 0$, $dV = |\nabla V| dn$, o sea

$$|\nabla V| = \frac{dV}{dn} :$$

el modulo del gradiente es igual a la derivada del potencial en la dirección ortogonal a la superficie equipotencial, la cual indica el sentido de crecimiento del potencial. Revisando el signo negativo, concluimos que el campo electrostático es en cada punto ortogonal a la superficie equipotencial que pasa por aquel punto y su sentido indica el sentido de disminución del potencial. *Las superficies equipotencial resultan entonces ortogonales a las líneas de fuerza.*

Por ejemplo, en el caso de una carga puntual las superficies equipotenciales están dadas por

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{constante} \implies r = \text{constante}$$

y, por lo tanto, las superficies son esferas con centro en la carga; las líneas de fuerzas son semirectas saliente de la carga, ortogonales a las superficies esféricas. Si la carga es positiva, entonces las líneas de fuerzas salen y el potencial es decreciente con la distancia; si la carga es negativa, las líneas de fuerzas entran en la carga y el potencial es creciente con la distancia. En figura 2.5 se dibujan las líneas de fuerza (en rojo) y las superficies equipotenciales (en azul) para distintos sistemas de cargas: una carga positiva (primero); dos cargas iguales en módulo pero de signo opuesto (segundo); dos cargas iguales en módulo y del mismo signo (tercero); dos cargas de signo opuesto y módulos $q_2 = -3q_1$, donde $q_1 < 0$ (cuarto).

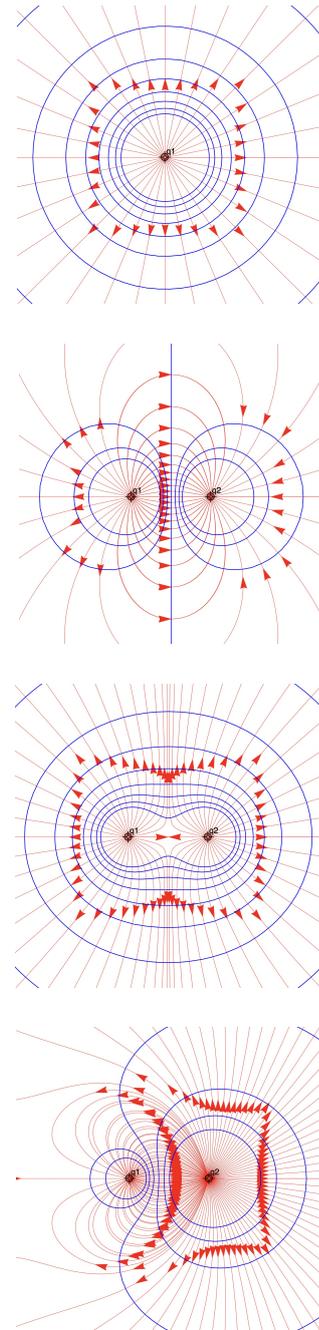


Figure 2.5: Superficies equipotenciales.

En el caso de un hilo indefinido, el campo tiene dirección ortogonal al hilo y las superficies equipotenciales son superficies cilíndricas que tienen el hilo como eje; en el caso de un plan indefinido, el campo eléctrico es ortogonal al plano y las superficies equipotenciales son planos paralelos; la misma geometría se tiene cuando hay dos planos paralelos de carga opuesta (condensadores). Se verifica siempre que el sentido del campo indica el sentido de decrecimiento del potencial.

2.5 Rotor del campo vectorial

Junto a la caracterización de un campo conservativo, que es dada por relaciones del tipo:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

podemos poner otra relación, la cual se basa en la definición de la f.e.m.:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.32)$$

Sabemos que para un campo conservativo, su circulación extendida en cualquier línea cerrada es nula y, viceversa, si la circulación en cualquier línea cerrada es nula entonces el campo es conservativo. Queremos ahora expresar la ecuación (2.32) en forma local. Para este fin, tenemos que introducir el concepto de rotor de un campo vectorial, campo que llamamos \vec{E} (aún si las consideraciones se aplican a cualquier campo vectorial). Empecemos considerando un camino rectangular infinitesimal $d\Gamma_x = ABCD$ que yace en el plano $y-z$ y tiene lados de largos $AB = dy$ y $BC = dz$, paralelos con respecto a los ejes; el sentido de camino (el sentido de la integral) está mostrado en la figura 2.6 y es antihorario con respecto al eje x (regla de la mano derecha); la área vale $d\Sigma_x = dydz$.

Calculamos ahora la integral de línea de \vec{E} en este camino

$$d\Gamma_x = \vec{E}(AB) \cdot \vec{AB} + \vec{E}(BC) \cdot \vec{BC} + \vec{E}(CD) \cdot \vec{CD} + \vec{E}(DA) \cdot \vec{DA}$$

donde $\vec{E}(AB)$ es el valor del campo en el lado AB , de igual manera para los otros caminos; observamos que $\vec{CD} = -\vec{AB}$ y $\vec{DA} = -\vec{BC}$, por lo tanto:

$$d\Gamma_x = [\vec{E}(AB) - \vec{E}(CD)] \cdot \vec{AB} + [\vec{E}(BC) - \vec{E}(DA)] \cdot \vec{BC}$$

expresando los lados como $\vec{AB} = dy\hat{u}_y$ y $\vec{BC} = dz\hat{u}_z$ y, desarrollando el producto escalar, tenemos

$$d\Gamma_x = [E_y(AB) - E_y(CD)] dy + [E_z(BC) - E_z(DA)] dz.$$

Como los lados son paralelos a los ejes, estos toman coordenadas $AB = z$, $CD = z + dz$ y $BC = y + dy$, $DA = y$, por lo tanto, la expresión anterior se escribe como:

$$d\Gamma_x = [E_y(z) - E_y(z + dz)] dy + [E_z(y + dy) - E_z(y)] dz.$$

Las diferencias entre paréntesis se pueden expresar como desarrollo en Taylor

$$E_y(z + dz) = E_y(z) + \frac{\partial E_y}{\partial z} dz, \quad E_z(y + dy) = E_z(y) + \frac{\partial E_z}{\partial y} dy.$$

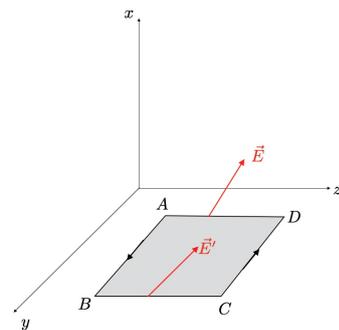


Figure 2.6: Rotor de \vec{E} .

Por lo tanto

$$d\Gamma_x = \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) dydz = \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) d\Sigma_x.$$

Las mismas consideraciones se harán para otro rectángulo en el plano $x-z$ de área $d\Sigma_y$ y, para otro rectángulo en el plano $x-y$ de área $d\Sigma_z$; obteniendo:

$$d\Gamma_y = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) d\Sigma_y,$$

$$d\Gamma_z = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) d\Sigma_z.$$

Cada una de las expresiones $d\Gamma_i (i = x, y, z)$ ha sido derivada para un rectángulo infinitesimal que encierra un punto en el que calculamos las derivadas de las componentes del campo.

Observamos que el resultado es diferente según el plano de coordenadas elegido, pero que no depende realmente de la forma del contorno de la superficie $d\Sigma$, ya sea rectangular o genérica.

Consideremos ahora un punto en el espacio y una superficie infinitesimal $d\Sigma$ a su alrededor, a la que asociamos el vector $d\Sigma \hat{u}_n$, con módulo $d\Sigma$, dirección ortogonal a $d\Sigma$ y sentido conectado al sentido de desplazamiento del contorno de $d\Sigma$. En coordenadas cartesianas

$$d\Sigma \hat{u}_n = d\Sigma_x \hat{u}_x + d\Sigma_y \hat{u}_y + d\Sigma_z \hat{u}_z \quad (2.33)$$

donde $d\Sigma_x$, $d\Sigma_y$, $d\Sigma_z$ son las proyecciones sobre los planos (y, z) , (x, z) , (x, y) de $d\Sigma$.

La circulación $d\Gamma$ del vector \vec{E} a lo largo del contorno de $d\Sigma$ es igual a la suma de los circuitos $d\Gamma_x$, $d\Gamma_y$, $d\Gamma_z$ a lo largo de los contornos de las superficies proyectadas. Esto se deduce de la propiedad general de que, dada una línea cerrada y construida una red de circuitos cerrados en cualquier superficie que tenga la línea como contorno, la circulación Γ a lo largo de ésta es la suma de las circuitaciones Γ_i a lo largo de la malla de la red, todas orientadas según la misma convención. De hecho, como queda claro en la figura 2.7, la contribución de cualquier tramo que no esté en la línea es nula, porque este tramo se recorre una vez en una dirección y otra en la dirección opuesta. Aplicamos el resultado a la superficie $d\Sigma$ y a sus proyecciones $d\Sigma_x$, $d\Sigma_y$, $d\Sigma_z$ con las cuales podemos construir una superficie que tenga el mismo contorno que $d\Sigma$; la construcción se muestra en la figura 2.8 para un caso especial sencillo, que es generalizable.

Por lo tanto, dada una superficie $d\Sigma$ en el espacio, alrededor de un punto donde existe un \vec{E} con componentes E_x , E_y y E_z , la circulación de \vec{E} en $d\Sigma$ será:

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) d\Sigma_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) d\Sigma_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) d\Sigma_z;$$

siendo $d\Gamma$ una cantidad escalar y (E_x, E_y, E_z) las componentes de un vector, los terminos entre paréntesis tienen que ser también componentes de un vector.

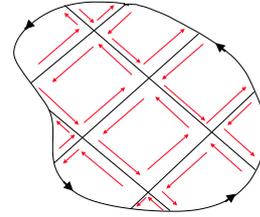


Figure 2.7: Circulación para un recorrido cualquiera.

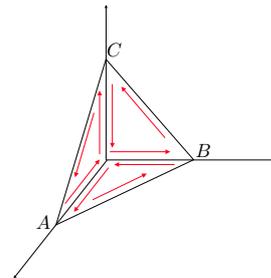


Figure 2.8: Suma de la circulación.

Este vector se llama *rotor* de \vec{E} y se define como el producto cruz del operador nabla con el vector \vec{E} :

$$\mathbf{rot} \vec{E} = \nabla \wedge \vec{E}.$$

Desde la última tenemos la igualdad:

$$d\Gamma = (\nabla \wedge \vec{E}) \cdot d\Sigma \hat{u}_n \quad (2.34)$$

o sea, proyectando el rotor en la dirección de \hat{u}_n , tenemos:

$$d\Gamma = (\nabla \wedge \vec{E})_n d\Sigma, \quad \frac{d\Gamma}{d\Sigma} = (\nabla \wedge \vec{E})_n. \quad (2.35)$$

Por lo tanto, según la ecuación (2.34), la siguiente definición:

Definición 2.5.1 la circulación de \vec{E} a lo largo de un camino cerrado infinitesimal donde se apoya una superficie $d\Sigma$, está dada por el flujo del rotor de \vec{E} a través de $d\Sigma$.

La formula (2.35) afirma que la componente del rotor de \vec{E} según la dirección está dada por la razón entre la circulación de \vec{E} a lo largo del contorno de una superficie infinitesimal ortogonal a la dirección y la superficie misma. Finalmente podemos decir que la circulación a lo largo de una línea cerrada C es la suma de infinitas contribuciones infinitesimales (2.34) calculadas a lo largo de caminos cerrados apoyados sobre una superficie cualquiera Σ que tiene C como contorno:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \nabla \wedge \vec{E} \cdot d\Sigma \hat{u}_n. \quad (2.36)$$

El resultado constituye el *teorema de Stokes*:

Theorem 2.5.1 Teorema de Stokes: la circulación de un campo vectorial a lo largo de una línea cerrada C es igual al flujo del rotor del campo a través una cualquier superficie Σ que tiene C como contorno.

Si el campo es conservativo entonces la circulación es nula y por lo tanto es nulo el rotor:

$$\nabla \wedge \vec{E} = 0. \quad (2.37)$$

La ecuación (2.37) es la forma local de circulación nula: un campo conservativo posee rotor nulo, o como se dice, es irrotacional. Formalmente el resultado es inmediato ya que hemos visto que $\vec{E} = -\nabla V$, la cual implica

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\nabla \wedge \nabla V = 0 \quad (2.38)$$

porque el producto vectorial de dos vectores paralelos es siempre nulo.

Alternativamente podríamos expresar las componentes del rotor del campo eléctrico como derivadas del potencial y obtener

$$-\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) \hat{u}_x + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \right) \hat{u}_y + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) \hat{u}_z$$

y los términos en paréntesis son nulos por la propiedad de las derivadas segundas mixtas de ser independientes del orden de derivación.

2.6 El dipolo eléctrico

Dos cargas puntuales $-q$ y q con una distancia de separación a constituyen un *dipolo eléctrico*. Se llama momento de dipolo al vector:

$$\vec{p} = q\vec{a} \quad (2.39)$$

con \vec{a} orientado desde la carga negativa hacia la carga positiva, véase figura 2.9.

El potencial generado por el dipolo eléctrico se calcula utilizando la fórmula

$$V(x, y, z) = \int_P \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_i \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r_i} \quad (2.40)$$

i.e. el potencial electrostático generado por un sistema de cargas. Por lo tanto, por el dipolo tendremos:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right). \quad (2.41)$$

Si el punto P se encuentra muy distante del dipolo, i.e. $r \gg a$, podemos asumir:

$$r_2 - r_1 = a \cos \theta, \quad r_1 r_2 = r^2 \quad (2.42)$$

por lo que la (2.41) se escribe como:

$$V(P) = \frac{q a \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (2.43)$$

siendo \hat{u}_r el versor de la dirección OP .

Examinemos ahora la estructura del potencial en la ecuación (2.43). La única cantidad característica del dipolo es el momento \vec{p} y no q ni a separadamente; esto quiere decir que, desde las medidas del potencial, podemos obtener informaciones sobre \vec{p} y no sobre la estructura del sistema. Por ejemplo, dos cargas $+2q$ y $-2q$ separadas por una distancia $a/2$ tendrán el mismo momento de dipolo $p = 2qa/2 = qa$ y por lo tanto generarán el mismo potencial que en la expresión (2.43).

El valor del potencial disminuye con el cuadrado de la distancia ($1/r^2$), es decir, más rápidamente que el potencial generado por una sola carga puntual; cualitativamente, esto se debe a que los efectos de las dos cargas de signo contrario se neutralizan parcialmente (el efecto sería nulo si las dos cargas pudieran coincidir). En el caso más sencillo, nos encontramos con un resultado que ya hemos encontrado en los distintos cálculos de potencial que hemos realizado: cuando se suman las contribuciones de varias cargas puntuales, obtenemos una dependencia funcional de $V(r)$ que es diferente a $1/r$ característica de cada contribución individual. Geométricamente, la elección de las coordenadas polares es evidente: el potencial depende de la distancia y el ángulo entre \hat{u}_r y el eje del dipolo. Por lo tanto, tiene simetría cilíndrica con respecto a ese eje: \vec{p} y \hat{u}_r identifican un plano en el que V viene dado por la ecuación (2.43) y el resultado es el mismo en cualquier otro plano que contenga el eje del dipolo, es decir, que se obtiene a partir del primero mediante una rotación alrededor del eje del dipolo. Analíticamente, la propiedad se hace evidente por el hecho de que el potencial no depende de la tercera coordenada polar ϕ .

Podemos calcular las componentes del campo eléctrico en coordenadas esféricas como:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico está en el plano $\{\vec{p}, \hat{u}_r\}$. Vectorialmente tendremos:

$$\vec{E} = E_r \hat{u}_r + E_\theta \hat{u}_\theta = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta) \quad (2.44)$$

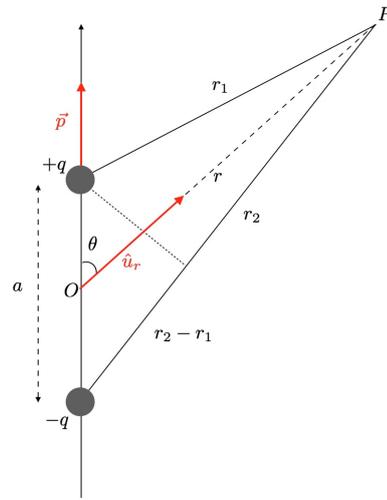


Figure 2.9: Dipolo eléctrico.

y el modulo vale

$$E = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1},$$

mientras que el ángulo α con respecto a \hat{u}_r es tal que

$$\tan \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan \theta.$$

Desde la expresión (2.44) vemos que el campo eléctrico decrece con el cubo de la distancia, de acuerdo con la ley $1/r^2$ del potencial.

Además, podemos expresar el momento de dipolo en coordenadas polares como:

$$\vec{p} = p \cos \theta \hat{u}_r - p \sin \theta \hat{u}_\theta \quad (2.45)$$

e insertando esta en la ecuación (2.44) encontramos

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} (3p \cos \theta \hat{u}_r - \vec{p}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{u}_r) \hat{u}_r - \vec{p}]. \quad (2.46)$$

Esta expresión muestra una descomposición del campo eléctrico como suma de dos términos

$$\vec{E}_1 = \frac{-\vec{p}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \quad (2.47)$$

siempre antiparalelo a \vec{p} y variable con la distancia, y

$$\vec{E}_2 = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{u}_r) \hat{u}_r}{4\pi \epsilon_0 r^3} \quad (2.48)$$

paralelo a \hat{u}_r y, por lo tanto, dependiente del ángulo θ entre \vec{p} y \hat{u}_r , véase figura 2.10.

¿Cómo serán las líneas de fuerza del campo eléctrico? Podemos estudiar dos casos limites:

1.) En el eje del dipolo, el campo es paralelo y concorde con \vec{p} , por lo tanto, el campo eléctrico será

$$\vec{E} = \frac{2\vec{p}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \quad \text{en el eje del dipolo}$$

y se obtiene poniendo $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ ($E_\theta = 0$).

2.) En el plano mediano, o sea, el plano que pasa por el centro del dipolo y es ortogonal a \vec{p} , el campo será paralelo y discorde a \vec{p} ,

$$\vec{E} = \frac{-\vec{p}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \quad \text{en el plano mediano}$$

y se obtiene poniendo $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$ ($E_r = 0$).

En todas las otras situaciones geométricas el campo no es nunca paralelo a \vec{p} .

Las líneas de fuerza se representan en la figura 2.12 en cualquier plano que pase por el eje del dipolo; la representación en el espacio se obtiene girando la figura alrededor del eje del dipolo. La aproximación de dipolo ($r \gg a$), en base a la cual derivamos el potencial y el campo eléctrico, se utiliza a menudo en física. A escala macroscópica, se aplica, por ejemplo, a una antena que emite ondas electromagnéticas, aunque no se trata de un sistema

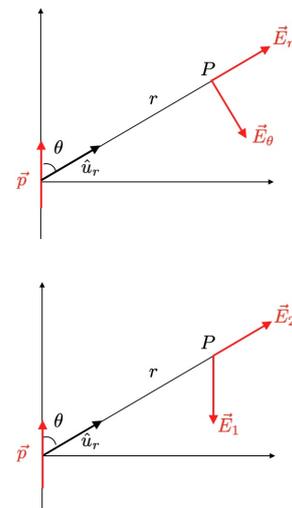


Figure 2.10: Componentes del campo eléctrico de un dipolo.

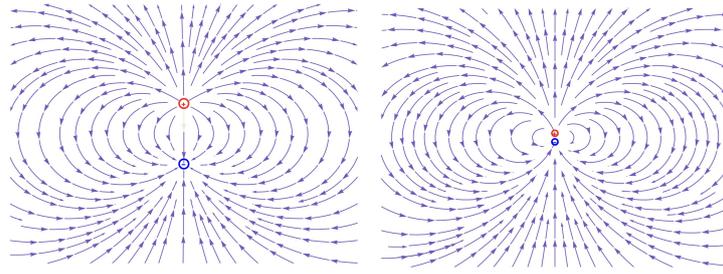


Figure 2.11: Campo eléctrico por un dipolo finito (izquierda) y un dipolo de tipo puntual (derecha).

estático, sino que oscilante, ya que las cargas se mantienen en movimiento a lo largo de la antena con un movimiento periódico. Muy importantes son los dipolos atómicos y moleculares: como veremos en los materiales dieléctricos, un átomo sometido a un campo eléctrico externo se deforma y adquiere un momento de dipolo (se polariza); también hay moléculas que tienen una estructura eléctrica asimilable a un dipolo (moléculas polares) incluso en ausencia de campos externos. En la sección 2.6.1, trataremos las interacciones eléctricas entre dipolos; por ahora, diremos que la aproximación del dipolo es apropiada porque la separación entre las cargas es pequeña comparada con las distancias interatómicas e intermoleculares.

Ejercicio 2.6 Expresar el potencial y el campo del dipolo en coordenadas cartesianas.

Solución: Tomemos el eje z como el eje del dipolo, con \hat{u}_z concorde a \vec{p} ; los ejes x y z están en el plano mediano, el origen coincide con el centro del dipolo. Bajo estas hipótesis

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

El potencial es

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

y el campo eléctrico se calcula con $\vec{E} = -\nabla V$, o sea

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5}, \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5}, \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Se verifica de inmediato que

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{\frac{3z^2}{r^2} + 1} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (2.49)$$

como encontrado inicialmente. En coordenadas cartesianas las propiedades de simetría son menos evidentes. ■

2.6.1 Fuerza sobre un dipolo eléctrico

Consideramos ahora un dipolo formado por una carga $-q$ puesta en el punto $P_1(x, y, z)$ y por otra carga $+q$ puesta en el punto $P_2(x + a_x, y + a_y, z + a_z)$; el vector $\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z$ une los puntos P_1 y P_2 , y el momento de dipolo es $\vec{p} = q\vec{a}$, véase figura 2.12.

Si el dipolo se encuentra en una región con un campo eléctrico, su energía potencial electrostática será

$$U_e = qV(x + a_x, y + a_y, z + a_z) - qV(x, y, z). \quad (2.50)$$

Supongamos ahora que la distancia a sea muy pequeña, así podemos escribir:

$$V(x + a_x, y + a_y, z + a_z) = V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z \quad (2.51)$$

en este caso la energía electrostática del dipolo es

$$U_e = q \frac{\partial V}{\partial x} a_x + q \frac{\partial V}{\partial y} a_y + q \frac{\partial V}{\partial z} a_z = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p \cos \theta E \quad (2.52)$$

recordando que el campo es el opuesto del gradiente del potencial, $\vec{E} = -\nabla V$.

Si el campo es uniforme, las fuerzas sobre las cargas $\vec{F}_1 = -q\vec{E}$ y $\vec{F}_2 = q\vec{E}$ constituyen un par de fuerzas y, por lo tanto, tienen resultante nula, pero su torque es distinto de zero. El dipolo se quedará parado en su posición de equilibrio estable, correspondiente al mínimo de la energía potencial, y con el momento de dipolo \vec{p} paralelo y concorde a \vec{E} .

Si rodeamos el dipolo de un ángulo θ con respecto a su posición de equilibrio estable, este será sujeto a un momento de las fuerzas (torque) \vec{M} que lo obliga a volver a su posición de equilibrio $\theta = 0$. Este momento, calculado con respecto al centro del dipolo (pero sabemos que el momento de una pareja de fuerzas no depende del polo), es

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge q\vec{E} = q\vec{a} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

por lo tanto, el momento de la fuerza aplicado al dipolo será:

$$\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}.$$

Desde la figura 2.13, se nota que $\vec{M} = -p \sin \theta E \hat{u}_z$, o sea,

$$M = -pE \sin \theta = -\frac{dU_e}{d\theta}.$$

Notemos que en la ecuación precedente no se ha usado el símbolo de derivada parcial, ya que la energía depende solamente del ángulo, cuando el campo eléctrico es uniforme.

Si el campo eléctrico no es uniforme, junto al torque \vec{M} , que tiende \vec{p} a alinearse con \vec{E} , existe una resultante de las fuerzas no nula, esto porque las fuerzas \vec{F} sobre las cargas ahora son distintas ya que el campo toma valores distintos en distintos puntos. Estas fuerzas se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= -q\vec{E}, \\ \vec{F}_2 &= q\left(\vec{E} + \Delta\vec{E}\right) = q\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} a_x + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} a_y + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} a_z\right) \end{aligned}$$

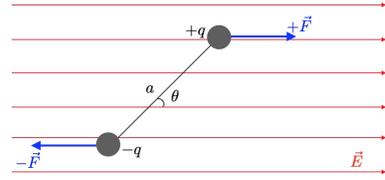


Figure 2.12: Dipolo en un campo eléctrico.

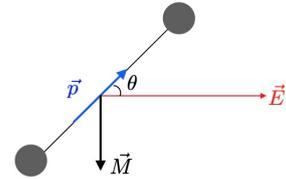


Figure 2.13: Torque de la fuerzas agente sobre un dipolo (se note que \vec{M} es ortogonal al plano formado por \vec{p} y \vec{E}).

donde hemos utilizado el teorema del diferencial total por una grandeza vectorial (estructuralmente idéntica a aquella escalar). La fuerza resultante es

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q \frac{\partial E}{\partial x} a_x + q \frac{\partial E}{\partial y} a_y + q \frac{\partial E}{\partial z} a_z$$

o sea

$$\vec{F} = p_x \frac{\partial E}{\partial x} + p_y \frac{\partial E}{\partial y} + p_z \frac{\partial E}{\partial z}. \quad (2.53)$$

Las componentes de la fuerza en coordenadas cartesianas son

$$\begin{aligned} \vec{F}_x &= p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \vec{F}_y &= p_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \vec{F}_z &= p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

En forma compacta

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$$

donde el operador $\vec{p} \cdot \nabla$ se aplica al vector \vec{E} .

La ecuación (2.53) es la expresión más general de la fuerza que actúa sobre un dipolo, válida también para campos eléctricos no conservativos. En un campo electrostático también tiene que ser:

$$\vec{F} = -\nabla U_e = -\nabla (-\vec{p} \cdot \vec{E}) = \nabla (\vec{p} \cdot \vec{E}) = \nabla (p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z) \quad (2.55)$$

y sus componentes son:

$$\begin{aligned} \vec{F}_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{p} \cdot \vec{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \vec{F}_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\vec{p} \cdot \vec{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \vec{F}_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\vec{p} \cdot \vec{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Estas últimas expresiones son iguales a las (2.54) si el campo es conservativo, donde podemos aplicar las condiciones $\nabla \wedge \vec{E} = 0$, o sea, la circulación de un campo conservativo es zero (en cualquier línea cerrada C).

Ejercicio 2.7 Un dipolo de momento \vec{p} está en un campo eléctrico generado por una carga puntual positiva q_0 . Se considere el dipolo puesto en el punto P del eje y y con el momento paralelo a \vec{E} y ortogonal a \vec{E} .

Solución: El problema es un problema en el plano: si el dipolo tiene el momento \vec{p} en el plano $y-z$, las fuerzas están en este plano. El campo eléctrico generado por la carga q_0 es

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad E_z = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.57)$$

Las derivadas son

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2y^2 + z^2)}{(y^2 + z^2)^{5/2}}, & \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-3yz)}{(y^2 + z^2)^{5/2}} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial E_z}{\partial y} &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-3yz)}{(y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, & \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2z^2 + y^2)}{(y^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

Si el dipolo en el punto $P(y = r, z = 0)$ posee el momento paralelo y concorde con el campo, o sea $p_x = 0, p_y = p, p_z = 0$, se encuentra

$$F_x = 0, \quad F_y = -\frac{2pq_0y^2}{4\pi\epsilon_0r^5}, \quad F_z = 0 \quad \implies \quad \vec{F}_1 = -\frac{2pq_0}{4\pi\epsilon_0r^3} \hat{u}_y$$

la fuerza es atractiva, el dipolo se desplaza hacia el origen. Si, en vez, el dipolo es discordante al campo $p_y = -p$, entonces la fuerza es igual en módulo pero es repulsiva.

Cuando el dipolo es ortogonal a \vec{E} y concorde al eje z , $p_x = p_y = 0, p_z = p$, se encuentra

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = \frac{pq_0y^2}{4\pi\epsilon_0r^5} \quad \implies \quad \vec{F}_2 = -\frac{pq_0}{4\pi\epsilon_0r^3} \hat{u}_z$$

la fuerza es paralela y concorde al eje z , o sea a \vec{p} . Si se da la vuelta a \vec{p} , la fuerza sigue concorde a \vec{p} . ■

En el ejemplo recién descrito hay algunos hechos que es interesante poner en evidencia. Cuando el momento \vec{p} es paralelo al campo \vec{E} la fuerza se puede escribir como

$$\vec{F} = -\frac{2pq_0}{4\pi\epsilon_0r^3} \hat{u}_y = p \left(-\frac{2q_0}{4\pi\epsilon_0r^3} \right) \hat{u}_y = p \frac{dE}{dr} \hat{u}_y = p \nabla E.$$

Este resultado es verdadero en general; si \vec{p} es paralelo a \vec{E} la fuerza es

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \nabla(pE) = p \nabla E$$

y es paralelo al gradiente del módulo del campo. Esto significa que el dipolo tiende a moverse hacia los puntos donde el campo es más intenso si el momento \vec{p} es concorde al campo, mientras que tiende a alejarse de él si \vec{p} es discordante al campo; esta situación es frecuente porque un dipolo tiende a alinearse espontáneamente con el campo. Cuando, por lo contrario, el momento de dipolo no es paralelo al campo, las cargas de dipolo también sondan la estructura del campo transversal a las líneas de fuerza y la fórmula de la fuerza es más compleja.

Interacción entre dipolos

Dos dipolos de momentos eléctricos p_1 y p_2 , situados a una distancia r entre sí, interactúan al estar cada uno sometido al campo del otro. Queremos calcular la energía electrostática del sistema de dos dipolos y la fuerza en algunas situaciones geoméricamente simples.

Tomemos las fórmulas del campo de un dipolo dada por la ecuación (2.46) y de la energía de un dipolo en un campo eléctrico dada por la ecuación (2.52): tenemos para la energía del segundo dipolo en el campo del primero

$$U_{e,2} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \hat{u}_r)(\vec{p}_2 \cdot \hat{u}_r)], \quad (2.58)$$

siendo $\hat{u}_r = \hat{u}_{1,2}$ el versor de la dirección que va desde el primero hacia el segundo dipolo. Se observa que la energía potencial es simétrica con respecto al intercambio $1 \rightarrow 2$. Es decir, que

$U_{e,1} = U_{e,2}$ como debe ser ya que se trata de una interacción mutua. La energía es inversamente proporcional a r^3 , por lo que la fuerza es inversamente proporcional a r^4 : la interacción disminuye muy rápidamente con la distancia.

Si los dipolos están en el mismo plano, la energía será

$$U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [p_1 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3p_1 p_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2] = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2).$$

donde θ_1 y θ_2 son claramente los ángulos formados por los vectores $\vec{p}_1 - \hat{u}_r$ y $\vec{p}_2 - \hat{u}_r$.

Si los momentos de los dos dipolos son concordados, o sea pasan por dos rectas paralelas distantes r , entonces

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1 p_2, \quad \vec{p}_1 \cdot \hat{u}_r = \vec{p}_2 \cdot \hat{u}_r = 0 \quad \implies \quad U_e = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

La fuerza sobre el segundo dipolo es

$$\vec{F}_2 = -\nabla U_e = -\frac{\partial U_e}{\partial r} \hat{u}_r = \frac{3p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4} \hat{u}_r,$$

o sea repulsiva; se verifica que $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Si los momentos son discordados la energía cambia de signo y la fuerza es atractiva.

Supongamos, ahora, que los dipolos tengan momentos paralelos y concordados en sus ejes, entonces

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1 p_2, \quad \vec{p}_1 \cdot \hat{u}_r = p_1, \quad \vec{p}_2 \cdot \hat{u}_r = p_2 \quad \implies \quad U_e = \frac{-2p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

La fuerza es atractiva y vale

$$\vec{F} = \frac{-6p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4} \hat{u}_r.$$

Si los dipolos están discordados la energía y la fuerza cambian de signo.

Unidades 2.6.1 El momento de dipolo eléctrico tienen unidad de medida Cm. Los dipolos elementales, intrínsecos o inducidos, poseen valores de 10^{-30} Cm para los primeros y 10^{-33} Cm para los segundos.

2.6.2 Potencial de un sistema de cargas en la aproximación de dipolo

Los cálculos del potencial generado por un dipolo se pueden generalizar para obtener el potencial generado por un sistema de cargas (técnicamente estamos hablando de *Potencial de un sistema de cargas en la aproximación de dipolo*).

Consideremos ahora un sistema de cargas q_i distribuidas en una región de dimensión máxima d : podría tratarse de las cargas negativas y positivas en un átomo o en una molécula. Si llamemos O a un punto en el interior de la región, calculamos ahora el potencial en un punto P a una distancia r desde O con $r \gg d$. Si r_i es la distancia de q_i desde P , entonces el potencial será

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}. \quad (2.59)$$

Definamos ahora \vec{d}_i como el vector que une O a la carga q_i , por lo tanto, $\vec{d}_i + \vec{r}_i = \vec{r}$ y, si $r \gg d$, podemos escribir $d_i \cos \theta_i + r_i = r$, o sea

$$r_i = r - d_i \cos \theta_i = r - \vec{d}_i \cdot \hat{u}_r, \quad (2.60)$$

donde \hat{u}_r es el versor de la dirección OP. Por lo tanto

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r - \vec{d}_i \cdot \hat{u}_r} = \frac{r + \vec{d}_i \cdot \hat{u}_r}{r^2 - (\vec{d}_i \cdot \hat{u}_r)^2} = \frac{r + \vec{d}_i \cdot \hat{u}_r}{r^2} \quad (2.61)$$

si admitimos que podemos despreciar d_i^2 con respecto a r^2 . El potencial en el punto P será

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_i q_i (r + \vec{d}_i \cdot \hat{u}_i)}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{(\sum_i q_i \vec{d}_i) \cdot \hat{u}_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.62)$$

donde $Q = \sum_i q_i$ es la carga total del sistema y $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{d}_i$ se llama momento de dipolo eléctrico del sistema con respecto al punto O dentro del sistema. El potencial producido por un sistema de cargas en el punto P es:

$$V(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_0 + V_{\text{dip}} \quad (2.63)$$

Analizamos ahora la ecuación (2.63). El término V_0 representa el potencial generado por un sistema de cargas, que es igual a la carga total, y se llama término de *monopolo*; el término V_{dip} se llama término de dipolo. Tenemos dos casos:

1. Si $Q \neq 0$, entonces $V_0 \gg V_{\text{dip}}$; de hecho, si escribimos

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{d}_i = Q \vec{d} \quad (2.64)$$

donde hemos asumido que $d_i \simeq d$, y se tiene que:

$$\frac{V_{\text{dip}}}{V_0} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{u}_r}{Qr} \simeq \frac{Qd}{Qr} = \frac{d}{r} \ll 1 \quad (2.65)$$

2. Si $Q = 0$, el término de monopolo es nulo y el potencial en P está dado por V_{dip} . Cuando el término $\vec{p} = 0$ la expresión (2.63) no es suficiente para calcular el potencial y estamos obligados a introducir otros términos, que derivan directamente del desarrollo en serie de la función $1/r_i$. Los primeros dos términos son V_0 y V_{dip} , los siguientes se llaman términos de multipolo (cuadripolo, octupolo, ..., 2^n -polo); la dependencia de la distancia es $1/r^{n+1}$. Cada término es despreciable en comparación con el anterior, pero, si esto es nulo, entonces necesitamos ir al término siguiente. Por lo tanto, un sistema neutro puede tener una interacción eléctrica, que es tanto menor cuando mayor es el grado de simetría.

¿El potencial de dipolo depende del punto O que elegimos? Consideremos otro punto O' , vale la relación

$$\begin{aligned} \vec{d}_i &= \vec{OP}_i = \vec{OO}' + \vec{O}'P_i = \vec{OO}' + \vec{d}'_i, \rightarrow \\ \vec{p} &= \sum_i q_i \vec{d}_i = \sum_i q_i \vec{OO}' + \sum_i q_i \vec{d}'_i = Q \vec{OO}' + \vec{p}' \end{aligned} \quad (2.66)$$

El momento referido a O' es distinto al referido a O . Por lo tanto, el momento de dipolo depende del punto O que se elige, lo cual no sería apropiado para una cantidad que tenga significado físico. Si el sistema es neutro $Q = 0$, el término del dipolo es nulo y el potencial es

$$V = \frac{\vec{p}' \cdot \hat{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.67)$$

con \vec{p}' una *propiedad intrínseca, característica del sistema*, independiente de O : se tiene que elegir un punto para calcular \vec{p}' , pero el resultado es invariante.

3. Ley de Gauss

El campo electroestático de una carga puntual es un campo central y, porque tal, es conservativo. Para una distribución de carga discreta o continua no se puede hablar en general de campo radial; pero es siempre conservativo como resultado de la aplicación del principio de superposición en el cálculo del trabajo, que es independiente del camino en particular.

La propiedad de ser conservativo no es una característica específica de un campo radial que depende de la distancia como r^{-2} , pero vale para cualquier campo del tipo $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$, radial y con módulo dependiente sólo de la distancia, o sea, central. Como por ejemplo, el campo

$$\vec{E} = \frac{C}{r^n} \hat{u}_r$$

con $n \neq 1$, es el gradiente de la función potencial calculada por

$$V(r) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{C}{(n-1)r^{n-1}}.$$

En este capítulo, obtendremos una ley que vale solamente si la dependencia del campo de la distancia es del tipo r^{-2} .

3.1 Flujo del campo eléctrico. Ley de Gauss.

Consideramos una superficie $d\Sigma$ sumergida en una región en la cual actúa un campo eléctrico \vec{E} y orientado fijando el sentido del versor normal \hat{u}_n , véase figura 3.1. Se define *flujo del campo \vec{E} a través de la superficie $d\Sigma$* a la cantidad escalar:

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = E \cos \theta d\Sigma = E_n d\Sigma. \quad (3.1)$$

El flujo a través de una superficie finita Σ , se obtiene sumando todas las contribuciones infinitesimales ecuación (3.1), o sea, integrando

$$\Phi(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma. \quad (3.2)$$

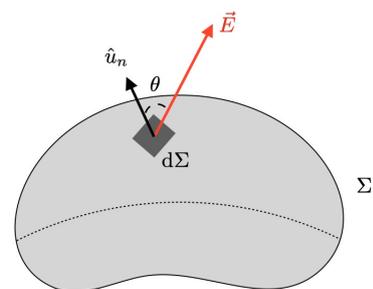


Figure 3.1: Flujo de \vec{E} a través de una superficie.

Si la superficie es cerrada, el flujo se escribe como:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma. \quad (3.3)$$

En este caso, la convención es orientar la normal a la superficie hacia fuera. Las contribuciones positivas a la integral (3.3) son aquellas donde $\vec{E} \cdot \hat{u}_n > 0$, debido a que en aquellas zonas \vec{E} está orientado hacia fuera, representando un flujo de \vec{E} saliente de la superficie. Las contribuciones negativas vienen de las zonas donde $\vec{E} \cdot \hat{u}_n < 0$, donde \vec{E} mira hacia dentro, y representa un flujo de \vec{E} entrante. Por lo tanto, la integral (3.3) proporciona el flujo neto a través de la superficie cerrada; si es nulo quiere decir que el flujo que entra es igual al flujo que sale.

La definición de flujo se aplica a cualquier campo vectorial. El nombre de flujo llega desde las aplicaciones en hidrodinámica, pero tiene que quedar claro que el flujo de un campo vectorial es un concepto matemático y no se acompaña necesariamente al pasaje de materia o energía a través de una superficie.

Consideremos ahora el campo producido por una carga puntual q , el flujo a través de una superficie infinitesimal $d\Sigma$ es

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n d\Sigma}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma \cos \theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

donde \hat{u}_r es el versor de \vec{E} y \hat{u}_n es el versor normal a la superficie. La cantidad $d\Sigma_0$ es la proyección de $d\Sigma$ en el plano perpendicular a \hat{u}_r . Por definición, la cantidad $d\Sigma_0/r^2$ es el ángulo solido $d\Omega$ bajo el cual la carga ve el contorno de $d\Sigma$, por lo tanto,

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

El flujo del campo \vec{E} de una carga puntual q depende sólo del ángulo solido y no de la superficie, ni tampoco de su distancia desde la carga.

El flujo a través de una superficie finita es

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega. \quad (3.4)$$

Si la superficie es cerrada tendremos

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.5)$$

esto porque el ángulo solido bajo el cual se ve una superficie cerrada cualquiera, desde un punto en su interior, es siempre 4π .

Si la carga está fuera de la superficie, el campo eléctrico entra y sale de la superficie; por lo tanto, debido a la orientación de la normal, tendremos que en el caso que el campo \vec{E} entra en $d\Sigma_1$ el producto escalar $\vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 < 0$ y el otro $\vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 > 0$. Los flujos a través de los dos elementos

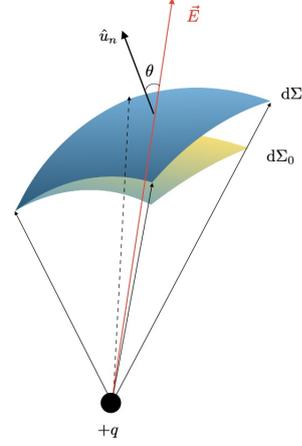


Figure 3.2: Flujo de \vec{E} generado por una carga puntual a través de una superficie.

son

$$\begin{aligned}d\Phi_1(\vec{E}) &= \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega, \\d\Phi_2(\vec{E}) &= \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2 = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = -d\Phi_1(\vec{E}), \\ \implies & d\Phi_1(\vec{E}) + d\Phi_2(\vec{E}) = 0.\end{aligned}$$

Integrando en toda la superficie

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0. \quad (3.6)$$

Las ecuaciones (3.5) y (3.6) se resumen en: *el flujo total a través de una superficie cerrada del campo de una carga puntual q es igual q/ϵ_0 si la carga está dentro la superficie y es cero si la carga está fuera.*

El resultado enunciado se extiende al caso de una distribución de cargas puntuales simplemente utilizando el principio de superposición y la propiedad aditiva de las integrales:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \oint \left(\sum_i \vec{E}_i \right) \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \sum_i \oint \vec{E}_i \cdot \hat{u}_n d\Sigma.$$

Cada integral vale q_i/ϵ_0 si la carga está dentro de la superficie (cero si está fuera). Por lo tanto:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_i q_i \right)_{\text{int}}, \quad (3.7)$$

concluamos diciendo que *el flujo total a través de una superficie Σ es igual a la suma de las cargas en el interior de la superficie partido por ϵ_0 .*

Si tenemos una distribución continua de carga, entonces el flujo del campo eléctrico creado por tal distribución a través de una superficie es

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho(x, y, z) d\tau, \quad (3.8)$$

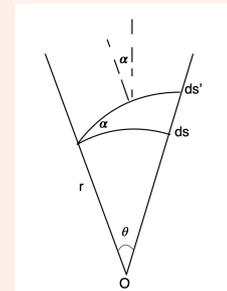
donde hemos substituido $q = \int_{\tau} \rho d\tau$. Las ecuaciones (3.7) y (3.8) constituyen el teorema de Gauss:

Definición 3.1.1 — Ley de Gauss. El flujo del campo \vec{E} a través de una superficie cerrada es igual a la suma algebraica de las cargas contenidas en la superficie, cualquier sea su distribución, partido por ϵ_0 .

Ejercicio 3.1 La noción de ángulo sólido es la extensión a tres dimensiones del concepto de ángulo plano, que reportamos rápidamente para poner en evidencia la analogía entre las dos definiciones.

El ángulo plano entre dos semirectas salientes por el punto O se mide como la razón entre la longitud s del arco de circunferencia de centro O entre las dos semirectas y el radio r de la circunferencia misma:

$$\theta = \frac{s}{r}.$$



La definición es válida también por un arco infinitesimal,

$$d\theta = \frac{ds}{r},$$

y se puede extender a un tramo ds' que forma un ángulo α con ds , o sea

$$d\theta = \frac{ds}{r} = \frac{ds' \cos \alpha}{r};$$

α es también el ángulo entre las normales a ds y ds' . Sin embargo la definición no depende de la circunferencia elegida, o sea de r .

La unidad de medida del ángulo plano es el *radián*, que corresponde al ángulo por lo cual $s = r$. Si s coincide con la longitud de la circunferencia, $2\pi r$, el ángulo correspondiente será 2π radianes, que es el máximo valor posible.

En el caso trimidimensional consideramos el ángulo sólido $d\Omega$ que está definido como: dada una superficie $d\Sigma$ y su proyección $d\Sigma_0$ ortogonal al radio que sale del punto O y pasante por $d\Sigma$ se llama ángulo sólido la cantidad

$$d\Omega = \frac{d\Sigma \cos \alpha}{r^2} = \frac{d\Sigma_0}{r^2}.$$

La superficie $d\Sigma_0$ es un elemento de la casquete esférico cuya área vale, en el sistema de coordenadas polares

$$d\Sigma_0 = (r d\theta)(r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi,$$

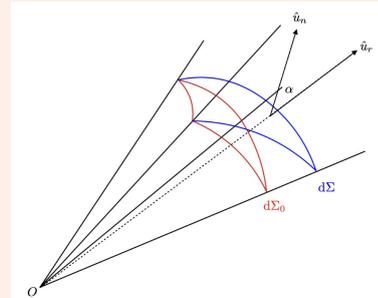
por lo tanto

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi,$$

la cual expresa el ángulo sólido bajo el cual el punto O ve la superficie $d\Sigma_0$. Si la superficie es finita, el ángulo sólido total es la integral

$$\Omega = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin \theta d\theta d\phi,$$

por una esfera $\phi \in [0, 2\pi]$ y $\theta \in [0, \pi]$, y el ángulo sólido por una esfera (o cualquier superficie cerrada que contenga el punto O) es $\Omega = 4\pi$. La unidad de medida es siempre el radián. ■



3.2 Algunas aplicaciones y consecuencias de la ley de Gauss

La ley de Gauss se vuelve un instrumento muy poderoso para determinar el campo \vec{E} en los casos donde la distribución de carga que genera el campo tiene un alto grado de simetría (esférica, cilíndrica, plana). En estas condiciones es fácil encontrar a priori el comportamiento de las líneas de fuerza y, consecutivamente, encontrar superficies cerradas en cuyos puntos el campo es paralelo u ortogonal a la superficie, por lo tanto, las contribuciones $\vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$ pueden ser nulas o pueden escribirse simplemente como $E\Sigma$. Además, si deducimos que el módulo del campo es constante en

las zonas donde \vec{E} es paralelo a \hat{u}_n , la ley de Gauss será

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = E\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0},$$

y se encuentra rápidamente el módulo del campo:

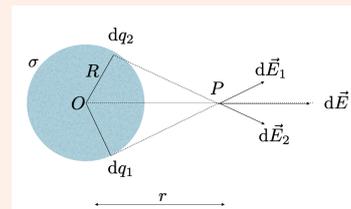
$$E = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma};$$

donde q es la carga encerrada en el interior de la superficie Σ . Resolveremos algunos problemas ya vistos anteriormente con la ley de Gauss; se verá la mayor simplicidad del método.

Ejercicio 3.2 Una carga q se distribuye con densidad superficial constante σ en una superficie esférica de radio R . Calcular el campo \vec{E} en los puntos interiores y exteriores de la superficie.

Solución: Empecemos por calcular el campo en el exterior. En el punto P distante $r > R$ del centro, \vec{E} es ciertamente radial, ya que se debe a la suma de contribuciones simétricas dos a dos, iguales en módulo, cuya resultante es radial; si no fuera así, significaría que σ no es uniforme.

En cualquier otro punto con la misma distancia de P desde el centro la situación es la misma. Esto significa que el campo tiene módulo constante en una superficie esférica de radio r , es ortogonal a ella y tiene una dirección saliente o entrante dependiendo del signo de la carga:



$$\vec{E} = E(r)\hat{u}_r,$$

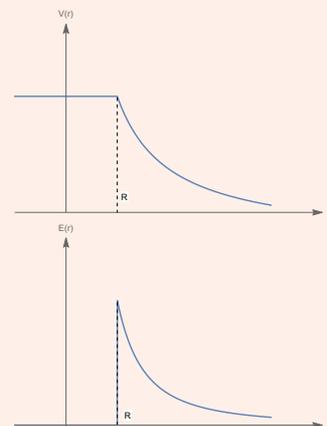
donde hemos puesto en evidencia que el módulo puede depender sólo del radio r . Aplicando la ley de Gauss por una superficie esférica Σ de radio $r > R$:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint E(r)\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n d\Sigma = E(r) \oint d\Sigma = E(r)4\pi r^2 = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

con $q = 4\pi R^2\sigma$, tendremos

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}, \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{u}_r$$

El campo fuera de una distribución superficial esférica uniforme de carga es igual al de una carga puntual de igual valor concentrada en el origen O ; a paridad de carga, el campo no depende del radio de la distribución. En el interior de la superficie esférica se aplican las mismas condiciones de simetría, de modo que el campo debe ser radial y el flujo a través de cualquier superficie esférica Σ' de radio $r < R$ debe ser $E\Sigma'$. Por otro lado no hay carga en el interior, el flujo a través de cualquier superficie Σ' cerrada es nulo y por lo tanto debe ser $E = 0$ para $r < R$: dentro de una distribución de superficie esférica uniforme el campo es nulo.



Observamos que para r que tiende a R desde el interior, el campo es siempre nulo, mientras que para r que tiende a R desde el exterior, $E \rightarrow q/(4\pi\epsilon_0 R^2) = \sigma/\epsilon_0$: el campo presenta una discontinuidad al cruzar la capa cargada. El potencial se calcula, para $r > R$, a partir del campo y es obviamente $q/(4\pi\epsilon_0 r)$; en particular, para $r = R$, $V = V_0 = q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ y éste es el valor constante en todos los puntos dentro de la superficie esférica, donde el campo es cero. La tendencia con r del campo y del potencial se muestra en las figuras a lado. ■

Ejercicio 3.3 Una carga q se distribuye con densidad espacial uniforme ρ en el volumen de una esfera de radio R . Calcular el campo electrostático en los puntos al interior y al exterior de la esfera.

Solución: El razonamiento basado en la simetría esférica utilizado en el ejemplo anterior también es válido ahora para $r \geq R$ y podemos decir inmediatamente que el campo fuera de una esfera uniformemente cargada es

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

con

$$q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

es como si la carga se concentrara en el centro de la esfera. En el interior ($r < R$) hay ahora una carga uniformemente distribuida y el campo ya no es nulo; sin embargo, el argumento de simetría que conduce a un campo radial sigue siendo válido, de modo que el flujo a través de una superficie esférica de radio r se escribe

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

donde q' es la carga contenida en el interior de la superficie Σ' :

$$q' = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = q \frac{r^3}{R^3},$$

y el campo eléctrico a distancia $r < R$ desde el centro vale

$$E = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

En conclusión, el campo crece linealmente desde el valor cero en el centro de la esfera hasta el valor $\rho r/(3\epsilon_0) = q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ en la superficie de la esfera; en el exterior, el campo disminuye con el cuadrado de la distancia desde centro. Para $r = R$ el campo es continuo. El potencial fuera de la esfera viene dado por $V = q/(4\pi\epsilon_0 r)$, y en particular es

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

en la superficie de la esfera. En el interior

$$V(r) - V(R) = \int_r^R \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

se encuentra que en el centro $V(0) = 3/2V(R)$. Hay que tener en cuenta que los valores del potencial en el centro están referidos al potencial en el borde y que éste está referido al potencial al infinito, que se supone nulo; esto es una consecuencia de la definición del potencial que fija el potencial a menos de un constante. Suponiendo que un núcleo atómico pueda asimilarse a una distribución de carga esférica continua, de valor total Ze , el campo en la superficie viene dado por

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R_n^2}$$

Suponiendo que $R_n = 10^{-15}$ m, el resultado es $E \simeq 1.5Z \cdot 10^{21}$ V/m, un valor que da una idea de los campos tan intensos que existen a nivel microscópico. Por último, observamos que la propiedad de que el campo fuera de una esfera cargada sea igual al campo producido por una carga puntual situada en el centro de la esfera sigue siendo válida aunque la densidad de carga no sea constante: basta con que ρ sea una función del tipo $\rho(r)$, es decir, a simétrica esférica. ■

Ejercicio 3.4 Una distribución espacial continua y uniforme de carga posee forma cilíndrica de radio R ; calcular el campo \vec{E} .

Solución: La simetría cilíndrica sugiere que el campo es ortogonal al eje del cilindro formado por la carga y que sea constante en cualquier superficie cilíndrica coaxial de radio r . Para aplicar la ley de Gauss, consideramos una caja cilíndrica Σ de radio $r > R$ y altura h , como en figura. El flujo de \vec{E} a través las bases de Σ es nulo en cuanto el campo es paralelo a las bases y, por lo tanto, ortogonal a \hat{u}_n . El flujo a través de la superficie lateral, que coincide con el flujo total a través de Σ es

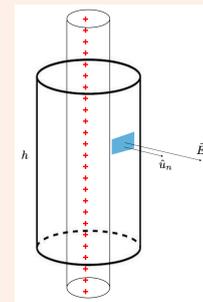
$$\Phi(\vec{E}) = \oint E \Sigma = 2\pi r h E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La carga contenida dentro de Σ es

$$q = \int \rho d\tau = \rho \pi R^2 h = \lambda h,$$

definiendo

$$\lambda = \rho \pi R^2 = \frac{q}{h},$$



o sea la carga contenida en un cilindro de radio R y altura unitaria. Y el campo eléctrico será

$$\Phi(\vec{E}) = 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \implies E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}.$$

Hemos encontrado la expresión del campo relativo a un hilo indefinido uniformemente cargado. Por lo tanto, un cilindro uniformemente cargado genera un campo igual al campo que generaría la misma carga distribuida linealmente en el eje del cilindro. En el interior del cilindro podemos seguir escribiendo

$$\Phi(\vec{E}) = 2\pi r h E = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

donde ahora q' es la carga contenida en una caja cilíndrica de radio $r' < R$ y es

$$q' = \rho \pi r^2 h = \lambda h \frac{r^2}{R^2}$$

y el campo será

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2}$$

El campo crece linealmente con r desde el eje hasta al borde, en el exterior disminuye como $1/r$. Es interesante notar, en este ejemplo como en el anterior, que la dimensión radial finita del sistema tiene como consecuencia la disminución continua del campo al interior hasta a llegar a cero en el centro de la distribución; se evita así la divergencia típica de la carga puntual o del hilo de radio nulo, que, como mencionado, no son objetos físicamente realizables en la teoría clásica del electromagnetismo.

El cálculo del potencial por la distribución cilíndrica presenta la misma dificultad porque la distribución es infinita. Pero podemos fácilmente calcular las d.d.p.. En el interior, con respecto al borde, tenemos

$$V(r) - V(R) = \int_r^R E dr = \int_r^R \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2} dr = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R^2} (R^2 - r^2)$$

y, en particular, $V(0) - V(R) = \lambda/(4\pi\epsilon_0)$.

En el exterior la d.d.p. entre dos puntos en superficies equipotenciales, las cuales son superficies cilíndricas coaxiales, es

$$V(r_1) - V(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1};$$

y con respecto al borde

$$V(r) - V(R) = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R};$$



Ejercicio 3.5 Calcular el campo \vec{E} generado por una carga distribuida con densidad superficial σ en un plano infinito.

Solución: Por razones de simetría, se deduce que el campo electrostático es ortogonal al plano donde está distribuida la carga y tiene valores opuestos en las dos caras (o sea, siempre sale o siempre entra). Como superficie para calcular la ley de Gauss elegimos un cilindro con áreas de base Σ paralelas al plano, así, el flujo a través de las dos bases es $\Phi(E) = 2E\Sigma$ mientras que el flujo a través de la superficie lateral es cero ya que el campo eléctrico es ortogonal a la normal. En el interior del cilindro tenemos una carga $q = \sigma\Sigma$ y, por lo tanto,

$$\Phi(E) = 2E\Sigma = \frac{\sigma\Sigma}{\epsilon_0} \implies E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

El campo tiene módulo constante en todo el espacio. Vectorialmente, llamamos x al eje ortogonal al plano,

$$\vec{E}(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x = \vec{E}_1, \quad \vec{E}(x < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x = \vec{E}_2$$

y podemos notar que el campo eléctrico es discontinuo en el plano y vale

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_x$$

Es fácil también calcular la d.d.p. entre dos puntos fuera del plano:

$$V(x_1) - V(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_1 - x_2).$$

resultado que depende sólo de x y muestra que las superficies equipotenciales son planos paralelos al plano cargado. ■

Nota: equilibrio en un campo electrostático

Un problema más general que se resuelve fácilmente con la ley de Gauss es el del equilibrio en un campo electrostático. Recordemos que una posición de equilibrio estable P para una carga q se define por el hecho de que para cualquier pequeño desplazamiento desde esa posición, existen fuerzas que devuelven la carga a su posición original. De consecuencia, en cualquier punto de una hipotética superficie cerrada que rodea a P la fuerza se dirige hacia P y también el campo, si la carga q es positiva. Pero entonces, por la ley de Gauss, hay un flujo que entra en la superficie y por lo tanto debe haber una carga q' negativa en el interior (y viceversa si q es negativa). Si no hay carga en P , la situación descrita no puede producirse y concluimos que una carga, colocada en un campo electrostático, no tiene una posición de equilibrio estable, excepto cerca de las fuentes o al infinito.

Por ejemplo, dadas dos cargas iguales, en el punto medio O de la conjunción el campo es cero y se puede colocar allí una carga q_0 que permanece en reposo. Si se trata de una carga del mismo signo que las fuentes, sólo para desplazamientos a lo largo de la conjunción, la carga q_0 se devuelve hacia el centro (equilibrio estable), pero para cualquier otro desplazamiento retrocede indefinidamente (equilibrio inestable). Si se trata de una carga $-q_0$ de signo contrario el equilibrio es estable sólo para desplazamientos ortogonales a la conjunción, inestable en los demás casos. Un sistema de cargas libres del mismo signo no puede permanecer unido de forma espontánea, se necesitan otras fuerzas para unir las cargas. Un núcleo atómico es estable porque entre sus componentes existe la interacción fuerte que supera la repulsión electrostática entre los protones.

Los sistemas macroscópicos con una densidad de carga volumétrica, como la esfera y el cilindro, pueden realizarse aprovechando las propiedades de los materiales aislantes, como veremos en el capítulo 5; las distribuciones de carga superficial se obtienen fácilmente cargando materiales conductores, como veremos ampliamente en el capítulo 4, o frotando materiales aislantes. Sin embargo, en ningún caso las cargas son totalmente libres.

Otro conjunto de consideraciones interesantes se refiere a aquellas situaciones en las que el flujo a través de una superficie cerrada es nulo, lo que indica que la carga total en su interior es nula. Esto no significa necesariamente que el campo en los puntos de la superficie sea nulo, sino que tiene en algunas partes una dirección saliente y en otras una entrante, de modo que los flujos entrantes y salientes son iguales y opuestos. Sólo cuando esta situación no puede realizarse debido a condiciones particulares de simetría, la nulidad del flujo conduce a la nulidad del campo. La condición $q = 0$ que lleva a $\Phi = 0$ se satisface de dos maneras: o bien no hay cargas en absoluto dentro de la superficie, o la carga, algebraicamente nula, está compuesta por una cantidad igual de carga positiva y negativa. El caso más simple de la segunda posibilidad es el dipolo eléctrico, cuyo campo E es distinto de cero en cada punto, pero tiene flujo cero a través de cualquier superficie que encierre enteramente el dipolo. Un campo vectorial cuyo flujo a través de una superficie cerrada es nulo, se define como campo *solenoidal*.

3.3 Campo \vec{E} en el entorno de una capa superficial de carga

Las ecuaciones integrales que caracterizan el campo \vec{E}

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.9)$$

permiten deducir el comportamiento del campo al cruzar una superficie donde existe una carga.

Esta situación de carga superficial es muy común en la práctica y ocurre con materiales conductores y también con dieléctricos. En ambos casos, el espesor de la distribución de carga es despreciable y se puede hablar correctamente de densidad superficial.

Consideremos una superficie Σ donde está distribuida uniformemente una carga positiva con densidad σ . Consideremos una línea cerrada infinitesimal $ABCD$: los lados $\vec{AB} = d\vec{s}_1$ y $\vec{CD} = d\vec{s}_2$, los cuales yacen en los lados opuestos a la superficie, son paralelos a la superficie e igual en módulo; los lados \vec{BC} y \vec{DA} , ortogonales a la superficie, son infinitesimales de orden superior con respecto a los otros dos.

Llamemos \vec{E}_1, \vec{E}_2 los valores del campo en los lados \vec{AB} y \vec{CD} y E_{1t}, E_{2t} las componentes tangenciales, o sea, las proyecciones de \vec{E}_1, \vec{E}_2 en las direcciones \vec{AB} y \vec{CD} , paralela a la superficie, véase figura 3.3. Usando que el campo es conservativo, la circuitación en un camino cerrado es nula

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = E_{1t} ds_1 + E_{2t} ds_2 = (E_{1t} - E_{2t}) ds = 0$$

desde la cual obtenemos

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (3.10)$$

La componente tangencial del campo \vec{E} es continua cuando se cruza una superficie de distribución superficial de carga.

Consideremos un punto de Σ y un entorno de área $d\Sigma$ y sea \hat{u}_n la normal a la superficie. Construyamos ahora un cilindro con áreas de base $d\Sigma_1$ y $d\Sigma_2$, iguales en valor a $d\Sigma$ y paralelas

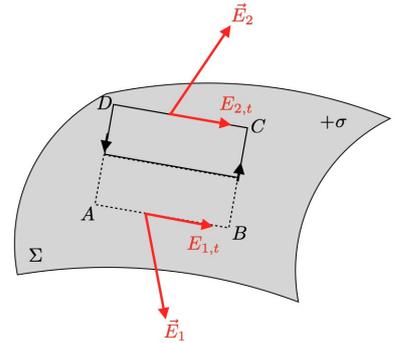


Figure 3.3: Discontinuidad de la componente tangencial del campo \vec{E} .

a esta, y con altura tal que la superficie lateral sea infinitesimal de orden superior a $d\Sigma$, véase figura 3.4. La carga contenida en la caja cilíndrica $\sigma d\Sigma$ es, por la ley de Gauss:

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{u}_1 d\Sigma_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{u}_2 d\Sigma_2 = -\vec{E}_1 \cdot \hat{u}_n d\Sigma + \vec{E}_2 \cdot \hat{u}_n d\Sigma = (E_{2n} - E_{1n}) d\Sigma = \frac{\sigma d\Sigma}{\epsilon_0},$$

donde E_{1n} y E_{2n} son la componentes normales a la superficie, o sea, las proyecciones en \hat{u}_n . Tenemos por lo tanto:

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.11)$$

Al cruzar la superficie la componente normal del campo \vec{E} tiene una discontinuidad igual a σ/ϵ_0 .

Las ecuaciones (3.10) y (3.11) se pueden escribir en forma vectorial como:

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n. \quad (3.12)$$

La relación (3.12) vale localmente, o sea, en cada punto de la superficie; no es necesario que σ sea constante ni que la superficie sea plana.

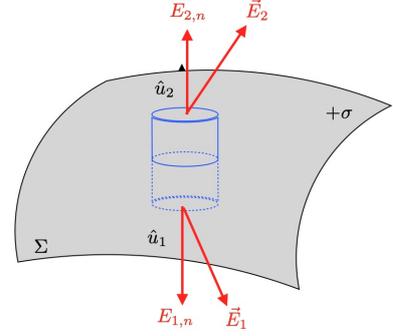


Figure 3.4: Discontinuidad de la componente ortogonal del campo \vec{E} .

3.4 Ley de Gauss en forma diferencial

La ley de Gauss es una ley integral que une el flujo del campo \vec{E} a través de una superficie cerrada a las fuentes del campo que están en su interior. Es posible encontrar una relación local que une las derivadas del campo en un punto con densidad de carga de volumen ρ en aquel punto.

Consideremos un paralelepípedo infinitesimal con lados dx , dy , dz paralelos a los ejes, el cual contiene una carga $dq = \rho(x, y, z) d\tau$ siendo $d\tau = dx dy dz$ el volumen del paralelepípedo. El flujo a través de la superficie $A'B'C'D'$, perpendicular al eje x es:

$$\vec{E}' \cdot \hat{u}_x dy dz = E'_x dy dz,$$

llamemos E'_x la componente de \vec{E}' paralela al eje x . Análogamente, el flujo a través la cara $ABCD$ es

$$\vec{E} \cdot (-\hat{u}_x) dy dz = -E_x dy dz;$$

Al final

$$(E'_x - E_x) dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz \quad (3.13)$$

Lo cual es el flujo a través las superficies consideradas, donde hemos desarrollado en serie hasta el primer término el campo E'_x (ya que dx es un infinitesimal).

Podemos encontrar expresiones similares para las otras superficies y obtenemos el flujo total en todas las superficies del paralelepípedo, que es

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) d\tau. \quad (3.14)$$

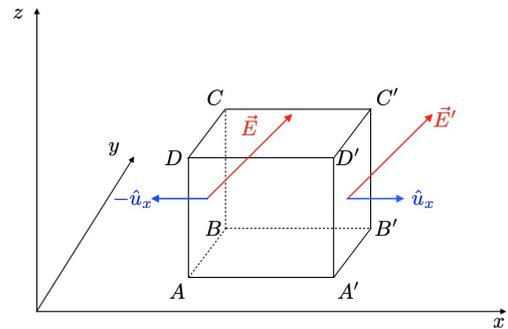


Figure 3.5: Discontinuidad de la componente ortogonal del campo \vec{E} .

Según la ley de Gauss, sabemos que

$$d\Phi = \frac{dq}{\epsilon_0} = \rho(x, y, z) \frac{d\tau}{\epsilon_0}, \quad (3.15)$$

y comparando los dos flujos tenemos que

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z).$$

El término del lado izquierdo es simplemente la divergencia del campo \vec{E} , por lo tanto, la ley de Gauss en forma local será

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z) \quad (3.16)$$

El campo \vec{E} tiene divergencia no nula solamente en los puntos donde existe una densidad de carga, en el espacio vacío, la divergencia de \vec{E} es nula.

Aún si por la demostración hemos utilizado un paralelepípedo, la ley de Gauss (3.16) es válida para cualquier volumen, es suficiente pensar en dividir el volumen en infinitos paralelepípedos y a cada uno aplicarle las consideraciones hechas hasta ahora. Ya que los flujos en las caras en común se anulan (ya que son iguales y opuestos) quedan sólo la contribución de las caras externas que coinciden con Σ y se obtiene del teorema de la divergencia

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{E} d\tau.$$

Theorem 3.4.1 — Teorema de la divergencia. El flujo de un campo vectorial \vec{V} a través de una superficie cerrada Σ es igual a la integral de la divergencia del campo en el volumen contenido en Σ :

$$\oint \vec{V} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{V} d\tau. \quad (3.17)$$

Campos vectoriales solenoidales

Precedentemente hemos introducido el concepto de campo vectorial solenoidal; por ejemplo un dipolo eléctrico elemental tiene un flujo nulo a través de cualquier superficie cerrada (que encierre el dipolo) y un campo vectorial con esa propiedad se define solenoidal. Desde el teorema de la divergencia (3.17) encontramos que para un campo solenoidal la divergencia es siempre nula; de hecho, si fuera distinta de cero en un punto, sería distinta de cero el flujo a través de una superficie cerrada alrededor del punto. Por lo tanto, para un campo vectorial \vec{V} solenoidal vale siempre la relación

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0.$$

Una propiedad típica de un campo solenoidal es la siguiente: elegida una línea cerrada Γ y colocamos dos superficies Σ_1 y Σ_2 en este contorno, el conjunto de Σ_1 y Σ_2 forma una superficie cerrada Σ para la cual el flujo total es cero:

$$\Phi(\vec{V}) = \oint \vec{V} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \vec{V} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{V} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2 = 0.$$

Observamos que si fijamos una dirección de recorrido a lo largo de la línea, las normales \hat{u}_n en Σ_1 y Σ_2 no están orientadas de manera consistente con la regla del tornillo. Si queremos hacer esto debemos cambiar una orientación, por ejemplo su Σ_1 y tenemos

$$\Phi(\vec{V}) = -\Phi_1 + \Phi_2 \quad \implies \quad \Phi_1 = \Phi_2$$

En un campo solenoidal, el flujo a través de dos superficies que tienen el mismo contorno y orientadas concordemente, es igual. Por lo tanto, no es la superficie, que sirve para realizar el cálculo, sino el contorno, y se habla de hecho de flujo a través de una línea cerrada. El campo electrostático en general no es solenoide y de hecho su divergencia no es idénticamente cero; lo sería si sus fuentes fueran dipolos elementales, pero este es un caso muy especial. Veremos que el campo magnético B tiene la propiedad de ser solenoidal, y por lo tanto de tener divergencia idéntica a cero, en cualquier circunstancia.

3.5 Ecuaciones de Maxwell para la electrostática

La introducción de los operadores de rotor y divergencia permiten escribir en forma sistemática las ecuaciones locales que corresponden al hecho de que el campo \vec{E} sea conservativo y obedezca a la ley de Gauss:

$$\nabla \wedge \vec{E} = 0, \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.19)$$

Las cuales se llaman *ecuaciones de Maxwell para el campo electrostático*. Cada una de estas ecuaciones se corresponden a tres ecuaciones diferenciales en las componentes del campo.

Como hemos visto anteriormente, el hecho de que el campo sea conservativo, o sea que valga la ecuación (3.18), nos permitió escribir $\vec{E} = -\nabla V$, insertando la última expresión en la ecuación (3.19) obtendremos

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla V = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Trabajando en coordenadas cartesianas, tenemos

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.20)$$

esta ecuación diferencial, que conecta el potencial a la densidad de carga, se llama *ecuación de Poisson*. En el espacio vacío tendremos

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3.21)$$

Esta expresión se llama *ecuación de Laplace*.

La integración de las ecuaciones (3.20) y (3.21) con determinadas condiciones de borde permite determinar unívocamente el potencial $V(x, y, z)$ y, desde esto, el campo eléctrico, utilizando el gradiente.

De hecho se demuestra que, si se impone al potencial ser nulo en el infinito junto a todas sus derivadas (y, por lo tanto, su potencial es también nulo en el infinito), y se fija una distribución de carga ρ en una región de espacio finita, la solución de la ecuación de Poisson es:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}}.$$

En fin, el operador $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ se llama *operador de Laplace* o *laplaciano* y, en coordenadas cartesianas, toma la expresión

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

el cual, aplicado a un campo escalar, origina otra cantidad igualmente escalar.

Se considera también la aplicación de ∇^2 a un vector; el resultado es un vector que tiene como componentes los laplacianos de las componentes:

$$\nabla^2 \vec{a} = (\nabla^2 a_x) \hat{u}_x + (\nabla^2 a_y) \hat{u}_y + (\nabla^2 a_z) \hat{u}_z.$$

Ejercicio 3.6 Entre dos planos indefinidos, distantes d y cargados con densidad uniforme $+\sigma$ y $-\sigma$, hay una carga distribuida en el espacio con densidad uniforme ρ . Determinar, en la región entre los dos planos, el campo y el potencial, suponiendo $V(x=d) = 0$.

Solución: La simetría del problema sugiere que las superficies equipotenciales son planos paralelos a los dos planos cargados, por lo que el problema es unidimensional. La ecuación de Poisson (3.20) se escribe

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

y su solución más general es

$$V(x) = c_1 + c_2 x - \frac{\rho x^2}{2\epsilon_0}.$$

Las dos constantes se encuentran con las condiciones de borde $V(d) = 0$ y $V(0) = V_0$; por el momento V_0 no es conocido. Tenemos

$$V(0) = V_0 = c_1 \implies c_1 = V_0$$

$$V(d) = 0 = c_1 + c_2 d - \frac{\rho d^2}{2\epsilon_0} \implies c_2 = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} - \frac{V_0}{d}$$

por lo tanto

$$V(x) = V_0 + \left(\frac{\rho d}{2\epsilon_0} - \frac{V_0}{d} \right) x - \frac{\rho x^2}{2\epsilon_0}, \quad E(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{V_0}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon_0} (2x - d)$$

El campo total será la suma de los dos campos: $E(x)$ y el campo creado por los plano cargados, que es $\vec{E}_\sigma = \sigma/\epsilon_0 \hat{u}_n$. ■

3.6 Repaso sobre las operaciones de gradiente, rotor y divergencia

En las leyes que describen el comportamiento del campo \vec{E} , y, en otras que estudiaremos, aparecen algunas combinaciones de las derivadas parciales del campo, expresadas sintéticamente con los conceptos de *gradiente*, *rotor* y *divergencia*.

En este capítulo repasaremos las propiedades de tales operaciones, utilizando los símbolos \vec{E} y V para los campos vectoriales y campos escalares (hay que recalcar que estas propiedades se aplican a todos los campos vectoriales). En fin, recordemos que *un campo es una cantidad física que en una región del espacio toma valores dependientes de la posición, o sea, es una función de*

las coordenadas. Por su carácter físico, un campo toma un significado intrínseco que no depende en particular del sistema de referencia. Eso es verdad por el número que representa el campo en un punto, como por el módulo, la dirección, el sentido del campo vectorial en un punto; no es verdad para las componentes del campo vectorial, las cuales dependen explícitamente del sistema de referencia y varían con eso.

Gradiente ∇V

El gradiente se aplica a un campo escalar y el resultado es un campo vectorial. El significado intrínseco está expresado por:

$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s};$$

la variación infinitesimal del campo escalar en la dirección de $d\vec{s}$ está dada por el producto de la proyección del gradiente en esta dirección. El gradiente proporciona en el espacio tridimensional las propiedades de variación del campo escalar. En cada punto del dominio, ∇V es ortogonal a la superficie de nivel que pasa por aquel punto (se llaman así las superficies $V = \text{constante}$) e indica, con su sentido, el máximo crecimiento de V ; llamado dn el desplazamiento infinitesimal de tal sentido, $|\nabla V| = dV/dn$.

Dado un campo escalar es evidente que la diferencia finita

$$V_B - V_A = \int_A^B \nabla V \cdot d\vec{s}$$

está determinada por los puntos A y B y no por el camino entre los puntos. La integral de línea del gradiente es, por lo tanto, independiente del camino, o sea, su circulación del gradiente es siempre igual a cero:

$$\oint \nabla V \cdot d\vec{s} = 0.$$

El resultado es conocido como *teorema del gradiente* y se dice que el campo vectorial ∇V es un campo conservativo.

Viceversa, si un campo vectorial satisface la propiedad de tener circulación nula en cualquier línea cerrada contenida en su dominio, y si esto es conexo (o sea, se puede siempre dibujar una línea que conecte dos puntos, y tal línea tiene que pertenecer al dominio), entonces, existe una función escalar V por la cual el campo vectorial es el gradiente.

Rotor $\nabla \wedge \vec{E}$

El rotor se aplica al campo vectorial y proporciona otro campo vectorial. El significado intrínseco está expresado por:

$$d\Gamma = (\nabla \wedge \vec{E}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma :$$

$d\Gamma$ es la circulación del vector \vec{E} en un camino infinitesimal, sobre el cual se apoya una superficie $d\Sigma$ y, según la última ecuación, es igual al flujo del rotor de \vec{E} a través de $d\Sigma$. El rotor en un punto está relacionado a la circulación elemental del campo alrededor del punto.

Si el campo es conservativo, su circulación es siempre nula y, por lo tanto, el rotor es igualmente nulo; de hecho $\nabla \wedge (\nabla V) = 0$: el gradiente es un campo irrotacional. Viceversa, si el rotor de \vec{E} es idénticamente nulo y el dominio del campo es simplemente conexo, entonces \vec{E} es conservativo.

Según el *teorema de Stokes*:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} (\nabla \wedge \vec{E}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma.$$

La integral de línea se substituye con una integral de superficie, extendida a una superficie cualquiera que se apoye sobre la línea, con una combinación de derivadas que se llama rotor.

Divergencia $\nabla \cdot \vec{E}$

La divergencia se aplica a un campo vectorial y proporciona un campo escalar. El significado intrínseco está dado por:

$$d\Phi = \nabla \cdot \vec{E} d\tau :$$

el flujo infinitesimal del campo \vec{E} a través de una superficie cerrada $d\Sigma$ que contenga el volumen $d\tau$ está dado por el producto de la divergencia de \vec{E} por el volumen. La divergencia en un punto está conectada al flujo del campo que entra y que sale por aquel punto.

La formula integral de la ecuación anterior constituye *el teorema de la divergencia*:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{E} d\tau. \quad (3.22)$$

Un campo vectorial, que tiene flujo nulo a través de cualquier superficie cerrada, se dice solenoidal y su divergencia es nula. Una propiedad típica de los campos solenoidales es que es siempre el mismo el flujo a través de cualquier superficie que se apoyen en el mismo contorno: *el flujo está definido solamente por el contorno*.

Una particularidad del campo solenoidal es el vector $\nabla \wedge \vec{E}$: de hecho, se verifica que $\nabla \cdot \nabla \wedge \vec{E} = 0$. Viceversa es verdad que si un campo vectorial es solenoidal, este es el rotor de otro campo vectorial. O sea, dado \vec{a} y calculando $\vec{b} = \nabla \wedge \vec{a}$, resulta siempre $\nabla \cdot \vec{b} = 0$; si viceversa resulta siempre $\nabla \cdot \vec{b} = 0$, entonces, existe siempre un vector $\vec{a} = \nabla \wedge \vec{b}$. En algún sentido, como V es la primitiva escalar de un campo irrotacional, entonces \vec{a} es la primitiva vectorial de un campo solenoidal.

El operador ∇ : operaciones combinadas

El vector simbólico ∇ es muy útil para expresar las operaciones de gradiente, rotor, divergencia y para demostrar rápidamente algunas propiedades. Tenemos

- aplicación directa sobre un escalar: gradiente ∇V
- producto vectorial por un vector: rotor $\nabla \times \vec{E}$
- producto escalar por un vector: divergencia $\nabla \cdot \vec{E}$

Considerando ∇ formalmente como un vector, es inmediato verificar que

$$\nabla \times \nabla V, \quad \nabla \cdot \nabla \times \vec{E}$$

son idénticamente nulos: el primero es un producto vectorial entre dos vectores paralelos, el segundo es un producto mixto con dos factores iguales.

Otras aplicaciones combinadas son

- divergencia de un gradiente: laplaciano $\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$
- gradiente de una divergencia: $\nabla(\nabla \cdot \vec{E})$
- rotor de un rotor: $\nabla \times (\nabla \times \vec{E})$

Ejercicio 3.7 — Producto mixto. Doble producto vector. Se define el producto mixto entre 3 vectores $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$: no hace falta poner paréntesis porque no tendría sentido ejecutar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, que es un escalar, y hacer el producto vectorial con \vec{c} . En coordenadas cartesianas, el producto mixto está dado por el cálculo del determinante

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (3.23)$$

y son evidentes las siguientes propiedades:

1. el cambio de dos factores conlleva un signo negativo;

2. si dos vectores son iguales el producto mixto es nulo ($\nabla \cdot \nabla \times \vec{E}$);
3. se pueden intercambiar los productos $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$,

El módulo del producto mixto es igual al volumen del paralelepípedo que tiene como lados (o aristas) \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . El doble producto vector (o vectorial) $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ es un vector: módulo, dirección y sentido se obtienen desde las propiedades del producto vectorial. Las paréntesis son necesarias, en cuanto

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}.$$

Se demuestra que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \quad (3.24)$$

el doble producto vector está en el plano formado por \vec{b} y \vec{c} . ■

Además, llamados S , \vec{a} y \vec{b} un campo escalar y dos campos vectoriales, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \vec{a} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} \\ \nabla \cdot S \vec{a} &= \nabla S \cdot \vec{a} + S \nabla \cdot \vec{a} \\ \nabla \times S \vec{a} &= \nabla S \times \vec{a} + S \nabla \times \vec{a} \\ \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b}. \end{aligned}$$

4. Conductores

Los materiales conductores se caracterizan por el hecho de que en ellos se dan unas condiciones particulares que hacen posible el movimiento de algunas de sus cargas constituyentes. En conductores como las soluciones electrolíticas o los gases ionizados, se producen desplazamientos de carga de ambos signos, pero estos materiales no son de interés para la electrostática. Nuestra atención se centra, en cambio, en los conductores sólidos, cuyo ejemplo más típico son los metales: en ellos, por cada átomo hay uno o más electrones que, en la práctica, están separados del resto del átomo y son libres de moverse en el conductor. La aplicación de un campo \vec{E} adecuado puede provocar un movimiento ordenado de los electrones o dar lugar a una corriente eléctrica, tema que comenzaremos a estudiar en el capítulo 6. En los fenómenos electrostáticos, sin embargo, las cargas son fijas y esta condición exige que el campo dentro de un conductor sea nulo, pues de lo contrario habría un movimiento de cargas, contrario a la hipótesis. Por tanto, en electrostática, el estado de un conductor en equilibrio se define por la condición

$$\vec{E} = 0 \quad \text{en el interior.}$$

Se tiene que entender que esta es una condición media macroscópica. Muy cerca de los núcleos hay campos muy intensos que tienen unidos los electrones no libres; además, los electrones libres no están en reposo sino que tienen un movimiento completamente desordenado de agitación térmica; pero en ningún instante hay un movimiento ordenado en una dirección; se usa, por lo tanto, hablar de *gas de electrones libres* en el interior de un conductor.

La condición $\vec{E} = 0$ tiene consecuencias muy importantes.

- Si el campo eléctrico es nulo, el flujo a través de cualquier superficie cerrada Σ en el interior del conductor es nulo y, por lo tanto, según la ley de Gauss, en el interior de un conductor no existen cargas ($q_{\text{int}} = 0$), en el sentido que no hay un exceso de carga de un signo u otro. Consecutivamente, un exceso de carga en un conductor puede estar solamente en su superficie, distribuido con densidad superficial $\sigma = dq/d\Sigma$; si se ceden electrones estos estarán al exterior, si se sustraen electrones se priva de ellos la capa superficial.
- El potencial del conductor es constante en cada punto del conductor: tomando dos puntos

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \implies V(P_1) = V(P_2) = V_0.$$

El resultado es verdadero también si uno de los puntos está en la superficie. Por lo tanto, la superficie de un conductor es una superficie equipotencial.

- c) Como la superficie del conductor es una superficie equipotencial, el campo en un punto externo muy cercano al conductor es ortogonal a la superficie del conductor, independientemente de la forma de este. El valor del campo se obtiene directamente utilizando la discontinuidad del campo eléctrico al atravesar una superficie de carga: poniendo $\vec{E}_1 = 0$ en su interior y $\vec{E}_2 = \vec{E}$ el campo eléctrico en su exterior, tenemos

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n, \quad (4.1)$$

resultado conocido como *teorema de Coulomb*. Se aprecia que el módulo del campo eléctrico es mayor cuando σ es mayor: como veremos más adelante, σ es mayor cuando el radio de curvatura de la superficie es menor.

Añadimos que la carga en un conductor tiene que tener el mismo signo, positivo o negativo, en toda la superficie: una acumulación de electrones en una zona del conductor se puede obtener solamente por un campo eléctrico externo, que en este caso, no existe.

Acercando un conductor C_1 , cargado o no, a otro conductor cargado C_2 , o sea, insertando C_1 en un campo \vec{E} externo (producido por C_2), el campo eléctrico en el interior de C_1 ya no sería nulo, sino que estaría dado por \vec{E} ; de otro modo, este campo eléctrico externo provoca un movimiento de electrones y en la superficie del conductor C_1 aparece una carga si antes estaba descargado, o, se modifica si estaba cargado, con el resultado de que la superposición del campo externo \vec{E} y del campo debido a la carga superficial da como resultado un campo nulo en el interior de C_1 . Lo que ocurre es un movimiento temporario de cargas que restablece el estado de conductor en equilibrio, la duración del fenómeno es $t = d/c$, si d es la dimensión típica del conductor y c es la velocidad de la luz.

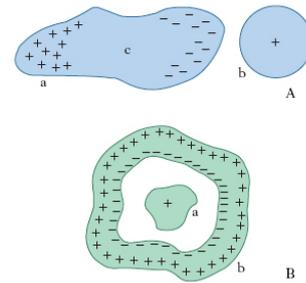


Figure 4.1: Inducción electrostática en conductores; en B la inducción es completa.

Hay que precisar algo relativamente a este fenómeno de *inducción electrostática*. Los electrones se desplazan debido a la acción del campo eléctrico externo y se acumulan en una zona de la superficie, dejando en otra parte un exceso de cargas positivas, entre estas zonas se crea un campo electrostático inducido \vec{E}_i el cual contrasta el movimiento de los electrones y se llega al equilibrio cuando $\vec{E}_i = -\vec{E}$ en el interior del conductor. Tenemos así una distribución de cargas inducidas de los dos signos en la superficie del conductor que se superpone a la eventual carga preexistente; pero en total la carga del conductor se queda la misma porque la carga inducida es la suma algebraica de las dos contribuciones iguales y opuestas. Es evidente que esta nueva configuración tiene que ser distinta de aquella preexistente: esta da en su interior un campo $\vec{E}_i \neq 0$.

Tenemos también que decir que la distribución de equilibrio es una y una sola, o sea no existen distintas soluciones.

Hasta ahora hemos hablado de un solo conductor. Si ponemos en contacto dos o más conductores, por ejemplo, conectándolos con un hilo conductor, se forma un único conductor y en equilibrio las condiciones $\vec{E} = 0$ y $V = \text{constante}$ se aplican en todas partes: *los conductores en contacto tienen el mismo potencial*.

4.1 Capacidad de un conductor aislado

La carga distribuida en la superficie de un conductor cargado aislado, o sea, lejos de cuerpos cargados, y la densidad de la distribución están conectadas por la siguiente relación:

$$q = \oint \sigma(x', y', z') d\Sigma;$$

el potencial en un punto P cualquiera del conductor es constante en valor y está dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\sigma(x', y', z') d\Sigma}{r'}$$

y hemos ya dicho que la distribución de carga tal que el campo eléctrico sea nulo en el interior y por lo tanto constante el potencial es una y una sola. Si la carga del conductor aumenta a $q' = mq$, entonces, la densidad varía en el mismo factor $\sigma' = m\sigma$ y, también, el potencial del conductor se multiplica por el mismo factor m . Por lo tanto, se deduce que la razón entre la carga y el potencial de un conductor aislado no cambia con el variar de la carga en el conductor:

$$C = \frac{q}{V}. \quad (4.2)$$

Esta razón se llama *capacidad del conductor* y se encuentra que depende solamente de la forma y de las dimensiones del conductor y del medio.

Unidades 4.1.1 La unidades de medida de la capacidad de un conductor es Coulomb/volt, que toma el nombre *farad* [F]

$$F = \frac{C}{V}.$$

Se trata de una unidad de medida muy grande. En la práctica se usan los submúltiples

$$\begin{aligned} \text{millifarad } \text{mF} &= 10^{-3} \text{ F}, & \text{microfarad } \mu\text{F} &= 10^{-6} \text{ F} \\ \text{nanofarad } \text{nF} &= 10^{-9} \text{ F}, & \text{picofarad } \text{pF} &= 10^{-12} \text{ F} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.1 Determinar la capacidad de un conductor esférico aislado de radio R .

Solución. En el ejemplo 3.2 hemos visto que una distribución superficial esférica de carga uniforme, como aquella que se encuentra en un conductor esférico aislado, produce un campo que es nulo en su interior y vale $q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ en el exterior; el potencial es $V = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ y en su superficie $V = q/(4\pi\epsilon_0 R)$. Por la definición (4.2) tenemos

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R, \quad (4.3)$$

la capacidad depende solamente del radio de la esfera. Hagamos algunos ejemplos numéricos:

$$\begin{aligned} R &= 0.1 \text{ m} & C &= \frac{10^{-1}}{9 \cdot 10^9} \simeq 11 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 11 \text{ pF}, \\ R &= 6.7 \cdot 10^6 \text{ m} \quad (\text{radio de la tierra}) & C &\simeq 0.74 \cdot 10^{-3} \text{ F} = 0.74 \text{ mF}, \\ R &= 9 \cdot 10^9 \text{ m} & C &= 1 \text{ F}. \end{aligned}$$

Por lo menos por una esfera aislada es evidente que el farad es una unidad muy grande. ■

Ejercicio 4.2 Dos esferas conductoras S_1 y S_2 , de radios R_1 y R_2 respectivamente, se colocan a una distancia muy grande con respecto a R_1 y R_2 y están unidas por un hilo conductor. La carga total es q y supongamos que q_1 es la carga distribuida con densidad uniforme σ_1 en la superficie Σ_1 de la esfera S_1 y q_2 es la carga distribuida con densidad uniforme σ_2 en Σ_2 mientras que la carga en el cable puede despreciarse. Determina los valores de las dos cargas q_1 y q_2 .

Solución. Por el texto entendemos que podemos poner $q = q_1 + q_2$ y que las esferas están lo suficientemente separadas como para poder despreciar la inducción electrostática que haría que las distribuciones de carga no uniformes en las superficies. Hemos dicho que si dos conductores están en contacto poseen el mismo potencial, por lo tanto

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = V_1 = V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Utilizando la ecuación (4.3)

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

La carga se divide entre las esferas proporcionalmente a los radios y, por lo tanto, a las capacidades. Acordamos que $q = q_1 + q_2$ y tenemos

$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q, \quad q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q.$$

La densidad de carga en las esferas son

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}, \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \implies \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Hemos verificado en un caso particular la afirmación que densidad de carga y campo eléctrico superficiales son mayores donde menor es el radio de curvatura. ■

4.1.1 Conductor con una cavidad

Consideremos un conductor cargado que tenga en su interior una cavidad. En la masa del conductor el campo eléctrico es nulo y, por lo tanto, es nulo el flujo a través de cualquier superficie cerrada que contenga la cavidad: esto implica, por la ley de Gauss, que en el interior de Σ no hay cargas y, por lo tanto, tampoco hay cargas en la superficie de la cavidad.

Tampoco es posible una separación de cargas $+q$ y $-q$ en la superficie de la cavidad: para demostrar esto se utiliza la propiedad de que el campo \vec{E} es conservativo.

Si en las paredes de la cavidad hubiese una distribución de cargas de signo opuestos, véase figura, entonces habrían en la cavidad líneas de fuerza que salen de $+q$ y entran en $-q$. La circulación del campo \vec{E} en una línea cerrada constituida por C_1 en el interior de la cavidad, donde $\vec{E} \neq 0$ y, por C_2 , en el interior del conductor, donde $\vec{E} = 0$, daría como resultado:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0,$$

Lo cual contradice el hecho de que \vec{E} sea conservativo. Por lo tanto, el campo en la cavidad tiene que ser nulo: *en las paredes*

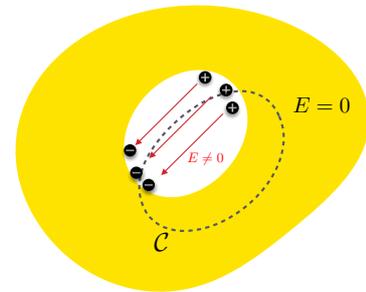


Figure 4.2: Conductor con una cavidad.

de la cavidad no pueden aparecer cargas eléctricas.

Concluyendo,

Definición 4.1.1 la carga de un conductor en equilibrio se distribuye siempre en la superficie externa, también si el conductor tiene una cavidad;

el campo eléctrico es nulo y el potencial es constante en cada punto interno a la superficie del conductor. La capacidad de un conductor aislado es la misma también si el conductor tiene una cavidad.

Una primera observación importante es que la situación descrita dentro de la cavidad de un conductor no depende de la carga y , y, por tanto, del potencial del conductor. El conductor puede estar a 10 V o a 10^6 V , pero en el interior de la cavidad no se mide nunca una d.d.p. distinta que cero: el punto de referencia para el potencial es la pared de la cavidad, con respecto a la cual la d.d.p. es nula.

Consideremos ahora un conductor C_2 con una cavidad, aislado y sin cargas, e introducimos ahora otro conductor C_1 cargado en la cavidad, manteniéndolo aislado de C_2 . En condiciones de equilibrio, si C_1 tiene en la superficie externa una carga q , entonces resulta una carga $-q$ distribuida en la superficie interna y una carga q en la superficie externa de C_2 .

Tal hecho se explica como consecuencia de la ley de Gauss: a través de una superficie cerrada Σ dentro C_2 y que contiene la cavidad, el flujo de \vec{E} es nulo ya que el campo mismo es nulo; consecutivamente, en el interior de Σ no existe carga y si C_1 lleva la carga q , en la superficie interna de C_2 tiene que aparecer una carga $-q$. Además, siendo C_2 neutro, el desplazamiento de una carga $-q$ en la superficie interna produce la aparición de una carga $+q$ en la superficie exterior.

Éste fenómeno se llama *inducción completa* ya que todas las líneas de fuerza que salen de C_1 terminan en C_2 . Desde la superficie de C_2 , salen otras líneas de fuerza, que reflejan la distribución de las cargas iniciales. Las dos zonas donde existe un campo están separadas por otra zona donde no puede existir un campo eléctrico, producto de que por propiedad de los conductores en equilibrio, el campo es nulo en su interior.

El campo en la superficie interna de la cavidad está determinado por el valor de q , por la posición de C_1 y por la forma geométrica de las dos superficies. Pero, para un q fijo, el efecto en la superficie exterior es siempre el mismo, cualquiera sean las formas y la posiciones. De hecho, la distribución de cargas superficial que genera campo nulo en el interior de C_2 es solamente una y depende exclusivamente de la forma de C_2 . Podemos decir que la información sobre la situación interna podría pasar al exterior sólo a través de un campo que penetrara en el conductor C_2 : pero esta situación no es posible por la propiedad de los conductores en equilibrio de tener campo nulo en su interior. Como límite, se podrían poner en contacto los dos conductores, así, las cargas $+q$ y $-q$ se cancelan, pero en el exterior no cambia nada; este fenómeno nos dice que la distribución de la carga $-q$ en la cara de C_2 es siempre tal que sumando el efecto de la carga q de C_1 , el campo debido a las cargas en la cavidad es nulo en el exterior de la cavidad.

Alternativamente, si variamos la carga en la superficie exterior o variamos su distribución (por ejemplo acercando otro conductor cargado) cambia también el campo exterior, pero la distribución de carga en la superficie de C_2 es siempre tal que en su interior el campo eléctrico es nulo y, por lo tanto, no puede alterar el campo local que existen en la cavidad. Como mencionado anteriormente, esto podrá ocurrir si un campo eléctrico penetrase en el interior del conductor, pero esta posibilidad está excluida por la propiedad de los conductores en equilibrio.

Por lo tanto, hasta que el espacio interno y el espacio externo no comuniquen, el *conductor con cavidad constituye un escudo electrostático perfecto entre el espacio interno y externo.*

4.2 Condensadores

Un sistema constituido por dos conductores entre los cuales hay una inducción completa se llama condensador; los dos conductores se llaman *armaduras del condensador*. La razón entre el valor absoluto de la carga presente en una armadura y la d.d.p. se llama capacidad del condensador, acordando que la capacidad de un condensador depende solamente de la geometría y del medio isotrópico; la definición de la capacidad, escrita en tres versiones distintas (todas de uso común), son:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2}, \quad q = C(V_1 - V_2), \quad V_1 - V_2 = \frac{q}{C}. \quad (4.4)$$

Un condensador es utilizado como deposito de carga; siendo la carga total nula, la cual está separada por $+q$ y $-q$, proporcionales por un conductor de capacidad fijada y d.d.p. entre las armaduras. Utilizando conexiones externas es posible hacer fluir la carga negativa de una armadura a otra, generando una corriente eléctrica que descarga el condensador. Podemos describir como se conectan con hilos conductores más condensadores y calcular la capacidad equivalente.

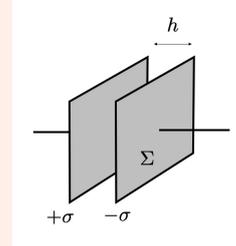
Ejercicio 4.3 Calcular la capacidad de un condensador plano.

Solución. Las armaduras de un condensador plano están constituidas por dos conductores planos paralelos, con area Σ y distancia, entre los planos, h . La carga positiva q está distribuida con densidad uniforme σ sobre la armadura positiva, mientras que la carga negativa $-q$ está distribuida con densidad uniforme $-\sigma$ sobre la armadura negativa. Hemos ya calculado el campo eléctrico producido por un conductor plano y también el potencial entre los dos conductores:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n, \implies V_1 - V_2 = E h = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} h = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} h.$$

Se deduce que la capacidad de un condensador plano es:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}.$$



En este caso no hemos hecho ninguna aproximación geométrica, hemos solamente supuesto que el campo es uniforme, esto es verdad solamente en la región del condensador, pero no en proximidad de los bordes (efecto que no consideraremos en este curso). ■

Ejercicio 4.4 Calcular la capacidad de un condensador cilíndrico de radios $R_1 < R_2$ y longitud d .

Solución. Las armaduras de un condensador cilíndrico son dos porciones de superficie cilíndrica coaxial, una de radio R_1 y la otra de radio $R_2 > R_1$ de igual longitud d , grande en comparación con los radios. Esto crea una situación adicional de un conductor dentro de otro conductor con cavidad, con una inducción aproximadamente completa. Si se excluyen las secciones extremas, a las que volveremos más adelante, en la cavidad cilíndrica entre R_1 y R_2 el campo eléctrico es radial, como calculado en el ejemplo 3.4, y el campo y la d.d.p serán

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r,$$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

La carga por unidad de longitud λ es igual a q/d y la capacidad es

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 d}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (4.5)$$

Si $h = R_2 - R_1$ es mucho más grande de los radios, podemos desarrollar en serie el denominador hasta el primer término

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{h}{R}$$

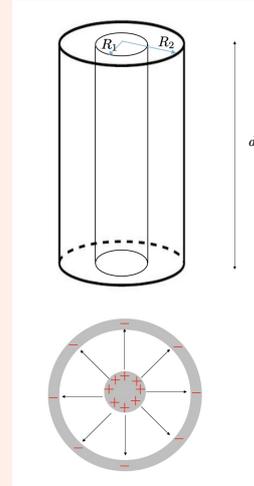
y la capacidad sería

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 d R}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad (4.6)$$

con $\Sigma = 2\pi R d$, área de las armaduras (con h muy pequeño). Desde la ecuación (4.5) se define la capacidad por unidad de longitud

$$C_d = \frac{C}{d} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Se realiza un condensador cilíndrico con capacitancia variable deslizando uno de los dos cilindros a lo largo del eje para que la longitud d varíe. Las fórmulas siguen siendo válidas si se pueden despreciar los efectos de los bordes.



Las configuraciones regulares del campo \vec{E} , consideradas en el condensador cilíndrico y en el condensador plano, no son completamente factibles en la práctica. Serían correctos si la extensión de las placas fuera indefinida: para un tamaño finito se tendría, en la región del borde, una transición abrupta de la región donde existe un campo eléctrico regular a la región con un campo eléctrico nulo y sería posible encontrar una línea cerrada tal que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

Dado que el campo es conservativo, hay que descartar esta posibilidad y de hecho el campo es regular sólo en la zona central del condensador, mientras que cerca de los bordes las líneas de fuerza se deforman y salen al exterior, suponiendo una configuración que asegura la nulidad de la circulación del campo eléctrico; el valor del campo eléctrico, de todas maneras, decrece muy rápidamente fuera del condensador.

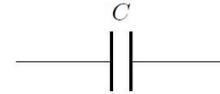
Se entiende que la configuración esférica sería la única ideal, debido a la ausencia de los bordes. Las capacitancias reales de los condensadores cilíndricos y planos difieren del valor encontrados. Sin embargo, siempre se utilizan para dar una indicación de los valores implicados, que se acercan más a la situación real cuanto más se aproxima a la condición $\Sigma \gg h^2$ (gran tamaño de la armadura en relación con su distancia) para la que el efecto de borde sea esencialmente despreciable.

4.2.1 Conexión de condensadores

Un condensador se utiliza esencialmente como almacén de carga; aunque la carga total es nula, ésta está separada por las cantidades $+q$ y $-q$, que son proporcionales para un conductor de capacitancia dada a la d.d.p. entre las armaduras. Mediante conexiones conductoras externas adecuadas, es posible hacer que la carga negativa (electrones) fluya de una armadura a otra, generando una corriente eléctrica que descargue el condensador.

Este tema se tratará en el capítulo 6. Sin embargo, podemos describir inmediatamente cómo se conectan varios condensadores entre sí con cables conductores y calcular la capacitancia equivalente. Aquí supondremos la cargas y las d.d.p. constantes en el tiempo, pero los resultados también son válidos en un régimen variable.

Por comodidad, escribimos V la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ que existe entre las armaduras; también utilizamos la letra C para denotar tanto el condensador como su capacitancia. La figura de al lado muestra el símbolo de un condensador en un circuito eléctrico: se refiere claramente al condensador plano, que es con mucho la configuración más común, pero es válido para cualquier condensador.



Condensadores en paralelo

La conexión en paralelo de las armaduras forma un solo condensador, véase figura 4.3.

Cada condensador tiene la misma d.d.p., por lo tanto, podemos escribir

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V.$$

La carga total en las armaduras superiores es

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) V;$$

en las armaduras inferiores $-q = -(q_1 + q_2)$. Definimos capacidad equivalente del sistema como:

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2. \quad (4.7)$$

Dos condensadores en paralelo se comportan como un único condensador cuya capacidad es la suma de las capacidades de cada condensador. El razonamiento se extiende a n condensadores en paralelo:

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k \quad (4.8)$$

Condensadores en serie

En la conexión en serie, existe una sólo conexión entre los dos condensadores, lo cual viene constituyendo un sistema compuesto por tres conductores; a los extremos se aplica la d.d.p. $V = V_C - V_A$, con lo cual, el conductor intermedio tiene un potencial $V' = V_B - V_A$. Si $+q$ es la carga en la armadura C_1 a potencial V_C , por inducción aparece la carga $-q$ en la armadura en frente y $+q$ en la armadura de C_2 , véase figura 4.4. Vemos que el valor de la carga es el mismo en los dos condensadores, por lo tanto, por los dos condensadores podemos escribir:

$$V_C - V_B = \frac{q}{C_1}, \quad V_B - V_A = \frac{q}{C_2},$$

La potencia total vista desde los puntos A y C será

$$V = V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C_{eq}}$$

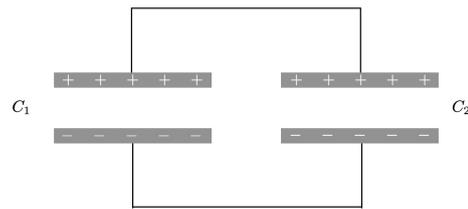


Figure 4.3: Condensadores en paralelo.

a capacidad equivalente es:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (4.9)$$

El razonamiento se extiende a n condensadores en serie: el inverso de la capacidad equivalente del sistema es la suma de los inversos de las capacidades de los condensadores.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (4.10)$$

es evidente que la capacidad equivalente de condensadores en serie es siempre menor que la capacidad de cada condensador.

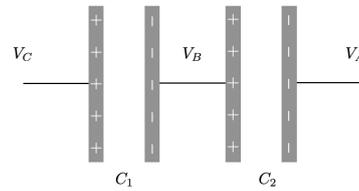


Figure 4.4: Condensadores en serie.

Ejercicio 4.5 Partidor capacitivo. A los extremos de tres condensadores en serie se aplica una d.d.p. $V = V_A - V_B = 100\text{ V}$ y la capacidad equivalente del sistema es $C_{eq} = 100\text{ pF}$. Calcular los valores de las capacidad C_1 , C_2 y C_3 tal que con respecto a V_A se tenga $V_1 = 50\text{ V}$ y $V_2 = 70\text{ V}$.

Solución. La carga que se encuentra en cada armadura es

$$q = CV = 100 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2 = 10^{-8}\text{ C}$$

y los valores de las capacidades que se piden son

$$C_1 = \frac{q}{V_1 - V_A} = \frac{10^{-8}}{50} = 2 \cdot 10^{-10}\text{ F} = 200\text{ pF},$$

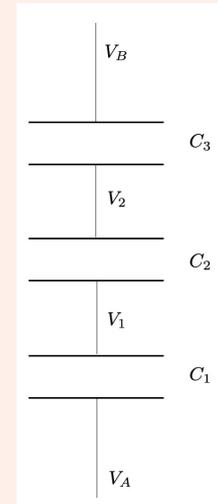
$$C_2 = \frac{q}{V_2 - V_1} = \frac{10^{-8}}{20} = 5 \cdot 10^{-10}\text{ F} = 500\text{ pF},$$

$$C_3 = \frac{q}{V_B - V_2} = \frac{10^{-8}}{30} = 3.33 \cdot 10^{-10}\text{ F} = 333\text{ pF},$$

El sistema se llama partidor capacitivo porque permite repartir una dada d.d.p. (en tres partes en el caso específico). En general, llamados C_i y V_i los valores de la capacidad y de la d.d.p. a los extremos del i -ésimo condensador, desde la igualdad

$$C_1 V_1 = C_2 V_2 = \dots = C_i V_i = \dots = C_n V_n$$

se nota que la d.d.p. se reparte de manera inversamente proporcional a las capacidades. ■



4.3 Energía del campo electroestático

El proceso de carga de un condensador, donde se pasa de una situación de carga cero en las armaduras a la situación $(+q, -q)$ con una d.d.p. $V = q/C$ entre las armaduras, consiste en definitiva en una separación de cargas y se pide un determinado trabajo que, siendo el campo conservativo, depende solamente del estado inicial y final. Para ejecutar el cálculo podemos imaginar que la carga de un condensador ocurre quitando una carga dq de la armadura negativa y llevándola a la armadura positiva, así, una carga $+q$ ha sido transferida desde una armadura a otra,

dejando en la otra una carga $-q$, y se estableció entre las armaduras la d.d.p V ; *la carga total en cada instante es siempre nula.*

Si en una fase intermedia del proceso la d.d.p entre las armaduras es V' , en cuanto ha sido ya transferida la carga $q' = CV'$ el trabajo para desplazar la carga ulterior dq' a través la d.d.p. V' es:

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

y, por lo tanto, el trabajo total para efectuar la separación de las cargas es:

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}.$$

Como se puede notar, depende sólo de la carga transportada y de la capacidad del condensador y no contiene información sobre el proceso.

Este trabajo, efectuado contra la fuerza electrostática que se opone a una acumulación de cargas del mismo signo, viene almacenado en el sistema bajo forma de energía (potencial) electrostática. Asumiendo que la energía sea nula cuando $q = 0$, tenemos $W = U_e$. La energía electrostática se puede escribir como:

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV. \quad (4.11)$$

El razonamiento hecho para calcular la energía de un condensador conecta la energía a las cargas, energía que tienen ya que se encuentran a un potencial en particular; la energía total es la suma de las energías potenciales de cada carga. Es posible encontrar una expresión alternativa de la energía, conectada al campo producido por un sistema de cargas más que a la fuentes del campo mismo.

El razonamiento utilizado para calcular la energía del condensador vincula la energía a las cargas, que la poseen por estar a un determinado potencial: la energía total es la suma de las energías potenciales de las cargas individuales. Sin embargo, es posible encontrar una expresión alternativa de la energía, vinculada al campo producido por el sistema de carga y no a las fuentes del propio campo.

Consideremos por simplicidad un condensador plano, en el cual el campo eléctrico es uniforme. La expresión del potencial es $V = Eh$ (ejercicio de la clase auxiliar):

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2 = \frac{2}{\epsilon_0} E^2 \Sigma h = \frac{1}{2} E^2 \tau$$

siendo $\tau = \Sigma h$ el volumen del condensador, o sea, el volumen donde está definido el campo electrostático. Si hacemos la hipótesis de que la energía esté distribuida en los puntos donde existe el campo y que esta distribución sea uniforme como el campo, podemos decir que la densidad de energía electrostática, o sea la energía electrostática por unidad de volumen es:

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (4.12)$$

La generalidad de esta fórmula, donde no aparece ningún elemento característico del sistema sino que solamente del valor del campo y de las propiedades del medio, sugiere que la ecuación (4.12) se puede aplicar a cualquier situación. De hecho, se puede demostrar que en una región en la cual está definido un campo electrostático, la energía contenida en cada volumen infinitesimal $d\tau$, donde en su interior el campo vale E , es:

$$dU_e = u_e d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau; \quad (4.13)$$

y la energía total se obtiene integrando en todo el volumen, donde $\vec{E} \neq 0$, o sea

$$U_e = \int_{\tau} dU_e = \int_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau. \quad (4.14)$$

Esta energía corresponde al trabajo gastado para construir la distribución de cargas que origina el campo.

Ejercicio 4.6 Calcular la energía electrostática de un condensador esférico de radios R_1 y R_2 .

Solución. Utilizamos la ecuación (4.14); el campo entre las armaduras del condensador vale $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$; el volumen del cascarón infinitesimal esférico entre los radios r y $r + dr$ es $d\tau = \Sigma dr = 4\pi r^2 dr$ y por lo tanto

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (4.15)$$

Recordando que la capacidad de un condensador esférico viene dada por la ecuación (4.3), vemos que la (4.15) es igual a $q^2/2C$, entonces (4.14) y (4.11) conducen al mismo resultado. La energía así calculada corresponde al trabajo para crear la d.d.p. V entre los dos conductores esféricos; si el conductor exterior estuviera conectado a tierra, no habría otros términos. Si, por lo contrario, el conductor exterior estuviera aislado, este tendría la carga q distribuida en la superficie esférica exterior de radio R_3 y en el espacio circundante existe el campo $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, es decir, la energía se distribuye como

$$U_e = \int_{R_3}^{+\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_3}. \quad (4.16)$$

Porque la capacidad de un conductor esférico de radio R_3 es $4\pi\epsilon_0 R_3$ resulta, otra vez, $U_e = q^2/(2C)$. ■

Un último comentario sobre las ecuaciones (4.11) y (4.14) es que en los fenómenos electrostáticos el problema de la localización de la energía no es conceptualmente muy importante: de hecho, se utilizarán las dos expresiones indiferentemente, concentrándonos sobre todo en la simplicidad del cálculo. La ecuación (4.14) se hace importante en los fenómenos de propagación de las ondas electromagnéticas, la cual se extenderá añadiéndole la contribución del campo magnético. En estos fenómenos, la expresión conectada a las fuentes pierde significado y es solamente a través de la expresión donde aparecen los campos que es posible calcular la energía transportada por una onda (como veremos en los capítulos siguientes).

4.4 Energía de un sistema de cargas

En capítulo 2 hemos hablado de la energía electrostática de un sistema de cargas puntuales, llegando a la expresión que es la suma de términos del tipo $q_i V_{ji}$; cada uno representa el trabajo necesario para llevar la carga q_i desde el infinito, donde el potencial es cero, a una distancia r_{ij} donde el potencial es $V_{ji} = q_j/4\pi\epsilon_0 r_{ij}$. Como la suma es simétrica en los índices, o sea, considera por cada par el trabajo para desplazar la carga q_i en el campo de q_j y, también, aquello igual para llevar q_j en el campo de q_i , se necesita un factor 1/2.

Para una genérica distribución de cargas lineales, superficiales o de volumen, la energía potencial se transforma en integral:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_s V \lambda ds, \quad U_e = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} V \sigma d\Sigma, \quad U_e = \frac{1}{2} \int_{\tau} V \rho d\tau, \quad (4.17)$$

el potencial V es aquello generado por todas las cargas del sistema y, por lo tanto, el cálculo puede ser muy complicado. A pesar de esto, el resultado es siempre igual a lo que se obtiene integrando la ecuación (4.13)

Hemos dicho que para los conductores la carga se distribuye solamente en la superficie y el potencial es constante: la energía electrostática será

$$U_e = \frac{1}{2} V \int_{\Sigma} \sigma \, d\Sigma = \frac{1}{2} q V$$

y para más conductores

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i. \quad (4.18)$$

Por ejemplo, para un condensador:

$$U_e = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

y siendo una carga positiva $q_1 = +q$ y la otra negativa $q_2 = -q$, lo anterior se escribe como:

$$U_e = \frac{1}{2} q (V_1 - V_2)$$

Ejercicio 4.7 Calcular la energía electrostática de dos esferas conductoras, con cargas q_1 y q_2 y radios R_1 y R_2 , puestas a una distancia d desde los centros de las esferas y mucho mayor que los radios.

Solución. Desde la ecuación (4.18)

$$U_e = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2$$

El potencial V_1 desde la primera esfera está dado por la suma de la contribución de la carga q_1 sobre la esfera misma y de la carga q_2 sobre la segunda esfera

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

Análogamente

$$V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Al escribir estas relaciones suponemos que la distancia es tal que las densidades de carga sean uniformes en cada superficie esférica y que la interacción entre las esferas es igual y la de dos cargas puntuales. Por lo tanto,

$$U_e = \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2^2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

Los primeros dos términos son positivos, dan el trabajo para cargar las dos esferas; el tercero representa la energía mutua de interacción entre las esferas y depende del signo relativo de las cargas. ■

Ejercicio 4.8 Calcular la energía electrostática del campo de una carga q distribuida uniformemente sobre la superficie de una esfera de radio R o en toda la esfera. Ejecutar los cálculos con $q = 3.2 \cdot 10^{-18} \text{ C}$, $R = 10^{-15} \text{ m}$.

Solución. El primer caso ya lo hemos hecho y el resultado es la ecuación (4.16):

$$U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Si quisiéramos utilizar este resultado para una carga puntual encontraríamos un resultado infinito: esto quiere decir que en el electromagnetismo clásico el concepto de una carga puntual es una abstracción más que una realidad física.

En el caso de la distribución de volumen, la contribución de la parte externa es siempre $q^2/(8\pi\epsilon_0 R)$ porque el campo es igual en los dos casos. Además, hay la contribución del campo existente entre $r = 0$ y $r = R$, campo que vale $E = \rho r/3\epsilon_0$ desde el ejemplo 3.3. Y su energía correspondiente sería

$$\int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R},$$

por lo tanto, en total tenemos

$$U_e = \frac{6}{5} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (4.19)$$

Al mismo resultado se habría llegado utilizando con la ecuación (4.17). La integral se extiende al volumen de la esfera, donde el potencial vale

$$V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

como encontrado en el ejemplo 3.3. Y la energía será

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \rho 4\pi r^2 dr = \frac{\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R (3R^2 - r^2) r^2 dr = \\ &= \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5 = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

donde hemos puesto, claramente,

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Finalmente se puede efectuar un cálculo directo del trabajo en base a la

$$U_e = \int V dq.$$

El trabajo para llevar una carga $dq = \rho d\tau = \rho 4\pi r^2 dr$ desde el infinito a la superficie de la esfera, cuyo radio pasa de r a $r + dr$, es

$$U_e = W = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5 = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Introduciendo los números, si la carga es superficial

$$U_e = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (3.2 \cdot 10^{-18})^2}{2 \cdot 10^{-15}} = 4.61 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 288 \text{ MeV},$$

si es de volumen

$$U_e = \frac{6}{5} \cdot 288 \text{ MeV} = 346 \text{ MeV}$$

Sería esta la energía electrostática del núcleo de un átomo que contiene 20 protones ($q = 20 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 3.2 \cdot 10^{-18} \text{ C}$) y con radio 10^{-15} m , pensando la carga distribuida uniformemente en todo el núcleo. Bajo la acción de la fuerza eléctrica repulsiva entre los protones un núcleo no podría ser estable; es la fuerza nuclear entre los protones y neutrones que mantiene la estabilidad del núcleo. ■

Ejercicio 4.9 Dada Z esferas de radio R_0 , cargadas uniformemente con densidad ρ , calcular como varían con Z el radio y la energía electrostática del sistema obtenido desde la fusión de las esferas.

Solución. Llamado R el radio final y si la densidad queda la misma, tenemos la igualdad inicial y final

$$Z \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \quad \implies \quad R = R_0 Z^{1/3}.$$

Para la energía electrostática, encontramos, desde el ejercicio 4.8,

$$U_e = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0} Z^{5/3}$$

donde hemos puesto e la carga de la esfera. EL mismo procedimiento se podría aplicar a distribuciones esféricas de masa y, de hecho, para los núcleos se encuentra experimentalmente que el radio varía según la ley

$$R = R_0 A^{1/3}$$

donde A es el número de las componente (protones y neutrones) y R_0 una constante que vale $1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$. ■

Ejercicio 4.10 Calcular el radio del electrón en la hipótesis que su energía a reposo mc^2 sea de origen puramente electrostática.

Solución. Igualando la ecuación (4.19) a mc^2 donde m es la masa del electrón:

$$\frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} = mc^2 \quad \implies \quad r = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 1.7 \cdot 10^{-15} \text{ m.}$$

En física atómica aparece la constante

$$r_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m,}$$

llamado radio clásico del electrón. Este valor no indica las dimensiones reales del electrón que en cualquier experimento hasta ahora conducido aparece puntual (dimensiones menores a 10^{-17} m. La igualdad propuesta no es, por lo tanto, significativa.

Si se repite el mismo cálculo para el protón, cuya masa es $m_p \sim 2000m_e$, se encuentra

$$r_p = \left(\frac{m_e}{m_p} \right) = 1.6 \cdot 10^{-18} \text{ m,}$$

frente a los datos experimentales que dan $r_p \sim 10^{-15}$ m. El tamaño finito del protón plantea el problema de su estructura interna. La hipótesis que mejor se corresponde con los resultados de numerosos experimentos es que el protón está compuesto por tres partículas llamadas quarks, dos con carga $2/3e$ y una con carga $-1/3e$ (carga resultante e), que están unidas por la *interacción fuerte* y tienen la peculiaridad de existir sólo confinadas dentro del protón. De hecho, nunca ha sido posible observar quarks libres; sin embargo, las pruebas indirectas de su existencia son muy convincentes. El neutrón también está compuesto por tres quarks, dos con carga $-1/3e$ y uno con carga $2/3e$ (carga resultante cero). Las fuerzas que actúan entre los nucleones, como se denominan el protón y el neutrón, y que mantienen unido el núcleo atómico, son la manifestación de las interacciones entre los quarks. ■

4.5 Fuerza entre las armaduras

La energía electrostática de un condensador plano con armaduras de area Σ a distancia h es:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} h.$$

Entre las armaduras, por las cargas de signos opuestos, se ejerce una fuerza \vec{F} atractiva que, por razones de simetría, es paralela al campo, o sea, ortogonal a las armaduras.

Supongamos que se mantiene fijada una armadura, por ejemplo, la negativa, y se deja libre la otra; esta última, bajo la fuerza atractiva \vec{F} , se acerca a la otra una cantidad dh . La carga sobre las armaduras y por lo tanto la d.d.p disminuye (porque el campo eléctrico se mantiene constante $E = \sigma/\epsilon_0$, mientras que el potencial disminuye por $V = Eh$). Por lo tanto, la energía total disminuye en una cantidad

$$dU_e = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} dh = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\tau,$$

y viene dado por las fuerzas del campo, el trabajo

$$dW = -dU_e = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} dh$$

es positivo ya que la fuerza tiene el mismo sentido del desplazamiento (y $dh < 0$).

Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre la armadura es:

$$F = -\frac{q^2}{2\epsilon_0\Sigma} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\Sigma. \quad (4.20)$$

Se puede llegar a la misma expresión utilizando la relación entre fuerza y energía:

$$\vec{F} = -\nabla U_e \implies F = -\frac{dU_e}{dh} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0\Sigma}.$$

Así como ocurre a cargas constantes, el proceso de desplazamiento puede ocurrir también a potencial constante: por ejemplo, conectando las armaduras a los polos de un generador de tensión, que es un dispositivo capaz de mantener una d.d.p. constante entre los conductores. Consecutivamente, cuando la armadura positiva se desplaza de dh , acercándose a la otra, V se mantiene constante, C aumenta y por lo tanto q tiene que aumentar: el proceso ahora conlleva un desplazamiento de cargas de una armadura a otra, con un gasto de trabajo; si aumenta q aumenta σ y por lo tanto, también el campo $E = \sigma/\epsilon_0$.

La variación de energía electrostática es:

$$dU_e = d\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = \frac{1}{2}V^2dC$$

y ya que

$$dC = d\left(\frac{\epsilon_0\Sigma}{h}\right) = -\frac{\epsilon_0\Sigma}{h^2}dh$$

siendo positiva ya que $dh < 0$, la energía electrostática aumenta en:

$$dU_e = -\frac{\epsilon_0V^2}{2h^2}\Sigma dh = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}d\tau.$$

Ya que la energía aumenta y es necesario un trabajo positivo para desplazar la armadura, evidentemente, existe una intervención desde el exterior: de hecho, ahora el sistema no está aislado, sino que está conectado al generador que mantiene constante la d.d.p.

El trabajo para desplazar la carga $dq = VdC$ es:

$$dW = Vdq = V^2dC = -dU_{\text{gen}}$$

y viene dado por la energía interna del generador U_{gen} que disminuye.

La energía total del sistema, suma de la energía electrostática y de la energía interna del generador, varía en correspondencia del desplazamiento dh de

$$dU = dU_e + dU_{\text{gen}} = \frac{1}{2}V^2dC - V^2dC = -\frac{1}{2}V^2dC = -dU_e.$$

Finalmente, el balance energético es el siguiente: la energía interna del generador disminuye, la mitad de la energía disponible la encontramos bajo forma de energía electrostática, la otra mitad corresponde al trabajo necesario para acercar las armaduras; y concluimos que el trabajo total es

$$dW = \frac{1}{2}V^2dC = dU_e = -\frac{\epsilon_0V^2}{2h}\Sigma dh,$$

el cual corresponde una fuerza atractiva:

$$F = -\frac{\epsilon_0V^2}{2h}\Sigma = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\Sigma.$$

O sea, a carga constante y a potencial constante la expresión de la fuerza es la misma.

Si existe una fuerza, podemos encontrar una presión:

$$p = \frac{F}{\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \quad (4.21)$$

llamada presión electrostática. En esta expresión no aparecen elementos característicos del sistema y podemos decir que ésta es válida en general.

Ejercicio 4.11 En el electrómetro a balanza de Thomson, las superficie de las armaduras, constituidas por dos placas circulares, es $\Sigma = 400\text{cm}^2$ y la distancia entre ellas es $h = 5\text{mm}$. Conectando las placas a un generador que proporciona una d.d.p. V , para volver a poner la balanza en equilibrio es necesario añadir una masa $m = 20 \cdot 10^{-3}\text{g}$ en el plato de la balanza. Calcular V .

Solución. La balanza está en equilibrio antes de la conexión con el generador. Después, la fuerza de atracción entre las placas está dada por

$$F = p\Sigma = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \Sigma = \frac{1}{2}\epsilon_0 \Sigma \frac{V^2}{h},$$

la cual, para el equilibrio, tiene que ser igual a la fuerza peso mg :

$$mg = \frac{1}{2}\epsilon_0 \Sigma \frac{V^2}{h} \implies V = \sqrt{\frac{2mgh^2}{\epsilon_0 \Sigma}} = 166.4\text{V}.$$

La cantidad que se mide es la masa y depende del cuadrado de la cantidad que se quiere determinar, o sea V ; el error relativo es

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{gh^2}{\epsilon_0 \Sigma} \frac{\Delta m}{V^2}.$$

Si, por ejemplo, la sensibilidad de la balanza es $\Delta m = 10^{-3}\text{g} = 10^{-6}\text{kg}$, tenemos

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{692}{V^2}.$$

Con $V = 100\text{V} \implies \Delta V/V = 6.92\%$, con $V = 200\text{V} \implies \Delta V/V = 1.73\%$. El instrumento es poco sensible y preciso si se usan d.d.p. pequeñas, pero sus rendimientos mejoran al aumentar de V . La importancia de este instrumento se basa sobre el hecho que es un *instrumento absoluto*: proporciona una cantidad eléctrica desde una cantidad mecánica (y no desde otras cantidades eléctricas). ■

5. Dielectricos

La interacción entre las cargas eléctricas ha sido estudiada en los capítulos anteriores suponiendo que el espacio entre las cargas es el vacío. Consecutivamente, han sido descritos las propiedades en los conductores en equilibrio: éstas pueden ser resumidas diciendo que la carga de un conductor se distribuye siempre sobre su superficie, de tal modo que el campo generado sea nulo en el interior del conductor. Este último es, por lo tanto, equipotencial y el valor del potencial depende de la distribución de la carga. La carga en un conductor puede ser fácilmente cambiada, dando origen a otra situación electroestática.

Queremos ahora estudiar como se modifica el campo electrostático en el espacio entre conductores cargados cuando este viene parcial o totalmente relleno con un material aislante y cuales son los fenómenos que ocurren en el interior de un material aislante bajo el efecto del campo \vec{E} .

Empecemos examinando una situación simple: un condensador plano cargado y aislado, de modo que las cargas sobre las armaduras son constantes. Si q_0 es el valor de la carga, distribuida con una densidad σ_0 , entre las armaduras existe un campo eléctrico y una d.d.p. V_0 dados por:

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h;$$

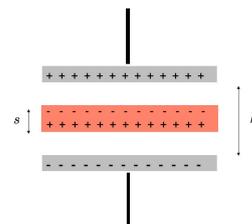
donde C_0 es la capacidad y h la distancia entre las armaduras.

Ahora, introducimos paralelamente a las armaduras y sin tocarlas otra placa conductora de espesor $s < h$, de lo cual, se observa que la d.d.p. entre las armaduras disminuye. Lo que ocurre es que sobre las caras de la placa se forman, por efecto de inducción electrostática completa, dos distribuciones de densidad σ_0 con signo tal de anular el campo en el interior de la placa; en el exterior, el campo no varía y, por lo tanto,

$$V = E(h - s) < V_0,$$

independiente de la posición de la placa.

Repetimos ahora el experimento con una placa de material aislante, o sea, un material donde la carga no es libre de moverse. La d.d.p. entre las armaduras disminuye y el efecto, a paridad de



espesor s , es menor de aquello obtenido con las placa conductora. Un análisis sobre el estado de las cargas en las caras del material aislante nos muestra que no hay presencia de cargas libres. La d.d.p. disminuye linealmente con el aumento del espesor s de la placa y llega al valor mínimo V_{κ} cuando todo el espacio entre las armaduras del condensador está relleno con un material aislante. El contacto entre las placas del condensador y el material aislante no produce ningún efecto ya que sobre las caras de las placas no se ha formado ninguna carga libre.

Una serie de experiencias sistemáticas, como aquellas hechas por Faraday en el 1831, muestra que la d.d.p. V_0 , medida con el condensador vacío, y la d.d.p. V_{κ} , medida cuando el condensador está completamente lleno por un material aislante, es siempre mayor que 1 y depende solamente del tipo de material y nunca de la carga sobre las armaduras o de la dimensiones y formas de las mismas.

Los materiales aislantes, que tienen estas propiedades de reducir la d.d.p., y por lo tanto, el campo eléctrico, se llaman *materiales dieléctricos* o *dieléctricos* y la razón adimensional

$$\kappa = \frac{V_0}{V_{\kappa}} > 1$$

se llama *constante dieléctrica relativa del dieléctrico*.

Volviendo al condensador plano relleno completamente por el dieléctrico, el campo eléctrico en el interior tiene que ser

$$E_{\kappa} = \frac{V_{\kappa}}{h} = \frac{V_0}{\kappa h} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0} \quad (5.1)$$

por lo tanto, reducido siempre por el mismo valor κ .

La diferencia:

$$E_0 - E_{\kappa} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\chi}{1 + \chi} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \quad (5.2)$$

definiendo

$$\chi = \kappa - 1 \quad (5.3)$$

como una constante llamada *susceptibilidad eléctrica del dieléctrico*. Para el campo eléctrico tenemos:

$$E_{\kappa} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \quad (5.4)$$

usando:

$$\sigma_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0. \quad (5.5)$$

La ecuación. (5.4) muestra que el campo eléctrico en el interior del dieléctrico tiene la misma expresión de un campo en el vacío, superposición del campo debido a las cargas libres en las armaduras y del campo de una distribución uniforme de carga con densidad σ_p , que imaginamos depositada sobre las caras de la placa dieléctrica, con signo opuesto a la de las cargas libres sobre la armadura contigua. Como veremos, estas cargas no son ficticias, sino que son el resultado de procesos microscópicos que ocurren en el interior del dieléctrico bajo la acción del campo externo.

La *capacidad del condensador plano* de un dieléctrico es:

$$C_{\kappa} = \frac{q_0}{V_{\kappa}} = \kappa \frac{q_0}{V_0} = \kappa C_0, \quad (5.6)$$

la cual aumenta en el mismo factor κ por la cual se tuvo la disminución de la d.d.p. a los lados del condensador, de acuerdo con el hecho que la carga se mantiene constante. Ya que $\kappa > 1$, la ecuación (5.6) es una relación general, la cual vale para cualquier forma del condensador. Por lo tanto, deducimos que es suficiente reemplazar en todas las ecuaciones vistas hasta ahora ϵ_0 con:

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0, \quad (5.7)$$

llamada *constante dieléctrica absoluta del dieléctrico*. En particular, para el condensador plano, escribimos explícitamente

$$C_\kappa = \kappa C_0 = \frac{\kappa \epsilon_0 \Sigma}{h} = \frac{\epsilon \Sigma}{h}. \quad (5.8)$$

Notemos que el vacío puede ser considerado, por las formulas utilizadas, como un dieléctrico con constante dieléctrica absoluta ϵ_0 , constante dieléctrica relativa $\kappa = 1$ y susceptibilidad eléctrica $\chi = 0$. En la tabla 5.1 reportamos algunos valores de la constante dielectrica relativa para algunos materiales bajo el efecto de un campo eléctrico constant y a temperatura ambiente. También reportamos la rigidez dielectrica, o sea el valor máximo del campo eléctrico que puede ser aplicado al material sin que ocurran descargas eléctricas en su interior.

Costante dieléctrica relativa y rigidez		
Material	κ	\mathcal{R} (V/m)
aire	1.00059	$3 \cdot 10^6$
agua	80	—
aceite	2.5	$20 \cdot 10^6$
ambar	2.7	$20 \cdot 10^6$
vidrio	4 – 7	$20 \cdot 10^6$

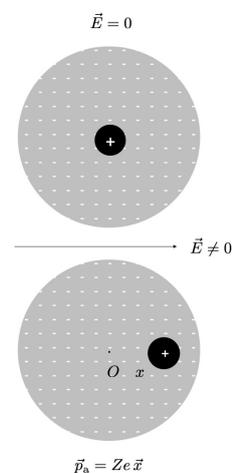
Table 5.1: Valores de constantes dieléctricas relativas de algunos materiales y de la rigidez dieléctrica.

5.1 Polarización de los dieléctricos

La explicación de los fenómenos observados se basa en la estructura eléctrica microscópica de la materia. Recordemos cómo el fenómeno de la inducción electrostática, que permite separar las cargas de los dos signos en los conductores, se debe a que en los conductores un cierto número de electrones por átomo está separado del propio átomo: en el interior de los conductores existe un gas de electrones prácticamente libres.

En los aislantes, en cambio, todos los electrones están ligados a los átomos y no se alejan espontáneamente de ellos. Para que se produzca la separación, hay que actuar desde el exterior, por ejemplo, frotando con un paño. Si se aplica un campo eléctrico externo al dieléctrico, sólo se produce un desplazamiento local de las cargas que componen los átomos. Estos efectos son muy pequeños para cada átomo individual: como veremos, los desplazamientos de carga son del orden de 10^{-15} m, comparables con el tamaño del núcleo. Sin embargo, el número de átomos por unidad de volumen es $n = 10^{25} - 10^{28} \text{ m}^{-3}$, dependiendo del estado de agregación, y el efecto global es medible.

En un átomo en condiciones normales y en ausencia de un campo eléctrico externo, la distribución de los electrones es, en promedio, simétrica con respecto al núcleo: se representa como una



nube de carga negativa que ocupa un área alrededor del núcleo con un radio igual al tamaño del átomo ($\sim 10^{-10}$ m); el centro de masa de la carga negativa coincide con el núcleo positivo.

Bajo la acción de un campo \vec{E} el centro (de masa) de la nube negativa sufre un desplazamiento en dirección opuesta al campo, el núcleo en dirección concordante al campo, y se alcanza una posición de equilibrio en la que este efecto se equilibra con la atracción entre las cargas de signo contrario. Llamada x la distancia entre los centros de las cargas, es decir, \vec{x} es el vector desde el centro de la carga negativa al núcleo, tiene sentido definir el *momento de dipolo eléctrico* de esta configuración como

$$\vec{p}_a = Ze\vec{x},$$

donde Z es el número atómico. De hecho, el sistema constituye un dipolo con carga total nula. Podemos afirmar que un átomo adquiere un momento de dipolo eléctrico microscópico \vec{p}_a , paralelo y concorde al campo \vec{E} , y el efecto acaba cuando se anula el campo. El fenómeno se llama *polarización electrónica*, mostrado esquemáticamente en figura 5.1.

En naturaleza, existen sustancias cuyas moléculas presentan un momento de dipolo intrínseco: son moléculas poliatómicas formadas por especies atómicas distintas (H_2O , CO_2 , NH_3) donde la distribución de las cargas es tal que el centro de las cargas negativas no coincide con el centro de las cargas positivas. En ausencia de campo eléctrico externo los dipolos moleculares están orientados al azar, debido a los choques de agitación térmica que destruyen eventuales configuraciones ordenadas debido a interacciones entre los dipolos. Cuando se aplica un campo \vec{E} , sobre cada momento de dipolo \vec{p}_0 actúan una fuerza que lleva a una orientación con el campo, esta orientación es parcial porque el proceso está afectado por la agitación térmica. El grado de alineación aumenta con el disminuir de la temperatura y al aumentar del campo eléctrico externo.

También este mecanismo que toma el nombre de *polarización por orientación*, lleva a un resultado que cada molécula adquiere un momento de dipolo eléctrico medio $\langle \vec{p} \rangle$ microscópico medio paralelo a \vec{E} , véase figura 5.2.

Consideremos ahora un volumen pequeño $\Delta\tau$ en torno a un punto O donde están contenidos ΔN átomos (o moléculas), el momento de dipolo resultante $\Delta\vec{p}$ está dado por $\Delta\vec{p} = \Delta N \langle \vec{p} \rangle$ y el momento de dipolo por unidad de volumen en el entorno O se escribe como:

$$\vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\tau} = \frac{\Delta N}{\Delta\tau} \langle \vec{p} \rangle = n \langle \vec{p} \rangle, \quad (5.9)$$

donde n es el número de átomos (o moléculas) por unidad de volumen. El vector \vec{P} que caracteriza el efecto de formación de los momentos de dipolo inducidos por el campo externo se llama *polarización del dieléctrico*. En la mayoría de los dieléctricos \vec{P} resulta proporcional a \vec{E} , y tal relación se escribe como:

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (5.10)$$

Los dieléctricos que obedecen a la ecuación (5.10) se llaman lineales; son materiales amorfos, con simetría espacial en todas las direcciones (o sea isotropía espacial).

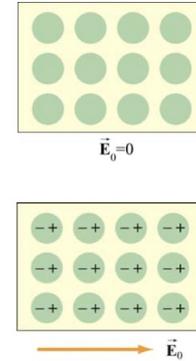


Figure 5.1: Orientación de moléculas con polarización intrínseca nula cuando $\vec{E} = 0$ (arriba) y $\vec{E} \neq 0$ (abajo).

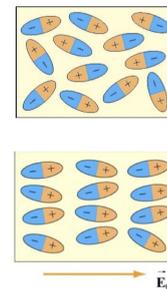


Figure 5.2: Orientación de moléculas con polarización intrínseca cuando $\vec{E} = 0$ (arriba) y $\vec{E} \neq 0$ (abajo).

5.2 Campo \vec{E} producido por un dieléctrico polarizado

Consideremos otra vez el condensador plano cargado con un dieléctrico, que suponemos polarizado uniformemente, o sea, el vector de polarización \vec{P} es contante en todos los puntos.

Dividamos ahora la placa en prismas infinitesimales de base $d\Sigma_0$, altura dh y volumen $d\tau = d\Sigma_0 dh$: cada uno de estos tiene un momento de dipolo

$$d\vec{p} = \vec{P}d\tau = Pd\Sigma_0 d\vec{h}$$

siendo $d\vec{h}$ orientado según \vec{P} . Recordemos que el potencial y el campo del dipolo de un sistema neutro de cargas no dependen de la distribución efectiva de las cargas; cualquier distribución que tenga el mismo momento de dipolo no es distinguible experimentalmente de la distribución real y es, por lo tanto, perfectamente equivalente, por lo que a sus efectos se refiere.

Por lo tanto, podemos substituir al prisma por un sistema constituido por dos cargas $\pm dq = \pm Pd\Sigma_0$, puestas en el vacío y distantes dh , distribuidas sobre las bases del prisma con densidad $\pm\sigma = \pm dq_p/d\Sigma_0 = \pm P$. Estas cargas tienen un momento de dipolo $d\vec{p}$ igual al prisma.

Si consideramos dos prismas consecutivos con una base en común, y si \vec{P} es contante, la carga $+dq$ de un prisma se anula con la carga $-dq$ del otro (con base común); repitiendo la operación para todos los prismas, al final solo quedan las cargas sobre las bases de los prismas que pertenecen a las caras de la placa.

El significado físico de la operación es de admitir que hay una compensación de cargas, desplazadas de las posiciones de equilibrios en el interior del dieléctrico uniformemente polarizado, pero no en la superficie límite donde la discontinuidad del medio impide la compensación. Aquí, la carga está localizada en una capa de espesor igual a las dimensiones atómicas y, por lo tanto, podemos tratarla como una distribución de cargas superficiales. La placa se puede considerar equivalente a dos distribuciones de cargas localizadas sobre las caras, con densidad $\pm\sigma_p = \pm P$.

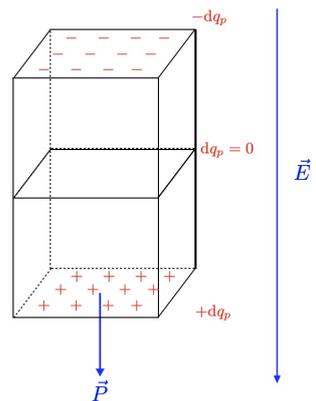
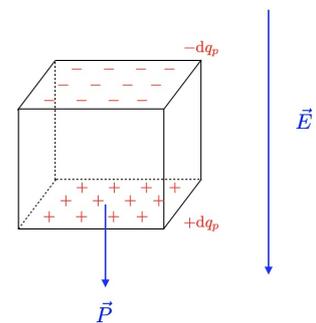
Hay que destacar que estas cargas de polarización no son libres como en los conductores: se producen debido a desplazamientos microscópicos locales, sino que permanecen unidas a átomos o moléculas. Por eso, cuando intentamos tomar una muestra, no podemos extraer ni siquiera una pequeña cantidad medible. Por la misma razón, cuando un dieléctrico ocupa completamente el espacio dentro de un condensador y las caras del dieléctrico entran en contacto en varios puntos con las cargas libres de las armaduras conductoras, no se produce ninguna transferencia de carga, aunque se enfrenten cargas de signo contrario.

Ahora podemos extender la discusión a un dieléctrico de forma cualquiera, siempre uniformemente polarizado; en un punto donde el versor \hat{u}_n normal a la superficie y orientado hacia el exterior forma con \vec{P} un ángulo θ , la carga $dq_p = Pd\Sigma_0$ está distribuida sobre la superficie $d\Sigma$, con $d\Sigma_0 = d\Sigma \cos \theta$; por lo tanto, la densidad superficial es:

$$\sigma_p = \frac{dq_p}{d\Sigma} = P \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma} = P \cos \theta = \vec{P} \cdot \hat{u}_n.$$

Por lo tanto, podemos decir que la *densidad superficial de cargas de polarización en un dieléctrico* es igual a la componente de \vec{P} en la normal a la superficie:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{u}_n = P \cos \theta. \quad (5.11)$$



Observando la relación anterior, deducimos:

- Si $0 \leq \theta \leq \pi/2$, la densidad es positiva;
- Si $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, la densidad es negativa;
- Si $\theta = \pi/2$, la densidad es cero (superficie paralela a \vec{P}).

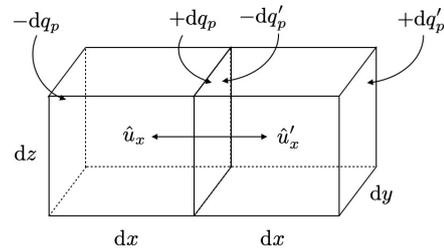
Consecutivamente, en un dieléctrico, de forma cualquiera, tendremos siempre una parte de las superficies cargada positivamente y la otra negativamente. Si el dieléctrico es uniforme, entonces no se manifiestan cargas en el interior del dieléctrico, y, por lo tanto, la suma de las cargas superficiales total tiene que ser cero; y tenemos

$$\oint \sigma_p d\Sigma = \oint \vec{P} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0,$$

siendo la integral extendida a toda la superficie del dieléctrico.

Supongamos que la superficie no sea uniforme y examinamos el valor de la carga en la base en común a los dos prismas infinitesimales contiguos (como lo visto anteriormente), con el eje paralelo al eje x y área de base $d\Sigma = dydz$. Utilizando la ecuación (5.11) tendremos

$$-dq'_p = \vec{P}' \cdot \hat{u}'_x d\Sigma = -P'_x dydz,$$



$$dq_p = \vec{P} \cdot \hat{u}_x d\Sigma = P_x dydz,$$

$$dq_p - dq'_p = -(P'_x - P_x) dydz = -\frac{\partial P_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Notemos que si \vec{P} cambia según el eje x no existe compensación entre las cargas y aparece una carga de polarización también en el interior del dieléctrico. El resultado obtenido se generaliza a todo el volumen infinitesimal $d\tau = dx dy dz$, en el cual estará una carga

$$dq_p = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) d\tau$$

distribuida con densidad

$$\rho_p = \frac{dq_p}{d\tau} = -\nabla \cdot \vec{P}. \quad (5.12)$$

Por lo tanto, un dieléctrico no uniforme tendrá una polarización en su superficie, y también tendrá una densidad espacial de carga de polarización igual en cada punto al opuesto de la divergencia del vector \vec{P} .

También en este caso, la carga total de polarización del dieléctrico tiene que ser nula, y tenemos $q_{\text{tot}} = q_{\text{superficie}} + q_{\text{volumen}}$:

$$\oint \sigma_p d\Sigma + \int_{\tau} \rho_p d\tau = 0,$$

o sea,

$$\oint \vec{P} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{P} d\tau.$$

Si conocemos la carga de polarización, podemos calcular el potencial y el campo eléctrico en cada punto del dieléctrico

$$V(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\vec{P} \cdot \hat{u}_n d\Sigma}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\nabla \cdot \vec{P} d\tau}{r}, \quad (5.13)$$

donde r es la distancia de Q al elemento de carga de polarización. Si están presentes también cargas libres, por ejemplo, distribuidas sobre las superficies de un conductor, entonces a la última relación hay que añadir su contribución:

$$V'(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\sigma' d\Sigma'}{r}. \quad (5.14)$$

De la expresión del potencial se obtiene el campo eléctrico como $\vec{E} = -\nabla V$.

Las fuentes del campo eléctrico son las cargas libres localizadas en las superficies de los conductores y, también, las cargas de polarización proporcionadas por σ_p y ρ_p . Cuando $\nabla \cdot \vec{P} = 0$, la carga de polarización en el interior del dieléctrico se anula y queda solamente la contribución debido a la carga de superficie. La condición $\vec{P} = \text{constante}$ lleva necesariamente a $\nabla \cdot \vec{P} = 0$

5.3 El campo eléctrico en un dieléctrico polarizado

Concentremos ahora sobre el campo eléctrico en el interior de un dieléctrico polarizado. Consideremos el caso más sencillo: una lastra de material dieléctrico en un condensador plano cargado. Hemos visto que la polarización de un dieléctrico conlleva la aparición de cargas superficiales distribuidas con una densidad σ_p , así, tenemos dos distribuciones $\pm\sigma_0$ y $\pm\sigma_p$. En el espacio entre las armaduras, el campo es $E_0 = \sigma_0/\epsilon_0$, mientras que en el interior del dieléctrico, el valor sería uniforme pero inferior a E_0 :

$$E = \frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}, \quad (5.15)$$

Si tomamos dos puntos A y B cualquiera en las caras del dieléctrico, la d.d.p entre estos puntos sería

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = E h$$

y es la misma cualquiera sea el recorrido entre los dos puntos, siendo el campo conservativo.

Es necesario aclarar el significado del campo que aparece en la integral. Para un recorrido Γ_1 externo al dieléctrico, se considera el campo eléctrico en el vacío. En el interior, cualquier recorrido encuentra situaciones muy particulares. El material está compuesto por núcleos y por electrones, y los campos eléctricos locales son muy distintos según que la línea de integración pase cerca a un núcleo o aun espacio vacío entre los átomos. El campo eléctrico en la superficie de un proton es $\sim 10^{21}$ V/m, mientras que fuera del átomo es prácticamente nulo.

El campo que aparece en la integral es el *campo total*, debido a las cargas externas y también a las cargas atómicas, y es rápidamente variable de punto a punto, debido a que las contribuciones atómicas son completamente casuales por intensidad y dirección. Por otro lado, también a distancias pequeñísimas, la fuerza es de tipo coulombiana y podemos tratar los campos eléctricos locales como campos conservativos; llamando \vec{E}_i el campo interno, podemos escribir, para cualquier recorrido Γ_i

$$\int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = E h$$

y, por lo tanto, definir un *campo eléctrico medio macroscópico* en el interior del dieléctrico

$$E = \frac{1}{h} \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{s}$$

coincidente con el campo que producen las distribuciones $\pm\sigma_0$ y $\pm\sigma_p$ en el espacio ocupado por el dieléctrico, considerado como si fuera vacío. Observemos que el efecto de las cargas de polarización es el de disminuir el campo debido a las cargas libres, así, el campo interno es siempre menor de aquel que tendríamos si no estuviera el dieléctrico; la media en un punto se puede expresar como

$$\langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \vec{E}_i d\tau.$$

La determinación experimental del campo eléctrico medio en el dieléctrico, por ejemplo, por medio de una carga de prueba donde mediríamos la fuerza, no es en la realidad posible; la introducción de una carga de prueba, de dimensiones tales para que sea sensible al valor medio macroscópico del campo puede ser efectuada solo creando un hueco en el dieléctrico. La dificultad es superable conceptualmente operando de la siguiente manera: se realiza en el dieléctrico una cavidad cilíndrica de base Σ y altura s , paralela a la dirección de \vec{E} , con la condición $\Sigma/s^2 \simeq 0$, o sea, la cavidad es larga y sutil, de modo que las cargas de polarización que aparecen sobre las bases perturben poco al sistema y a la medición (sobre las paredes laterales no aparecen cargas de polarización ya que la superficie es paralela al campo eléctrico). Consideremos ahora una línea cerrada $ABCD$ con los lados AB y CD paralelos al eje de la cavidad y contenidos, respectivamente, en la cavidad y en el dieléctrico, y los otros dos lados de un orden infinitesimal mayor. La circulación del campo eléctrico en esta línea cerrada tiene que ser nula (estamos trabajando con campos electroestáticos), lo cual nos proporciona

$$\vec{E} \cdot \vec{AB} + \langle \vec{E} \rangle \cdot \vec{CD} = E|AB| - \langle E \rangle |CD| = 0,$$

Con \vec{E} el campo en la cavidad y con $\langle \vec{E} \rangle$ el campo medio en el dieléctrico. Por lo tanto,

$$\vec{E} = \langle \vec{E} \rangle :$$

el *campo eléctrico medido en la cavidad es igual al campo eléctrico medio en el dieléctrico*. Es obvio que el resultado depende de la forma de la cavidad, esto porque si la superficie es extendida, entonces aparece una distribución de cargas de polarización en las superficies perturbando el campo eléctrico total en la cavidad.

5.4 Vector inducción eléctrica

Hemos visto que el campo eléctrico producido por cargas en reposo es conservativo también si existen dieléctricos polarizados. Por lo tanto, siguen siendo válidas las dos formulaciones, integral y local,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{E} = 0,$$

y la propiedad equivalente de que el campo se pueda obtener como gradiente de la función potencial, $\vec{E} = -\nabla V$.

También, la ley de Gauss sigue siendo válida, lo único distinto es considerar también las cargas de polarizaciones

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q + q_p}{\epsilon_0}. \quad (5.16)$$

Definición 5.4.1 El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la suma de las cargas libres y de las cargas de polarización contenidas en la superficie.

En forma diferencial

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}. \quad (5.17)$$

recordando de la ecuación (5.12) tenemos:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho - \nabla \cdot \vec{P} \implies \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

o en forma integral:

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma = q.$$

Introducimos el vector \vec{D} , llamado *inducción dieléctrica*:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \quad (5.18)$$

la definición es general, válida para cualquiera relación entre \vec{P} y \vec{E} . Las leyes anteriores se escriben como:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (5.19)$$

$$\oint \vec{D} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = q. \quad (5.20)$$

Definición 5.4.2 El flujo del vector \vec{D} a través de una superficie cerrada, que contiene en general cargas libres y cargas de polarización, depende sólo de las cargas libres.

La propiedad no es trivial ya que la superficie Σ puede intersectar un dieléctrico, en vez de contenerlo completamente, por lo tanto, la carga de polarización no es cero en Σ .

Para aclarar el argumento, es oportuno obtener la ecuación (5.20) razonando sobre la forma integral de la ley de Gauss ecuación (5.16), con referencia a la figura 5.3. La superficie cerrada Σ contiene en su interior la carga libre q_0 y una parte de un dieléctrico polarizado; llamamos Σ_1 a la superficie del dieléctrico interna y Σ_2 a la superficie de intersección con el dieléctrico, además, τ es el volumen de dieléctrico en Σ , véase Fig. 5.3. Tenemos:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_0}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1} \sigma_p d\Sigma + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_p d\tau,$$

donde ρ_p es la densidad superficial y ρ_p la densidad espacial de carga de polarización.

Usamos ahora las ecs. (5.11), (5.12) y el teorema de la divergencia para escribir

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1} \sigma_p d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1} \vec{P} \cdot \hat{u}_n d\Sigma,$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_p d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{P} d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \vec{P} \cdot \hat{u}_n d\Sigma.$$

Por lo tanto, en la suma las integrales extendidas a Σ_1 se omiten y se obtiene:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_2} \vec{P} \cdot \hat{u}_n d\Sigma :$$

el flujo de \vec{E} a través de Σ contiene una contribución, en general no nulo, debido a la carga de polarización. Como la parte de Σ no coincidente con Σ_2 , o sea, en la parte externa al dieléctrico, la \vec{P} es nula, es lícito escribir

$$\int_{\Sigma_2} \vec{P} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \oint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

y concluyendo, obtenemos

$$\int_{\Sigma} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma = q_0 .$$

Si hubiésemos elegido Σ completamente en el interior del dieléctrico, donde no existen cargas libres, no habríamos tenido el termino en q_0 y aquello con σ_p , con lo cual habríamos obtenido

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_p d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{P} d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \oint \vec{P} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

o sea, $\Phi(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = 0$. Por lo tanto, terminamos diciendo que en un espacio donde no existen cargas libres tenemos

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \oint \vec{D} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0 : \quad (5.21)$$

en ausencia de cargas libres el \vec{D} es solenoidal. En fin, hay que añadir que el vector inducción eléctrica no es un campo conservativo, ya que no es siempre posible encontrar su circulación nula.

La utilidad de las ecuaciones (5.19) y (5.20) es bastante obvia! Normalmente se conocen las cargas libres y no las cargas de polarización (mucho más difícil de determinar, dependiendo de la distribución de la materia al interior del dielectrico). Por lo tanto es posible, con los métodos vistos hasta ahora, calcular el vector \vec{D} ; y, a través de la ecuación (5.18) y si se conoce la relación entre \vec{E} y \vec{P} , se pueden determinar el campo eléctrico y la polarización, y desde la última, la densidad de carga de polarización.

5.5 Dieléctricos isotropos y anisotropos

Hemos ya definido como los dieléctricos lineales tienen \vec{P} y \vec{E} paralelos, y, por eso,

$$\vec{P} = \epsilon_0(\kappa - 1)\vec{E} = \epsilon_0\chi\vec{E} .$$

Y el vector inducción eléctrica será

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon_0\kappa\vec{E} = \epsilon\vec{E} \quad (5.22)$$

e introduciéndola en la ecuación (5.10) obtenemos

$$\vec{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \vec{D} = \frac{\chi}{1 + \chi} \vec{D} . \quad (5.23)$$

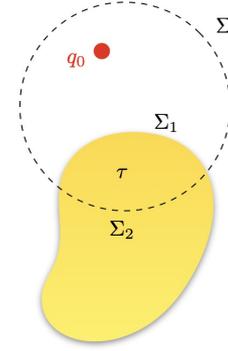


Figure 5.3: Flujo del campo eléctrico con un dieléctrico

En un medio lineal, los vectores de polarización, inducción eléctrica y campo eléctrico son paralelos. Si el dieléctrico es lineal y homogéneo, o sea, con densidad constante, la constante dieléctrica relativa es también una constante, y desde la ecuación (5.23) obtenemos:

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \nabla \cdot \vec{D}.$$

En ausencia de cargas libres en el dieléctrico, $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ y, por lo tanto,

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0. \quad (5.24)$$

En un dieléctrico lineal y homogéneo, la densidad espacial de carga de polarización es nula y las cargas de polarización están solamente distribuidas en la superficie.

Cuando tenemos un dieléctrico lineal, pero la constante relativa cambia de punto a punto, entonces, desde la ecuación (5.23), tenemos:

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \nabla \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \nabla \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} \right).$$

También en ausencia de cargas libres, la divergencia de \vec{P} no es nula y depende del gradiente de la función $(\kappa - 1)/\kappa$:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\vec{D} \cdot \nabla \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} \right). \quad (5.25)$$

Los dieléctricos lineales poseen simetría espacial, o sea, son isotropos. Para los dieléctricos anisotropos, como los cristales, la polarización \vec{P} no es en general paralela al campo \vec{E} y la relación entre \vec{P} y \vec{E} se expresa a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z), \\ P_y &= \epsilon_0 (\chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z), \\ P_z &= \epsilon_0 (\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z) \end{aligned}$$

donde χ_{ij} constituyen el *tensor susceptibilidad eléctrica*; en la realidad son 6 ya que el tensor es simétrico.

Ejercicio 5.1 Una esfera conductora de radio R y carga q se sumerge en un dieléctrico indefinido, lineal y homogéneo de constante dieléctrica relativa κ . Calcular el campo eléctrico $E(r)$, la polarización $P(r)$ y la densidad de carga de polarización.

Solución. En ausencia de dieléctrico el campo eléctrico en el exterior de la esfera está dado por

$$\vec{E}_0(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r;$$

en particular, para $r = R$, o sea en la superficie de la esfera

$$\vec{E}_0(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{u}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_r.$$

Con el dieléctrico, aplicamos la ley de Gauss (5.20) al vector \vec{D} en una superficie con $r > R$, concéntrica a la esfera:

$$\Phi(\vec{D}) = \oint \vec{D} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 4\pi r^2 D = q,$$

$$\vec{D}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

y según las ecuaciones (5.22) y (5.23)

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\epsilon} = \frac{q}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{\vec{E}_0(r)}{\kappa}. \quad (5.26)$$

El campo eléctrico en el dieléctrico infinito se reduce de un factor κ con respecto al campo en el vacío. Para $r = R$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\kappa\epsilon_0 R^2} \hat{u}_r = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} \hat{u}_r,$$

es como si la presencia del dieléctrico llevase a una reducción de la densidad de carga de un factor κ . El efecto está debido a las carga de polarización, de signo opuesto a q , que aparecen en la superficie del dieléctrico a contacto con el conductor. De hecho, la polarización es

$$\vec{P}(r) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \vec{D} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{q}{4\pi r^2} \hat{u}_r$$

y en la superficie del dieléctrico ($r = R$)

$$\vec{P}(r) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{q}{4\pi R^2} \hat{u}_r = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma \hat{u}_r$$

y la densidad es

$$\sigma_p = \vec{P}(R) \cdot \hat{u}_n = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma \hat{u}_r \cdot \hat{u}_n = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma$$

porque el versor \hat{u}_n sale de la superficie y es opuesto al versor \hat{u}_r . La carga de polarización es

$$q_p = 4\pi R^2 \sigma_p = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} 4\pi R^2 \sigma = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} q$$

y para $r \geq R$, el campo eléctrico efectivo es

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + q_p}{r^2} \hat{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa}\right) = \frac{q}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2}$$

de acuerdo a la ecuación (5.26).

La polarización en el dieléctrico es una función de tipo $k\hat{u}_r/r^2$ y se verifica que $\nabla \cdot \vec{P} = 0$ en cualquier lugar. También si la polarización no es uniforme, la densidad espacial de carga es nula. ■

5.6 Discontinuidades

En la sección 3.3 hemos ya estudiado la discontinuidad del campo eléctrico cuando atraviesa una superficie donde está depositada una carga. Una situación de este tipo se encuentra siempre cuando se atraviesa la superficie límite de un dieléctrico polarizado y, por lo tanto, en la superficie Σ de separación entre dos dieléctricos distintos, con constantes κ_1 y κ_2 . Llamemos, respectivamente, \vec{E}_1 , \vec{D}_1 , \vec{P}_1 al campo eléctrico, inducción eléctrica y polarización en el primer medio, y como \vec{E}_2 , \vec{D}_2 , \vec{P}_2

en el segundo. Sabemos que la componente tangencial de \vec{E} es constante en el pasaje a través Σ , la cual se expresa como:

$$E_{1t} = E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 = E_{2t}. \quad (5.27)$$

Aplicamos ahora la ley de Gauss al vector \vec{D} , eligiendo por superficie de integración un cilindro de altura infinitesimal ortogonal a Σ y con las bases en los dos dieléctricos. En el interior de la superficie del cilindro no existen cargas libres y, por lo tanto,

$$\vec{D}_2 \cdot \hat{u}_2 d\Sigma + \vec{D}_1 \cdot \hat{u}_1 d\Sigma = (D_{2n} - D_{1n}) d\Sigma = 0 \implies D_{1n} = D_{2n}, \quad (5.28)$$

o sea, la componente normal no varía. La relación anterior se puede expresar como:

$$\epsilon_0 E_{1n} + P_{1n} = \epsilon_0 E_{2n} + P_{2n}$$

y, por lo tanto,

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{P_{1n} - P_{2n}}{\epsilon_0},$$

que se corresponde a la ecuación (3.11). Desde la ecuación (5.28) y utilizando la relación $\vec{D} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$, tenemos

$$\kappa_1 \epsilon_0 E_1 \cos \theta_1 = \kappa_2 \epsilon_0 E_2 \cos \theta_2$$

y dividiéndola por la ecuación (5.27), tenemos

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}. \quad (5.29)$$

La discontinuidad de la componente normal de \vec{E} , junto a la continuidad de la componente tangencial, conlleva un cambio de dirección de las líneas de fuerza del campo eléctrico, fenómeno que se llama refracción de las líneas de fuerza.

Ejercicio 5.2 Una placa dieléctrica lineal, homogénea, de área Σ y espesor s , se coloca en un condensador plano cargado paralelamente a las armaduras de área Σ y distancia, entre las armaduras h . Calcular los valores de los campos \vec{E} , \vec{P} , \vec{D} y la d.d.p. entre las armaduras al variar del espesor s de la placa.

Solución. Ya hemos discutido parcialmente esta situación (en la introducción), a la cual ahora aplicamos las condiciones de discontinuidad. Llamemos $E_0 = \sigma_0/\epsilon_0$ el campo en ausencia del dieléctrico, $D_0 = \epsilon_0 E_0$ la inducción dielectrica y $V_0 = E_0 h = \sigma_0 h/\epsilon_0$ la d.d.p. entre las armaduras. Introduciendo el dieléctrico, en sus caras aparecen cargas de polarización distribuidas con densidad σ_p . En el espacio vacío el campo eléctrico y la inducción dielectrica conservan sus valores; pasando en el dieléctrico la inducción dielectrica no varía

$$\epsilon_0 E_0 = \epsilon E = \kappa \epsilon_0 E \implies E_0 = \kappa E.$$

La polarización, nula en el vacío, en el dieléctrico vale

$$P = \epsilon_0 (\kappa - 1) E = \epsilon_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa} E_0 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} D_0 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0, ;$$

este es el valor absoluto de la densidad de carga de polarización. Estas cantidades no dependen

del espesor del dieléctrico. La d.d.p.

$$V = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}(h-s) + \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0}s = \frac{\sigma_0 h}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{s}{h}\right) = V_0 \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{s}{h}\right).$$

La d.d.p. disminuye linealmente con s y es mínima cuando $s = h$, o sea cuando se llena por completo el condensador: de hecho, en este caso, $E = E_0/\kappa$ en cualquier lugar y la integral de línea toma su valor mínimo que es $V = E h = E_0 h/\kappa = V_0/\kappa$.

La d.d.p. se puede también escribir como

$$V = \frac{\sigma_0 \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} \left(h - \frac{\kappa-1}{\kappa} s\right)$$

donde $\sigma_0 \Sigma = q$ es la carga libre en las armaduras. Por lo tanto

$$\frac{V}{q} = \frac{1}{C} = \frac{h-s}{\epsilon_0 \Sigma} + \frac{s}{\epsilon_0 \kappa \Sigma},$$

donde C es la capacidad del condensador parcialmente lleno de dieléctrico. De la fórmula se desprende que la capacidad no depende de la posición de la placa, y que el sistema puede interpretarse como dos condensadores en serie, uno vacío con capacidad $C_0 = \epsilon_0 \Sigma/(h-s)$, el otro con dieléctrico, de capacidad $C_\kappa = \epsilon_0 \kappa \Sigma/s$. En realidad, no hay armadura conductora entre el primer y el segundo condensador en serie. Sin embargo, se puede imaginar colocar una placa conductora muy fina en la cara del dieléctrico, al cual se aplica un potencial con densidad de carga $\pm\sigma_0$, y se obtienen realmente dos condensadores en serie, sin alterar el estado eléctrico del sistema. ■

Ejercicio 5.3 Un condensador plano, con armaduras de área Σ y separadas por una distancia h , está lleno de dos placas dieléctricas, una de espesor d_1 y constante dieléctrica relativa κ_1 , la otra de espesor d_2 y constante dieléctrica relativa κ_2 . Se aplica una d.d.p. V a los extremos del condensador. Calcular los valores E_1 y E_2 del campo eléctrico en los dos dieléctricos y la densidad de carga de polarización σ_p en la superficie de separación entre los dos dieléctricos.

Solución. En cada dieléctrico el campo eléctrico es uniforme y ortogonal a las armaduras; en la superficie de separación el campo es discontinuo:

$$\kappa_1 E_1 = \kappa_2 E_2 \quad (5.30)$$

La anterior expresa la continuidad del vector inducción dieléctrico \vec{D} al cruzar una superficie de separación. En módulo \vec{D} es igual a la densidad de carga libre en las armaduras

$$D = \epsilon_0 \kappa_1 E_1 = \epsilon_0 \kappa_2 E_2 = \sigma_0.$$

La d.d.p. entre las armaduras se escribe

$$V = \int_0^h \vec{E} \cdot d\vec{h} = E_1 d_1 + E_2 d_2;$$

y poniéndola a sistema con la ecuación (5.30) se encuentra

$$E_1 = \frac{\kappa_2 V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \kappa_1}, \quad E_2 = \frac{\kappa_1 V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \kappa_2}, \quad (5.31)$$

y por lo tanto

$$D = \frac{\epsilon_0 \kappa_1 \kappa_2 V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2}.$$

La densidad de carga de polarización en los dos dieléctricos son

$$\sigma_1 = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1} D, \quad \sigma_2 = \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2} D$$

y en las superficies de separación

$$\sigma_p = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2} D = \frac{\epsilon_0 (\kappa_1 - \kappa_2) V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2},$$

positiva o negativa según que κ_1 sea mayor o menor de κ_2 .

Desde las relaciones anteriores resulta también

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right) = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} \left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right)$$

siendo $q = \sigma_0 \Sigma$ la carga libre en las armaduras. Finalmente

$$\frac{V}{q} = \frac{1}{C} = \frac{d_1}{\epsilon_0 \kappa_1 \Sigma} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \kappa_2 \Sigma}.$$

La capacidad equivalente es aquella de dos condensadores en serie. La d.d.p. se reparte entre los dos condensadores en

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2 d_1}{\kappa_1 d_2}$$

■

5.7 Energía electrostática en los dieléctricos

El razonamiento hecho para calcular la energía electrostática de un condensador plano cargado con carga q puede ser repetido también si en el espacio entre las armaduras está puesto un material dieléctrico con constante dieléctrica relativa κ , encontrando el resultado:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 \Sigma^2}{2\epsilon \Sigma / h} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \Sigma h. \quad (5.32)$$

Por una parte, la energía es debida al campo \vec{E} de las propiedades del material. Podemos definir la cantidad

$$u_e = \frac{U_e}{\Sigma h} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}, \quad (5.33)$$

la cual representa la *densidad de energía electrostática*. También ahora la ecuación (5.33) tiene validez general: en una región donde existe un campo eléctrico la energía electrostática está

distribuida con densidad dada por la ecuación (5.33) y vale:

$$U_e = \int_{\tau} u_e d\tau = \int_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon E^2 d\tau.$$

En los dielectricos anisotropos, la ecuación (5.33) vale

$$u_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (5.34)$$

y el producto escalar pone en evidencia que en estos dielectricos los campos \vec{E} y \vec{D} no son paralelos.

Ya que para rellenar un volumen particular con un campo eléctrico necesitamos gastar por unidad de volumen el trabajo $1/2\epsilon_0 E^2$ y, si en el volumen está un dielectrico, por el mismo campo eléctrico $1/2\epsilon_0 \kappa E^2$, la diferencia $1/2\epsilon_0(\kappa - 1)E^2$ representa evidentemente el trabajo necesario para polarizar la unidad de volumen del dielectrico (trabajo que en el vacío es cero). De hecho, para separar de dx la carga q de la carga $-q$, necesitamos gastar el trabajo $dW = E q dx = E dp$, donde dp es el momento de dipolo eléctrico creado por la separación dx ; por unidad de volumen

$$dW = E dp = E \epsilon_0(\kappa - 1)dE$$

e integrando se obtiene $1/2\epsilon_0(\kappa - 1)E^2$.

Ejercicio 5.4 En un condensador plano, cuyas armaduras son cuadradas de lado d separadas por una distancia h , se introduce parcialmente una lámina dieléctrica de espesor h .

Suponiendo que la carga libre en las armaduras sea constante, calcular las densidades de carga, d.d.p., capacidad y la energía electrostática en función de la posición de la lámina.

Solución. Las armaduras son equipotenciales y, por tanto, el campo eléctrico es el mismo tanto en la región vacía $d - x$ como en la región llena de dieléctrico x .

Dados σ_1 y σ_2 las densidades de carga libre en las armaduras en las dos zonas, tenemos

$$E = E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \implies \sigma_2 = \kappa \sigma_1.$$

La mayor densidad de carga libre en las armadura en correspondencia del dieléctrico compensa la carga de polarización

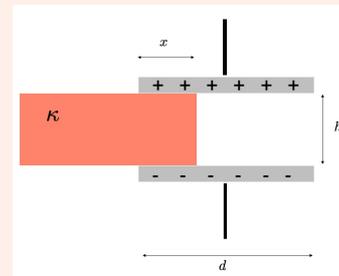
$$\sigma_p = \sigma_2 - \sigma_1 = (\kappa - 1)\sigma_1 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_2.$$

El vector inducción dielectrica es mayor en el dieléctrico que en el vacío

$$D_1 = \epsilon_0 E, \quad D_2 = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \epsilon_0(\kappa - 1)E = \epsilon_0 \kappa E = \kappa D$$

La carga total del condensador es

$$q = q_1 + q_2 = \sigma_1(d - x)d + \sigma_2 x d$$



y por lo tanto, siendo $\sigma_2 = \kappa \sigma_1$, tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_1(x) &= \frac{q}{d[d + (\kappa - 1)x]}, & \sigma_2(x) &= \frac{\kappa q}{d[d + (\kappa - 1)x]}, \\ E(x) &= \frac{\sigma_1(x)}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2(x)}{\kappa \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 d[d + (\kappa - 1)x]}, \\ \sigma_p &= \sigma_2(x) - \sigma_1(x) = \frac{(\kappa - 1)q}{d[d + (\kappa - 1)x]}.\end{aligned}$$

La d.d.p. en los extremos del condensador es

$$V(x) = E h = \frac{\sigma_1(x)}{\epsilon_0} h = \frac{\sigma_2(x)}{\kappa \epsilon_0} h = \frac{q h}{\epsilon_0 d[d + (\kappa - 1)x]}$$

y la capacidad del condensador vale

$$C(x) = \frac{q}{V(x)} = \frac{\epsilon_0 d[d + (\kappa - 1)x]}{h} = \frac{\epsilon_0 d(d - x)}{h} + \frac{\epsilon_0 \kappa d(d - x)}{h},$$

equivalente, como podíamos esperar, a la capacidad de dos condensadores en paralelo.

La energía electrostática es

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 h}{2\epsilon_0 d[d + (\kappa - 1)x]} \quad (5.35)$$

y se verifica rápidamente que esta expresión corresponde a

$$U_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d(d - x)h + \frac{1}{2} \epsilon_0 \kappa E^2 d x h$$

Ejercicio 5.5 Calcular la fuerza con la cual la lámina de dieléctrico, en el ejemplo anterior, está atraída dentro del condensador. Examinar también el caso cuando la d.d.p. del condensador se queda constante.

Solución. La energía electrostática está dada por la ecuación (5.35); el desplazamiento de la lámina conlleva una variación de energía y al final, cuando el condensador está completamente lleno, la energía es mínima. Siendo el sistema a carga constante, o sea aislado, la disminución de energía corresponde al trabajo dado por la fuerza eléctrica, la cual vale:

$$F = -\frac{dU_e}{dx} = \frac{q^2 h}{2\epsilon_0 d} \frac{\kappa - 1}{[d + (\kappa - 1)x]^2},$$

o sea, utilizando la expresión del campo calculada en el ejemplo anterior

$$F(x) = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\kappa - 1) E^2(x) \Sigma; \quad (5.36)$$

donde $\Sigma = h d$ es la superficie de la lámina donde actúa la fuerza \vec{F} , la cual depende de la x . El proceso considerado pasa a carga constante. Si se mantiene constante la d.d.p. entre las armaduras, conectándolo a un generador, el campo eléctrico es siempre constante, independientemente de la posición de la lámina, y vale $E = V/h$. La energía electrostática se escribe en la

forma

$$U_e = \frac{1}{2}C(x)V^2 = \frac{V^2}{2}\epsilon_0\frac{d}{h}[d + (\kappa - 1)x].$$

Para mantener constante la d.d.p. V en presencia de un aumento de la capacidad $dC(x)$ el generador tiene que desplazar la carga $dq = V dC$ desde la armadura negativa hacia aquella positiva cumpliendo trabajo $dW_{\text{gen}} = V dq = V^2 dC$ a costa de su propia energía U_{gen} la cual varía $dU_{\text{gen}} = -dW_{\text{gen}} = -V^2 dC$. Observamos que encontramos la mitad de este trabajo en el aumento de energía electrostática dU_{gen} y por lo tanto la otra mitad se gasta como trabajo para hacer avanzar la lámina,

$$dW = \frac{V^2}{2}dC = dU_e;$$

la fuerza, independiente de x , será

$$F = \frac{dU_e}{dx} = \frac{V^2\epsilon_0 d(\kappa - 1)}{2h}.$$

Porque

$$dU_{\text{tot}} = d(U_{\text{gen}} + U_e) - V^2 dC + \frac{V^2}{2}dC = -\frac{V^2}{2}dC = -dU_e$$

la fuerza recién calculada es $-dU_{\text{tot}}/dx$. Substituyendo $V \rightarrow Eh$

$$F = \frac{1}{2}\epsilon_0(\kappa - 1)E^2 h d = \frac{1}{2}\epsilon_0(\kappa - 1)E^2 \Sigma,$$

formalmente igual a (5.36). Resumiendo: en el proceso a carga constante donde $dU_{\text{tot}} = dU_e$

$$F = -\left(\frac{dU_e}{dx}\right)_{q=\text{const}},$$

mientras que en el proceso a potencial constante donde $dU_{\text{tot}} = -dU_e$

$$F = \left(\frac{dU_e}{dx}\right)_{V=\text{const}}. \quad (5.37)$$

Hemos reencontrado en este caso (que es físicamente distinto) las relaciones en la sección 4.5. De hecho, éstas tienen un carácter general: *la fuerza que actúa se puede siempre calcular como el opuesto del gradiente de la energía electrostática si el proceso es a carga constante y como gradiente de la misma energía si el proceso es a potencial constante.* ■



6. Corriente eléctrica

Los materiales conductores sólidos están constituidos por un retículo espacial en cuyos vértices se encuentran los iones positivos (átomos que perdieron uno o más electrones) y en su interior se mueven los electrones libres. En un metal, estos son los únicos portadores de carga, y en los metales el número de portadores por unidad de volumen son $b \approx 10^{28}$ electrones/m³.

El movimiento de los electrones libres en un conductor en equilibrio electrostático es completamente desordenado. En cualquier volumen τ , pequeño en escala macroscópica, pero que contiene un número N de electrones suficientemente elevado (con $\tau = 10^{-18}$ m⁻³, $N = n\tau \simeq 10^{11}$ electrones), la velocidad media es cero:

$$\vec{v}_m = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i = 0$$

donde llamamos \vec{v}_i las velocidades de los electrones. Esto quiere decir que no existe una dirección de preferencia para el movimiento de los electrones.

Si conectamos dos conductores C_1 y C_2 aislados, con potenciales V_1 y V_2 distintos, se llega a una condición de equilibrio donde ambos conductores llegan al mismo potencial V . En el proceso, un cierto número de electrones pasa de un conductor con potencial menor a otro con potencial mayor bajo la acción del campo eléctrico debido a la d.d.p ΔV . Este movimiento ordenado de electrones en una cierta dirección constituye una *corriente eléctrica* y el fenómeno es un ejemplo de *conducción eléctrica*.

La corriente, en este caso específico, dura muy poco: el límite inferior está dado por las dimensiones típicas del conductor dividida por la velocidad de la luz; la corta duración impide el estudio sistemático del fenómeno.

Por esta razón, es necesario tener un dispositivo capaz de mantener una d.d.p., y, por lo tanto, un campo eléctrico entre los dos conductores en contacto, o sea, entre dos puntos de un mismo conductor. Así, el flujo de electrones puede durar por mucho tiempo y, consecutivamente, en el conductor se instaura una corriente eléctrica estable en un régimen de equilibrio dinámico y no en un equilibrio electrostático.

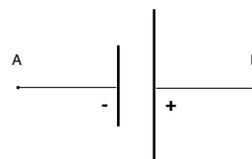
Cualquier dispositivo con estas características se llama *generador de fuerza electromotriz (f.e.m.)*. Históricamente, el primer dispositivo fue inventado por Alessandro Volta en el 1800: este

permitió por un lado los estudios de la conducción en los metales y en otros medios conductores, por otro lado, el descubrimiento de los efectos magnéticos de una corriente eléctrica (argumentos que vendrán tratados en este curso).

En su versión original, la célula o pila voltaica está formada por una serie de elementos, cada uno de los cuales consta de un disco de zinc, un tampón empapado en una solución acuosa de ácido sulfúrico y un disco de cobre: el disco de cobre está cargado positivamente y el de zinc negativamente. Si se mide con un instrumento electrostático, es decir, sin pasar corriente, la d.d.p. entre los dos discos se encuentra un valor fijo, característico del par de metales y que con m elementos es m veces el del elemento único: este valor se llama f.e.m. de la pila. Conectando un conductor, por ejemplo un hilo metálico, al extremo (o a los polos) de la pila, se establece en ésta una corriente eléctrica constante, también conocida como corriente continua; en realidad, con una pila Volta, la corriente disminuye lentamente con el tiempo. En la actualidad existe una gran variedad de baterías, incluidas las de los coches, que funcionan básicamente según el mismo principio que descubrió Volta. El trabajo necesario para mantener un movimiento ordenado de las cargas en un circuito cerrado se consigue en la pila transformando la energía química en energía eléctrica. Sin embargo, en otros tipos de generadores f.e.m. se produce la transformación de la energía mecánica en energía eléctrica.

Volveremos más adelante al funcionamiento de la pila de Volta y a las características eléctricas generales de los generadores de f.e.m.; por ahora, nos limitaremos a considerarlos como dispositivos capaces de mantener una d.d.p. constante en los extremos de un conductor y, por tanto, una corriente eléctrica continua a través de él.

El símbolo utilizado para este tipo de generadores se muestra en el lateral; recuerda a una pila (pero es válido sea cual sea el mecanismo de funcionamiento interno) y al hecho de que las cargas de signo contrario se engrosan en los dos extremos A y B , conocidos como los polos positivo y negativo del generador. La conducción eléctrica, que en los metales se debe al movimiento de los electrones, también es posible en los gases y líquidos si contienen portadores de carga.



En los gases en condiciones ordinarias, los átomos son neutros y, por tanto, un gas no es conductor de la corriente. Sin embargo, si acercamos al gas un agente ionizante, como una llama o una fuente de radiactividad o rayos X, se crean pares de iones-electrones positivos, precisamente por el fenómeno de la ionización, es decir, la transferencia a un electrón de tal cantidad de energía que se desprende del átomo. En el movimiento completamente desordenado de estas cargas, un ion puede capturar un electrón reconstituyendo un átomo o molécula neutra (fenómeno de recombinación) y un electrón puede ser capturado por un átomo neutro formando un ion negativo (fenómeno de captura, importante en los gases electronegativos como el oxígeno). En general, se alcanza un equilibrio dinámico caracterizado por n portadores positivos y n negativos por unidad de volumen, con una velocidad media nula.

Una situación similar a la de los gases puede darse con los líquidos dieléctricos, como el argón líquido; en una solución electrolítica, en cambio, los sales o los ácidos se disocian espontáneamente, de modo que también están contenidos en ella, por término medio, n pares de signo contrario por unidad de volumen. El movimiento de estas cargas es siempre completamente desordenado y la velocidad media es cero.

Cuando se sumergen dos electrodos en el gas o líquido ionizado, o en la solución electrolítica, entre los cuales se mantiene un d.d.p. mediante un generador de f.e.m., aparece una corriente eléctrica continua en el fluido debido al movimiento de los iones positivos en la dirección del campo eléctrico \vec{E} y de los iones negativos en la dirección opuesta a \vec{E} . Por último, son muy importantes en la tecnología electrónica los semiconductores, materiales sólidos aislantes en los que con un tratamiento adecuado, del que hablaremos más adelante, es posible tener portadores de carga de

ambos signos y mantener así una corriente eléctrica si se aplica un d.d.p..

En todos los casos de conducción eléctrica que hemos mencionado, el movimiento de las cargas se ve impedido por el medio en el que se produce el movimiento, y el análisis de este hecho conduce al concepto de resistencia del conductor. Por lo tanto, siempre es necesario gastar trabajo para vencer las fuerzas que se oponen al paso de la corriente, trabajo que, como ya hemos señalado, se obtiene a expensas de la energía interna del generador f.e.m.

La única excepción se da en ciertos metales puros y aleaciones metálicas a temperaturas cercanas al cero absoluto, lo que se denomina superconductividad: en ellos se puede mantener una corriente eléctrica durante tiempos muy largos sin gastar energía. Volveremos a este tema más adelante, tanto en este capítulo como cuando describamos el comportamiento de los electrones en los metales según las leyes de la mecánica cuántica.

Ejercicio 6.1 Calcular la velocidad cuadrática media de los electrones en un metal, bajo la hipótesis de que el gas de electrones se porte como un gas ideal.

Solución. Si los electrones libres pudieran ser tratados como un gas ideal, su energía cinética media a la temperatura T sería

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

donde $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg es la masa del electrón y $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/mole K es la constante de Boltzmann. A temperatura ambiente $T = 293$ K

$$E = \frac{3}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 = 0.61 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0.0038 \text{ eV},$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1.16 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

Este valor está en total desacuerdo con lo que predice la mecánica cuántica. Según la teoría de Fermi-Sommerfeld, los electrones dentro de un metal tienen una distribución de energías cinéticas que varía desde un valor mínimo hasta un valor máximo E_F , llamada energía de Fermi, característica del tipo de conductor. En el cobre $E_F = 7.03$ eV, que es dos órdenes de magnitud superior al valor medio predicho por la teoría cinética de los gases, a la cual corresponde

$$\bar{v}_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = 1.57 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

Estos resultados, válidos para $T = 0$, no varían sensiblemente con la temperatura del conductor. Observamos que si los electrones se comportaran como un gas ideal, para tener una energía cinética E_F tendrían que ser llevados a la temperatura

$$T_F = \frac{2E_F}{3k_B} = 54386 \text{ K}.$$

El ejemplo que acabamos de ver, pone en evidencia una importante discrepancia entre el modelo clásico y el cuántico. Dado que la teoría cuántica explica de forma coherente toda una serie de fenómenos observados en los metales, es a ella y a sus resultados numéricos a los que hay que remitirse también cuando se construye un modelo basado en conceptos clásicos. Veremos un ejemplo al final de la sección 6.5.

6.1 Corriente eléctrica

Supongamos que en una región de un conductor existen n_+ portadores de cargas $+e$ por unidad de volumen y que en ella actúe un campo eléctrico \vec{E} producido por una f.e.m.; los portadores se mueven bajo el acción de la fuerza eléctrica $\vec{F} = +e\vec{E}$, originando una corriente eléctrica, y llamamos \vec{v}_d sus velocidad en la dirección del campo \vec{E} , llamada también *velocidad de deriva*.

Consideremos ahora una superficie Σ dibujada en el interior del conductor: llamemos Δq a la carga que pasa a través de Σ en el tiempo Δt , se define intensidad de corriente a la cantidad

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (6.1)$$

La definición (6.1) es general y vale también para fenómenos que varían en el tiempo.

Para poner en relación la corriente eléctrica con el movimiento de las cargas, hacemos referencia a una superficie infinitesimal $d\Sigma$ cuya normal \hat{u}_n forma un ángulo θ con el campo eléctrico \vec{E} y, por lo tanto, con la velocidad \vec{v}_d de las cargas.¹ En el tiempo Δt las cargas recorren una distancia $v_d \Delta t$, por lo tanto, la carga total que pasa por la superficie $d\Sigma$ en el tiempo Δt es aquella contenida en el volumen infinitesimal $d\tau$ definido por $d\Sigma$ y $v_d \Delta t$:

$$\begin{aligned} d\tau &= v_d \Delta t d\Sigma \cos \theta, \\ \Delta q &= n_+ e d\tau = n_+ e v_d \Delta t d\Sigma \cos \theta \end{aligned}$$

La carga que pasa en la unidad de tiempo por la superficie $d\Sigma$, o sea, la intensidad de corriente a través de $d\Sigma$ es, según la ecuación (6.1),

$$di = n_+ e v_d d\Sigma \cos \theta.$$

Definimos el vector densidad de corriente \vec{j} como:

$$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_d \quad (6.2)$$

y reescribimos

$$di = \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma. \quad (6.3)$$

La intensidad de corriente a través de la superficie Σ se obtiene integrando la ecuación (6.3):

$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \Phi_{\Sigma}(\vec{j}) \quad (6.4)$$

o sea, es *el flujo del vector densidad de corriente a través de la superficie Σ* . En particular, si la superficie es ortogonal a la velocidad y, por lo tanto, a \vec{j} y esta última es uniforme:

$$i = j \Sigma, \quad j = \frac{i}{\Sigma}. \quad (6.5)$$

¹la velocidad es paralela al campo eléctrico

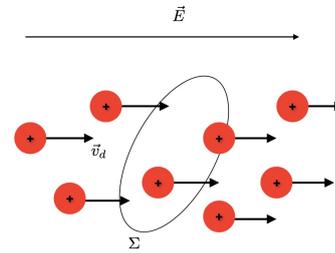


Figure 6.1: Movimiento de electrones.

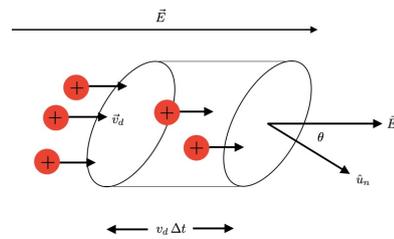


Figure 6.2: Movimiento de electrones en un volumen.

Si los portadores de carga son negativos (como en los conductores), fijamos la dirección y el sentido de \vec{E} , la velocidad de deriva \vec{v}_- tiene el sentido opuesto con respecto al campo. El vector $-e\vec{v}_-$ tiene el mismo sentido de \vec{E} y la densidad de corriente, llamado n_- el número de portadores por unidad de volumen, es:

$$\vec{j} = -n_- e \vec{v}_-,$$

paralelo y con el mismo sentido de \vec{E} .

El hecho de que la densidad de corriente tenga siempre el mismo sentido de \vec{E} , llega de la definición de \vec{j} como producto de la carga por unidad de volumen por la velocidad y refleja la circunstancia experimental que *en escala microscópica no es posible relacionar el sentido de la corriente al signo de los portadores de carga*; fijada una d.d.p., se tienen los efectos si la conducción es debida a las cargas positivas o negativas. Solamente a nivel microscópico, por el *efecto Hall*, que veremos más adelante, es posible reconocer el signo de los portadores de carga por lo menos para los conductores.

Según estas consideraciones, se asume *convencionalmente* como sentido de la corriente al movimiento de las cargas positivas, o sea, aquello que va desde los puntos a potencial mayor a los puntos de potencial menor.

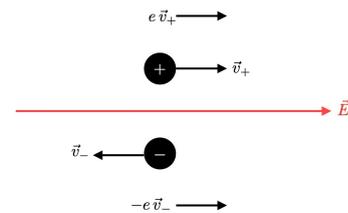


Figure 6.3: Movimiento de los portadores de carga bajo un campo eléctrico.

Unidades 6.1.1 La unidad de medida de la corriente en el sistema internacional es el *ampère*, símbolo A. Tenemos la intensidad de corriente de 1A cuando a través de una superficie pasa 1C en 1s:

$$A = \frac{C}{s}.$$

En la práctica se usan los submúltiplos *milliampere*, *microampere*, *nanoampere*,

$$1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}, \quad 1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}, \quad 1 \text{ nA} = 10^{-9} \text{ A},$$

y en las aplicaciones de potencia, los múltiplos *kiloampere* y *megaampere*

$$1 \text{ kA} = 10^3 \text{ A}, \quad 1 \text{ MA} = 10^6 \text{ A}.$$

La densidad de corriente eléctrica se mide en A/m^3

Ejercicio 6.2 En un conductor cilíndrico de cobre con un área $\Sigma = 4 \text{ mm}^2$ fluye una corriente de intensidad $i = 8 \text{ A}$. Calcular la velocidad de deriva de los electrones.

Solución: Según la ecuación (6.5), la densidad de corriente es

$$j = \frac{i}{\Sigma} = 2 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

Es el orden de magnitud de la densidad de corriente máxima que puede circular por un conductor sin dar lugar a efectos térmicos apreciables, que pueden provocar la fusión del conductor (véase la sección 6.4). Para el cobre $n = 8.49 \cdot 10^{28}$ electrones/ m^3 y por la ecuación (6.2) tenemos

$$v_d = \frac{j}{ne} = 1.47 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} = 0.147 \text{ mm/s}$$

La comparación de la velocidad de deriva con la velocidad v_F calculada en el ejemplo anterior da $v_d/v_F \approx 10^{-10}$. El efecto de la conducción es introducir una perturbación muy pequeña a la velocidad de cada electrón. Sin embargo, este efecto colectivo ordenado, en el que todos los electrones tienen la misma velocidad de deriva, da lugar a un resultado macroscópico visible, la corriente eléctrica; aunque pequeña, la velocidad media de los electrones, coincidente con v_d , no lo sería en ausencia de campo eléctrico, y el número de electrones por unidad de volumen es muy grande.

En los dieléctricos, hemos visto una situación similar. Precisamente, en la polarización de los electrones, el efecto del campo eléctrico sobre un átomo o una molécula es perturbar ligeramente la distribución de la carga, dando lugar a un momento de dipolo eléctrico muy pequeño; sin embargo, el número de dipolos por unidad de volumen es muy grande y el efecto colectivo macroscópico, es decir, la polarización del dieléctrico, es bien medible. También observamos que la carga que puede moverse, por unidad de volumen, es

$$ne = 8.49 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 13.6 \cdot 10^9 \text{ C/m}^3 = 13.6 \text{ C/mm}^3.$$

Se trata de una carga muy grande, enorme desde el punto de vista electrostático; sin embargo, no se trata de un exceso de carga, que con valores similares nunca podría estar junta, sino que es una parte de la carga que constituye el material, finamente mezclada con una carga igual pero de signo contrario (los iones del retículo), por lo que no hay efectos electrostáticos de repulsión. El valor de la densidad de corriente depende de la velocidad con la cual se mueven las cargas y, por lo tanto, del campo eléctrico. ■

6.2 Ley de conservación de la carga eléctrica

Consideramos una región del espacio de volumen τ delimitado por una superficie cerrada, la cual orientamos de modo que el versor de la normal \hat{u}_n sea en cada punto direccionado hacia el exterior. Si en la región está presente una corriente eléctrica, definida por el vector \vec{j} , la carga total que pasa en la unidad de tiempo a través de la superficie Σ está dada por la ecuación (6.4):

$$i = \oint \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma.$$

Las contribuciones a la integral llegan de las partes de Σ donde $\vec{j} \cdot \hat{u}_n > 0$ (\vec{j} hacia fuera) y representan una carga positiva que sale de Σ o una negativa que entra, mientras que las contribuciones negativas donde $\vec{j} \cdot \hat{u}_n < 0$ (\vec{j} hacia dentro) y están debidas a una carga positiva que entra o una negativa que sale.

El principio de conservación de la carga pide que i sea igual a la variación en unidad de tiempo de la carga total contenida en el volumen limitado por Σ , o sea,

$$i = \oint \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = -\frac{\partial q_{\text{int}}}{\partial t}. \quad (6.6)$$

El signo menos es debido a que si la integral es positiva, entonces la carga en el interior disminuye y, por lo tanto, tiene derivada negativa (y viceversa si la integral es negativa).

Un caso particular, pero interesante y muy común en la práctica, es cuando la carga contenida en Σ no varía, por lo tanto, $\partial q_{\text{int}}/\partial t = 0$; sigue de la ecuación (6.6) la condición de estacionariedad:

$$\oint \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0. \quad (6.7)$$

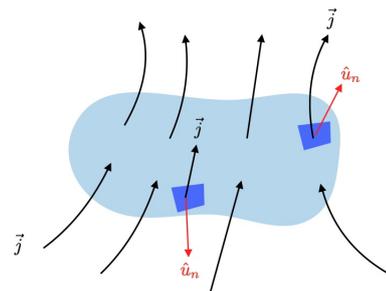


Figure 6.4: Flujo de \vec{j} a través de una superficie.

Antes de discutir el significado físico de la ecuación (6.7), vamos a obtener la forma local.

Escribimos $q_{\text{int}} = \int_{\tau} \rho d\tau$ y la insertamos en la ecuación (6.6), obteniendo:

$$\oint \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = - \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau,$$

donde hemos intercambiado la integral con la derivada, ya que el volumen no cambia. Aplicando el teorema de la divergencia, tenemos:

$$\int_{\tau} \left(\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0.$$

Esta relación tiene que ser válida para cualquier volumen τ y, por lo tanto,

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (6.8)$$

La ecuación (6.8) se llama *ecuación de continuidad de la corriente eléctrica* y expresa de manera dinámica la conservación de la carga eléctrica; y es la expresión local de la ley integral (6.7).

En condiciones estacionarias $\partial \rho / \partial t = 0$, tendremos:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0,$$

la cual es la *ecuación de continuidad de la corriente eléctrica en régimen estacionario*.

Particularmente significativa es la aplicación de este resultado para un conductor sólido donde pasa corriente de densidad \vec{j} . La superficie Σ está constituida por dos secciones: Σ_1 y Σ_2 , del conductor y por la superficie lateral del conductor mismo, véase figura 6.5, a través de la cual no pasa corriente.

Por lo tanto, según la ecuación (6.7), tenemos

$$\oint \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot \hat{u}_1 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot \hat{u}_2 d\Sigma_2 = 0,$$

o sea

$$\int_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot \hat{u}_2 d\Sigma_2 = \int_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot (-\hat{u}_1) d\Sigma_1,$$

donde hemos cambiado el signo del versor.

Definición 6.2.1 Consecutivamente,

$$i_1 = i_2 \quad (6.9)$$

en condiciones estacionarias, la intensidad de corriente es la misma a través de cualquier sección del conductor.

Si el conductor es a sección variable, la densidad de corriente, y por lo tanto, la velocidad de deriva, son mayores donde la sección es menor (situación que nos acuerda a los fluidos).

Es importante señalar que la condición de estacionariedad no implica necesariamente que la corriente sea constante en el tiempo: la corriente puede variar siempre que la carga que entra en una superficie cerrada Σ sea igual a la carga que sale de ella (en la unidad de tiempo). La afirmación sigue válida si el tiempo que caracteriza la variabilidad de la corriente sea grande en comparación al tiempo que tardaría la luz en atravesar el volumen incluido en Σ . Este criterio se basa en el hecho de que una perturbación eléctrica, por ejemplo una variación de carga, localizada en un instante determinado en un punto dado, se propaga con una velocidad $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Si el tiempo de propagación es pequeño en comparación con los otros tiempos implicados, se supone que la perturbación se siente instantáneamente en cada punto.

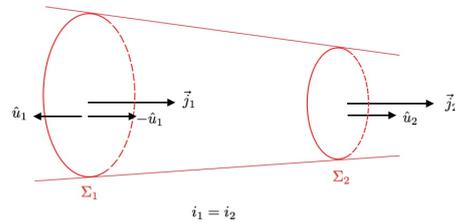


Figure 6.5: Corriente en secciones distintas.

6.3 Ley de Ohm

Un modelo clásico de la conducción eléctrica en los metales fue propuesto en el 1900 por Drude y sucesivamente desarrollado por Lorentz en el año 1906. En este modelo, se supone que los iones del retículo cristalino estén fijos y que los electrones se muevan en el retículo de manera completamente desordenados.

En el movimiento, los electrones interactúan continuamente con los iones, que llamaremos *choques*: entre un choque y el siguiente, el movimiento es libre y la trayectoria lineal, así que la trayectoria de cada electron está compuesta por segmentos lineales, con dirección y longitud variables. El conjunto de trayectorias es completamente causal y no hay un flujo de carga neto, o sea, una corriente, en ninguna dirección. Podemos definir un tiempo medio t_m y un camino libre medio ℓ entre dos choques consecutivos:

$$t_m = \ell/v,$$

donde v es la velocidad de los electrones en el metal.

Cuando se aplica un campo eléctrico \vec{E} cada electrón adquiere una aceleración $\vec{a} = \vec{F}/m = -e\vec{E}/m$, opuesta al campo eléctrico, y las trayectorias lineales entre dos choques se transforman en parábolas. A la distribución casual e isotropa de las velocidades se superpone una velocidad de deriva \vec{v}_d ; siendo esta velocidad pequeña con respecto a la de los electrones, el tiempo medio t_m entre dos choques consecutivos no cambia. Si llamamos \vec{v}_i a la velocidad de un electron justo después de un choque y \vec{v}_{i+1} a la velocidad justo antes del choque siguiente, tenemos:

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i - \frac{e\vec{E}}{m}t_m.$$

Si hacemos la media sobre un numero N muy grande de choques, y definimos la velocidad de deriva como

$$\vec{v}_d = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_{i+1} = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i - \frac{e\vec{E}}{m}t_m.$$

La media no cambia el miembro que contiene el campo eléctrico, que es igual para todos los electrones; además, $\sum_i \vec{v}_i = 0$ ya que después de cada choque la distribución de las velocidades sigue siendo casual. Por lo tanto,

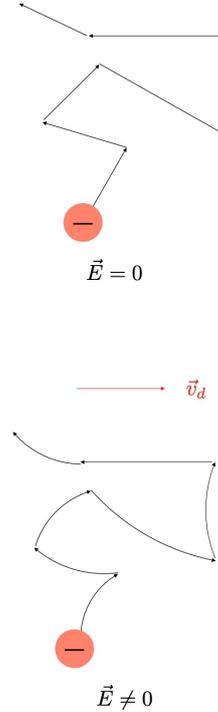
$$\vec{v}_d = -\frac{e t_m}{m} \vec{E}; \quad (6.10)$$

por efecto del campo eléctrico \vec{E} , cada electron en el metal adquiere una velocidad \vec{v}_d en la dirección del campo eléctrico, que es proporcional al campo eléctrico mismo.

En la practica se admite que en promedio el choque cancele la dirección preferencial del movimiento debido a la acción del campo eléctrico y que ésta se restablece durante el tiempo t_m . La ecuación (6.10) se puede escribir como $m\vec{v}_d = -e\vec{E}t_m$ e interpretar diciendo que el electrón adquiere en el tiempo t_m la cantidad de movimiento $m\vec{v}_d$ igual al impulso de la fuerza, cantidad de movimiento que se pierde en el choque siguiente y readquirida después un tiempo t_m .

La densidad de corriente la podemos escribir como:

$$\vec{j} = -ne\vec{v}_d = \frac{ne^2 t_m}{m} \vec{E}. \quad (6.11)$$



Definiendo con

$$\sigma = \frac{ne^2 t_m}{m} \quad (6.12)$$

una cantidad característica del material, llamada *conductividad*, la ecuación (6.11) se escribe como:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (6.13)$$

La ecuación (6.13) es conocida como *ley de Ohm de la conducción eléctrica*: ésta establece que la razón entre la densidad de corriente \vec{j} y el campo \vec{E} aplicado está dado por una cantidad característica del conductor. La dependencia de σ de e^2 garantiza que σ sea siempre positiva y, además, confirma que la densidad de corriente es siempre concorde al campo eléctrico independientemente de los portadores de carga (sea positivo o negativo).

Muchas veces la ecuación (6.13) está escrita como

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad (6.14)$$

donde la cantidad

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (6.15)$$

se llama *resistividad del conductor*.

La potencia gastada por la fuerza $\vec{F} = e\vec{E}$ para mantener en movimiento las cargas e con velocidad \vec{v}_d es:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_d = e\vec{E} \cdot \vec{v}_d.$$

Si en el conductor existen n portadores por unidad de volumen, la *potencia gastada por unidad de volumen* es:

$$P_\tau = nP = ne\vec{v}_d \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (6.16)$$

Aplicando la ley de Ohm de la forma ecuación (6.13) ó (6.14) tenemos:

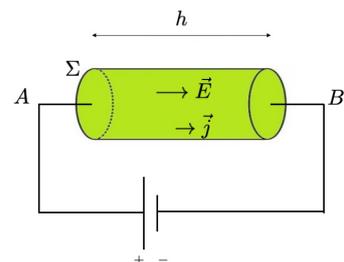
$$P_\tau = \sigma E^2 = \rho j^2 \quad (6.17)$$

En un conductor metálico, esta potencia viene transferida mediante los choques a los iones del retículo y se tiene una transformación de energía eléctrica en energía interna del conductor, con un sucesivo aumento de la temperatura del metal, cediendo calor al exterior.

6.4 Efecto Joule

Aplicamos ahora los resultados encontrados a un conductor cilíndrico de longitud h y sección Σ . En los lados del conductor está aplicada, a través de un generador de f.e.m., una d.d.p. $V = V_A - V_B$; por lo tanto, en el conductor hay un campo \vec{E} , paralelo al eje del cilindro, y en él hay una corriente eléctrica de densidad

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}.$$



El régimen es estacionario, la intensidad de corriente tiene el mismo valor en todo el conductor y vale

$$i = j\Sigma = \frac{\Sigma}{\rho} E \implies E = \frac{\rho}{\Sigma} i.$$

Entre el campo eléctrico y la d.d.p. existe la relación

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = E h$$

y finalmente:

$$V = \frac{\rho h}{\Sigma} i. \quad (6.18)$$

Llamamos *resistencia* del conductor a la cantidad

$$R = \rho \frac{h}{\Sigma}, \quad (6.19)$$

y la ecuación (6.18) se escribe como:

$$V = R i, \quad (6.20)$$

conocida como *ley de Ohm para los conductores metálicos*.

Si la sección del conductor es variable, para un tramo de longitud dh y de sección Σ , escribimos

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{s} = \rho \frac{dh}{\Sigma} i$$

e integrando en la longitud total del conductor obtenemos la ecuación (6.20); si definimos como *resistencia del conductor* a la cantidad:

$$R = \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma} \quad (6.21)$$

y recordando que la intensidad de corriente es la misma en cada parte del conductor. Por lo tanto:

Definición 6.4.1 en régimen estacionario la razón entre la d.d.p. aplicada a los extremos de un conductor metálico y la intensidad de corriente que atraviesa el conductor (debido a la d.d.p. aplicada), es igual a una cantidad llamada resistencia del conductor que depende solamente de la naturaleza del conductor y de las dimensiones.

El inverso de la resistencia se llama *conductancia* y su símbolo es G

$$G = \frac{1}{R} \quad (6.22)$$

Unidades 6.4.1 La unidad de medida de la resistencia es el ohm

$$\Omega = \frac{V}{A}$$

La resistividad ρ se mide en Ωm , la conductancia en Ω^{-1} , la conductividad en $\Omega^{-1} m^{-1}$. La unidad Ω^{-1} se llama siemens (S).

Resistividad y coeficiente termico de la resistividad		
Material	Resistividad (Ωm)	Coefficiente térmico ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
plata	$1.59 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
cobre	$1.67 \cdot 10^{-8}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$
oro	$2.35 \cdot 10^{-8}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
aluminio	$2.65 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
zinc	$5.92 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$
niche	$6.84 \cdot 10^{-8}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$
hierro	$9.71 \cdot 10^{-8}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$
platino	$10.6 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
plomo	$20.7 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$
carbono (grafite)	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$-0.5 \cdot 10^{-3}$
germano	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$-0.5 \cdot 10^{-3}$
silicio	0.46	$-48 \cdot 10^{-3}$
agua	$2 \cdot 10^5$	-
vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	-

Table 6.1: Resistividad y coeficiente termico de la resistividad.

Efectos térmicos

La resistividad en la mayoría de los conductores metálicos puros es una función creciente de la temperatura. En un rango limitado (unas decenas de grados) en torno a la temperatura de 20°C , la relación es prácticamente lineal.

$$\rho = \rho_{20} (1 + \alpha \Delta t) \quad (6.23)$$

donde $\Delta t = t - 20$ y ρ_{20} es la resistividad a 20°C (la temperatura t se expresa en Celcius). El coeficiente α , llamado coeficiente térmico, está definido por la ecuación (6.23)

$$\alpha = \frac{1}{\rho_{20}} \frac{\Delta \rho}{\Delta t}$$

donde $\Delta \rho$ es la variación de la resistividad en el intervalo Δt . En la tabla 6.1 se reportan los valores del coeficiente térmicos juntos a los valores de resistividad. El coeficiente α es positivo en los metales puros, mientras que es negativo en el carbono, el germanio y el silicio, lo que indica, para estos elementos, una disminución de la resistividad con el aumento de la temperatura. Se pueden producir aleaciones como el nichelcromo que tiene una resistividad típica de los conductores, pero un coeficiente un orden de magnitud inferior ($\sim 10^{-4}^{\circ}\text{C}^{-1}$).

En los conductores, la tendencia de la resistividad con la temperatura se desvía notablemente de la linealidad a bajas temperaturas, y la resistividad tiende a un valor finito ρ_0 cuando la temperatura tiende al cero absoluto. Existe, sin embargo, una clase de conductores cuya resistividad se anula por debajo de una determinada temperatura, llamada temperatura crítica T_c : en la tabla 6.2 se dan algunos ejemplos; cuando a $T < T_c$ estos conductores se llaman superconductores. Una propiedad fundamental es que en ellos se puede mantener una corriente, incluso elevada, sin necesidad de aplicar un d.d.p.

Temperatura crítica de algunos superconductores			
Material	T_c (K)	Material	T_c (K)
Nb ₃ Ge	23.2	Estaño	3.72
Nb ₃ Sn	18.1	aluminio	1.18
niobio	9.25	zinc	0.88
plomo	7.23	cadmio	0.52
mercurio	4.15	iridio	0.14

Table 6.2: Temperatura crítica de algunos superconductores.

Ejercicio 6.3 La resistividad del cobre a temperatura $t = 20^\circ\text{C}$ es $\rho = 1.67 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$. Calcular el valor del campo eléctrico \vec{E} necesario para mantener en un conductor de cobre una densidad de corriente $j = 2\text{A/mm}^2$. Calcular los parámetros microscópicos relativo a la conducción eléctrica.

Solución: Desde la ecuación (6.14), tenemos $E = \rho j = 1.67 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^6 = 3.34 \cdot 10^{-2} \text{V/m}$; se nota que en un buen conductor es suficiente un valor muy pequeño de campo eléctrico para mantener la máxima densidad de corriente tolerable (véase ejercicio 6.5). La conductividad es $\sigma = 1/\rho = 0.60 \cdot 10^8 (\Omega\text{m})^{-1}$ y desde la ecuación (6.12) calculamos el tiempo medio entre dos choques consecutivos

$$t_m = \frac{m\sigma}{ne^2} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 0.60 \cdot 10^8}{8.49 \cdot 10^{28} (-1.6 \cdot 10^{-19})^2} = 2.51 \cdot 10^{-14} \text{s},$$

el camino libre medio es

$$\ell = t_m v_F = 2.51 \cdot 10^{-14} \cdot 1.58 \cdot 10^6 = 3.97 \cdot 10^{-8} \text{m}.$$

En este último cálculo hemos usado la velocidad del ejercicio 6.1 en base al modelo de Fermi. Porque la distancia entre los iones del retículo es $\sim 2 \cdot 10^{-10} \text{m}$, la longitud media de los arcos de parábola descritos por los electrones entre un choque y el sucesivo es aproximadamente 200 distancias interatómicas. ■

Ejercicio 6.4 Calcular de cuánto varía en porcentaje la resistencia de un conductor de plata cuando se lleva desde temperatura ambiente a $t = 150^\circ\text{C}$.

Solución: Utilizamos la ecuación (6.23) y los valores en la tabla 6.1

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho_{20}} = \alpha \Delta t = 4.1 \cdot 10^{-3} \cdot (150 - 20) = 0.533.$$

La variación es notable y este efecto viene usado para la construcción de termómetros. La sensibilidad depende de la capacidad de apreciar pequeñas variaciones de resistencia; la variación en porcentaje por grado está dada por α .

En la práctica se utilizan resistencias a hilo de platino, que permiten medir temperaturas hasta $\sim 1500\text{K}$; también se utilizan los termistores, hecho de semiconductores cuya resistividad disminuye con la temperatura (y normalmente el módulo de la variación de la resistividad, a paridad de variación de temperatura, es mayor que en los conductores). ■

6.4.1 Potencia. Efecto Joule

La potencia que se tiene que gastar para hacer circular la corriente eléctrica i en un tramo conductor de sección Σ y longitud dh es, según la ecuación (6.17),

$$dP = P_{\tau} \Sigma dh = \rho \frac{i^2}{\Sigma^2} \Sigma dh = \rho \frac{dh}{\Sigma} i^2.$$

Para un conductor de longitud finita tenemos:

$$P = i^2 \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma}$$

y recordando la definición de resistencia

$$P = R i^2. \quad (6.24)$$

A la expresión (6.17) para la potencia, hemos llegado considerando cantidades locales como el campo eléctrico que actúa sobre las cargas y la densidad de corriente.

Al mismo resultado se habría podido llegar considerando la carga dq que se mueve en una d.d.p. $V = V_A - V_B$; por este desplazamiento el trabajo cumplido es

$$dW = V dq = V i dt$$

y se gasta una potencia

$$P = \frac{dW}{dt} = V i,$$

que es una formula de carácter general. Si vale la ley de Ohm $V = R i$ entonces tendremos

$$P = R i^2 = \frac{V^2}{R}. \quad (6.25)$$

El trabajo para dejar pasar la corriente es

$$W = \int_0^t P dt = \int_0^t R i^2 dt \quad (6.26)$$

y si la corriente es constante en el tiempo, se reduce a

$$W = R i^2 t. \quad (6.27)$$

Este trabajo es necesario para vencer a la resistencia del retículo cristalino que se opone al pasaje de la corriente y, desde un punto de vista termodinámico, éste viene absorbido por el conductor, cuya energía interna aumenta. Consecutivamente, aumenta la temperatura del conductor: si se aísla térmicamente con el exterior, el proceso lleva a una fusión del metal; si el conductor está en contacto térmico con el exterior, su temperatura crece hasta llegar a un estado de equilibrio, cuya energía interna no varía más y el trabajo eléctrico viene entregado al exterior bajo forma de calor.

El efecto de calentamiento del conductor, donde pasa corriente, se llama *efecto Joule*. La medida calorimétrica del calor dado por el conductor y la verificación de la igualdad con el trabajo gastado para dejar circular la corriente ha constituido una de las pruebas fundamentales de la equivalencia entre calor y trabajo.

Ejercicio 6.5 En un hilo de estaño, largo $h = 1$ m y con sección cuadrada de área $\Sigma = 1 \text{ mm}^2$, fluye la corriente i . La conducibilidad térmica externa vale $h^* = 10 \text{ J/m}^2 \text{ Ks}$. Calcular el valor de i por la cual la temperatura de equilibrio a la cual llega el estaño es T_f .

Solución: El trabajo eléctrico provoca un aumento de temperatura del hilo y una transferencia de calor al ambiente según la ecuación

$$R i^2 dt = m c dT + h^* S (T - T_0) dt;$$

donde m es la masa del hilo y c es el calor específico. El último término expresa la ley de Newton relativa al cambio de calor; S es la superficie del hilo.

En equilibrio $dT = 0$ y tenemos

$$R i^2 = h^* S (T - T_0).$$

La resistencia del hilo a la temperatura T es

$$R = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \frac{h}{\Sigma}$$

y la corriente es

$$i^2 = \frac{h^* S (T - T_0)}{\rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \frac{h}{\Sigma}}.$$

Tomando los valores en la tabla para el estaño y poniendo $S = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ y $T = T_f$, se obtiene

$$i = 6.34 \text{ A}, \quad j = \frac{i}{\Sigma} = 6.34 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2.$$

También si el cálculo es indicativo en cuanto la ley de Newton no es muy atendible para grandes diferencias de temperatura, se puede apreciar el orden de magnitud del límite impuesto a la densidad de corriente por los efectos térmicos: el límite práctico es $\sim 1 - 2 \text{ A/mm}^2$. ■

6.5 Resistencias en serie y en paralelo

Los conductores ohmicos caracterizados por un determinado valor de resistencia son elementos muy usados en los circuitos eléctricos. Estos se llaman *resistencias* y además del valor de la resistencia, viene siempre dado el valor máximo de la potencia.



Figure 6.6: Resistencia eléctrica.

El símbolo de la resistencia en un circuito está mostrado en figura 6.6. En un circuito se pueden unir más resistencias, las conexiones de base son dos: en *serie* y en *paralelo*, según una terminología que hemos usado para los condensadores.

6.5.1 Resistencias en serie

Dos resistencias están conectadas en serie cuando tienen una extremidad en común; en regime estacionario, la intensidad de corriente que pasa por las dos resistencias es la misma. Apliquemos a cada resistencia la ley de Ohm y sumemos,

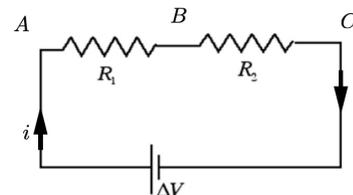


Figure 6.7: Resistencias en serie.

figura 6.7:

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= R_1 i, & V_B - V_C &= R_2 i \\ V_A - V_C &= (R_1 + R_2)i = R_{\text{eq}}i. \end{aligned}$$

Las dos resistencias en serie dan como resistencia equivalente:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2. \quad (6.28)$$

Esta relación obviamente se extiende a un número n de resistencias: *la resistencia equivalente de un sistema de resistencias en serie es la suma de cada resistencia.*

La potencia total gastada es:

$$P = (V_A - V_C)i = (R_1 + R_2)i^2 = R_{\text{eq}}i^2 = P_1 + P_2$$

y es igual a la suma de las potencias gastadas en cada resistencia.

6.5.2 Resistencia en paralelo

Dos resistencias están en paralelo cuando están conectadas entre ellas por los extremos. En este caso, el elemento en común a las dos resistencias es la d.d.p. $V = V_A - V_B$ y, por lo tanto, según la ley de Ohm, en ellos circulan dos corrientes i_1 y i_2 , distintas si son distintos los valores de las resistencias R_1 y R_2 .

En el punto A (figura 6.8) donde la corriente se separa para pasar por las dos resistencias, podemos decir que bajo la condición de estacionaridad:

$$i = i_1 + i_2.$$

Por lo tanto tendremos:

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V}{R_{\text{eq}}}$$

donde

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (6.29)$$

Claramente la ecuación (6.29) se extiende a un número cualquiera de resistencias, y decimos *el recíproco de la resistencia equivalente es igual a la suma de los recíprocos de cada resistencia.*

Las corrientes que pasan por cada resistencia serán

$$i_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \quad i_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

y la potencia gastada es

$$P = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = R_1 \frac{V^2}{R_1^2} + R_2 \frac{V^2}{R_2^2} = \frac{V^2}{R_{\text{eq}}} = R_{\text{eq}} i^2.$$

Con una combinación de resistencias en serie y en paralelo se puede crear cualquier valor de la resistencia. Las conexiones tienen significado si los valores no son muy distintos: en series domina la resistencia más grande, en paralelo la más pequeña.

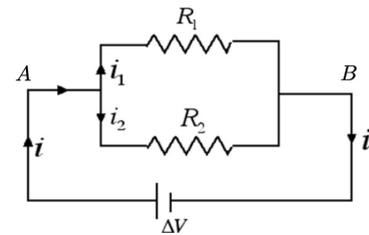


Figure 6.8: Resistencias en paralelo.

Ejercicio 6.6 En la red de resistencias como en figura, los valores son $R_1 = 3\ \Omega$ y $R_2 = R_1 = 9\ \Omega$. Entre los terminales A y B se aplica una d.d.p. $V = V_A - V_B = 17.4\ \text{V}$. Calcular la resistencia equivalente del circuito y la potencia gastada en el circuito.

Solución: En el ramo $CDEF$ consiste de tres resistencias iguales de valor R_2 y en series, por lo tanto $R' = 3R_2 = 27\ \Omega$. R' está en paralelo con R_1 del tramo CF y la resistencia equivalente es

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_1}, \quad \Rightarrow \quad R'' = \frac{R_1 R'}{R_1 + R'} = 2.7\ \Omega.$$

Además, R'' está en serie con las dos resistencias R_1 y la resistencia equivalente es

$$R_{\text{eq}} = 2R_1 + R'' = 8.7\ \Omega.$$

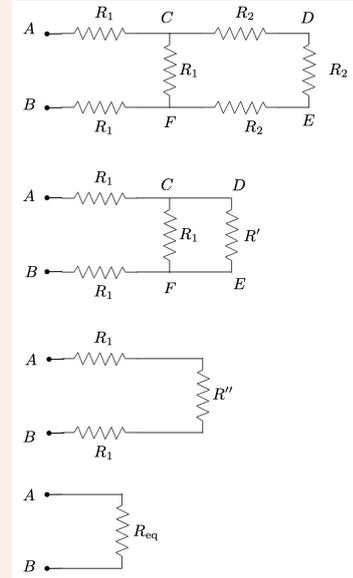
La intensidad de corriente que fluye en R_{eq} es

$$i = \frac{V}{R_{\text{eq}}} = 2\ \text{A}.$$

y la potencia total gastada es

$$P = R_{\text{eq}} i^2 = \frac{V^2}{R_{\text{eq}}} = 34.8\ \text{W}.$$

Se puede verificar fácilmente que la potencia total gastada es la suma de las potencias gastada en las resistencias.



6.6 Ley de Ohm generalizada

En los párrafos anteriores hemos visto que para un conductor de resistencia R vale la ley de Ohm

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = R i \quad (6.30)$$

la cual pone en relación la intensidad de corriente i en el conductor con el campo eléctrico \vec{E} producido por un generador externo, en cuyos polos está conectado el conductor. La ecuación (6.30) aplicada a un circuito cerrado es:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = R_T i, \quad (6.31)$$

donde R_T es la resistencia total del circuito. El primer miembro de la ecuación (6.30) coincide con la definición de f.e.m. y, por lo tanto, la ecuación (6.30) afirma que para que en el circuito circule corriente eléctrica es necesaria la presencia de una f.e.m. o sea, de un campo \vec{E} cuya circulación no sea nula. Ya que no puede ser un campo electrostático \vec{E}_{el} el que hace circular la corriente en el circuito porque este último es conservativo (y su circulación es nula). La fuente de f.e.m. tiene que tener en su interior fuerzas de naturaleza no electrostática, no conservativas, que puedan permitir el movimiento de cargas en todo el circuito.

Examinemos ahora el circuito eléctrico más sencillo, formado por un conductor conectado a los polos A y B de un generador, sobre los cuales están acumuladas las cargas $+q$ y $-q$. El campo \vec{E}_{el} producido por estas cargas tiene siempre el sentido $A \rightarrow B$, en el conductor y también en el generador, de acuerdo con el hecho de que:

$$\oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{E}_{el} \cdot d\vec{s})_{ext} + \int_B^A (\vec{E}_{el} \cdot d\vec{s})_{int} = 0 :$$

el primer término es la integral calculada en el conductor

externo y la segunda integral calculada en el interior del generador. El pasaje de una carga positiva en el interior del generador desde el polo negativo B al polo positivo A (o de una carga negativa de A hacia B) no puede ocurrir por efecto del campo \vec{E}_{el} ; tiene que existir en el interior del generador un campo \vec{E}^* no electrostático, que llamaremos *campo electromotor*, por lo tanto, el campo eléctrico \vec{E} que existe en el circuito vale

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^* + \vec{E}_{el} && \text{en el interior del generador.} \\ \vec{E} &= \vec{E}_{el} && \text{en el conductor.} \end{aligned} \quad (6.32)$$

La f.e.m. del campo \vec{E} se escribe como:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} + \int_B^A (\vec{E}^* + \vec{E}_{el}) \cdot d\vec{s} = \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{s}. \quad (6.33)$$

El campo \vec{E} definido en las ecuación (6.32), por lo tanto no es conservativo, y su f.e.m. coincide con la tensión del campo electromotor \vec{E}^* calculada en la línea interna al generador, que va desde B hacia A como en la ecuación (6.33). Sin embargo, en cualquier línea que va de B hacia A externa al generador, la tensión de \vec{E}^* es cero, siendo \vec{E}^* cero en el exterior del generador.

En el interior del generador, una carga dq viene desplazada desde B hacia A por una fuerza $d\vec{F}^*$, la cual tiene que vencer $d\vec{F}_{el} = dq\vec{E}_{el}$, y el campo electromotor \vec{E}^* se define como la razón entre la fuerza $d\vec{F}^*$ y la carga dq :

$$\vec{E}^* = \frac{d\vec{F}^*}{dq}. \quad (6.34)$$

Para tener un movimiento de cargas en el sentido querido en el interior del generador, tiene que verificarse $|\vec{E}^*| > |\vec{E}_{el}|$ para que resulte:

$$\int_B^A (\vec{E}^* + \vec{E}_{el}) \cdot d\vec{s} > 0.$$

En el exterior, el movimiento de cargas en el conductor es debido al campo \vec{E}_{el} , generado por la acción del campo electromotor \vec{E}^* .

Ya que la corriente i que atraviesa el conductor externo pasa también en el generador desde el polo B hacia el polo A , definimos una cantidad característica del generador, la *resistencia interna* r , por la relación

$$\int_B^A (\vec{E}^* + \vec{E}_{el}) \cdot d\vec{s} = r i,$$

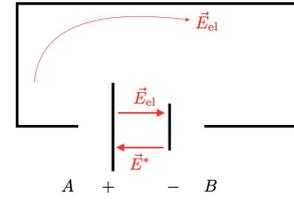


Figure 6.9: Fuerza electromotriz en un generador.

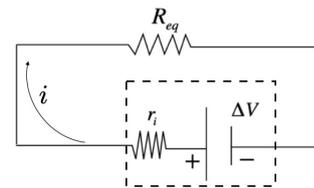


Figure 6.10: Generador con resistencia interna.

la cual extiende la ley de Ohm en el interior del generador.

Por lo tanto, un generador está caracterizado por la f.e.m. \mathcal{E} , o sea, la tensión entre los polos y por la resistencia interna r . En general, podemos escribir para un circuito con una resistencia:

$$\mathcal{E} = Ri + ri = (R + r)i = R_T i, \quad i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}; \quad (6.35)$$

la corriente que circula en el circuito está dada por la razón entre la f.e.m. del generador y la resistencia total. Desde la relación anterior, tenemos:

$$V_A - V_B = Ri = \mathcal{E} - ri; \quad (6.36)$$

la d.d.p. medida entre los polos A y B del generador es menor que la f.e.m., si en el circuito circula corriente.

Consideremos ahora un trozo de circuito, lo cual llamamos tramo, donde pasa corriente i , constituido por una resistencia R y por dos generadores conectados como en la figura 6.11. Aplicamos la ley de Ohm y la ecuación (6.35) en los distintos puntos del tramo

$$V_A - V_C = Ri, \quad V_D - V_C = \mathcal{E}_1 - r_1 i, \implies V_C - V_D = -\mathcal{E}_1 + r_1 i \quad (6.37)$$

$$V_D - V_B = \mathcal{E}_2 - r_2(-i) = \mathcal{E}_2 + r_2 i \quad (6.38)$$

Sumando término a término tenemos:

$$V_A - V_B = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + (R + r_1 + r_2)i,$$

$$V_A - V_B + (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = (R + r_1 + r_2)i = R_T i. \quad (6.39)$$

Notemos que fijando el sentido de la corriente i , y, por lo tanto, el sentido según el cual el potencial disminuye en la resistencia R_T , la f.e.m. \mathcal{E}_1 tiene signo positivo, ya que en el generador entra corriente por el polo negativo y sale por el polo positivo, mientras que \mathcal{E}_2 aparece con el signo positivo (si actuase sola haría pasar corriente por el sentido opuesto al elegido).

Bajo estas consideraciones, la ecuación (6.39) puede ser extendida a un tramo que contenga un número cualquiera de generadores

$$V_A - V_B + \sum_k \mathcal{E}_k = R_T i, \quad (6.40)$$

donde R_T es la resistencia total del tramo. La ecuación (6.40) se llama *ley de Ohm generalizada*;

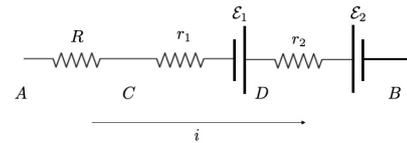


Figure 6.11: Tramo circuito eléctrico

6.7 Carga y descarga de un condensador a través de una resistencia

En los circuitos vistos hasta ahora, la corriente eléctrica era continua, o sea constante en el tiempo. Consideramos ahora algunos simples ejemplos de circuitos en los cuales la corriente varía en el tiempo según una ley definida.

Carga de un condensador

Consideremos un circuito constituido por un generador \mathcal{E} , una resistencia R y un condensador C ; inicialmente el interruptor T está abierto, en el circuito no circula corriente y el condensador no está cargado, véase figura 6.12. Al tiempo $t = 0$ se cierra el interruptor y el generador empieza a sacar cargas desde los conductores conectados al polo negativo y a llevarlas al polo positivo. Así, en las caras del condensador aparecen las cargas $+q$ y $-q$. El proceso continúa hasta cuando la carga del condensador llega al valor máximo $q_0 = C\mathcal{E}$, a la cual se corresponde una d.d.p. $V_A - V_B$ entre las armaduras del condensador, igual a la f.e.m. \mathcal{E} .

En un instante cualquiera, valen las relaciones:

$$\mathcal{E} = V_R + V_C = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}, \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt};$$

La primera es la ley de Ohm generalizada aplicada a nuestro circuito (suponiendo cero la resistencia interna del generador con respecto a la resistencia R o simplemente incluida en R) y hemos considerado que existe una d.d.p. a los lados del condensador. Tenemos, por lo tanto,

$$R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} - \frac{q}{C} \implies \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}.$$

Integrando desde $t = 0$ hasta un tiempo cualquiera t , por los cuales se corresponden $q = 0$ y q :

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt, \implies \ln \left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} \right) = -\frac{t}{RC}.$$

Explicitando la carga, tenemos:

$$\begin{aligned} q(t) &= C\mathcal{E} \left(1 - e^{-t/RC} \right) \\ V_C(t) &= \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-t/RC} \right) \\ i(t) &= \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \\ V_R(t) &= Ri(t) = \mathcal{E} e^{-t/RC} \end{aligned}$$

Cuando se carga un condensador conectándolo a un generador, la d.d.p. final en los lados del condensador es igual a la f.e.m. del generador, y la carga final es $q_0 = C\mathcal{E}$: estos valores máximos se consiguen asintóticamente. La corriente en el circuito es máxima en el instante $t = 0$ cuando vale \mathcal{E}/R , y decrece exponencialmente en el tiempo, anulándose para $t \rightarrow \infty$. El comportamiento temporal está gobernado por la constante de tiempo $\tau = RC$.

Unidades 6.7.1 Es fácil demostrar que la constante RC tiene dimensiones de tiempo:

$$RC = \Omega F = \frac{V C}{A V} = \frac{C}{A} = s.$$

La potencia instantánea entregada por el generador es:

$$P_{\text{gen}} = \mathcal{E}i = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/RC}$$

y la gastada en la resistencia es:

$$P_R = Ri^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC}. \quad (6.41)$$

El trabajo elemental de carga del condensador, correspondiente a un aumento de la energía electrostática del condensador, es $V_C dq$ y su potencia es:

$$P_C = V_C \frac{dq}{dt} = V_C i = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/RC} - \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC} = P_{\text{gen}} - P_R,$$

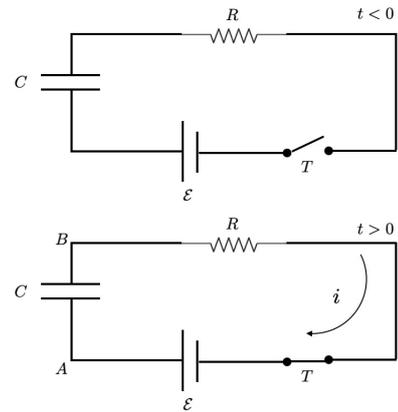


Figure 6.12: Carga de un condensador.

En cada instante tenemos:

$$P_{\text{gen}} = P_C + P_R$$

de acuerdo con el principio de conservación de la energía.

El trabajo entregado por el generador, aquello gastado en la resistencia y la energía electrostática del condensador al final del proceso valen:

$$W_{\text{gen}} = \int_0^{\infty} P_{\text{gen}} dt = \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/RC} dt = C\mathcal{E}^2.$$

$$W_R = \int_0^{\infty} P_R dt = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2, \quad \Delta U_e = \int_0^{\infty} P_C dt = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2.$$

Durante la carga de un condensador, el 50% de la energía entregada por el generador va en energía electrostática, la otra mitad se disipa en calor, independientemente de los valores de C y R : los últimos determinan la duración del proceso, C , junto a \mathcal{E} , fija el gasto energético, pero la repartición relativa es la misma.

Descarga de un condensador

Consideremos ahora un condensador C , con una carga inicial q_0 , una resistencia R y un interruptor inicialmente abierto, véase figura 6.13. La d.d.p. en los polos del condensador vale $V_0 = q_0/C$, la energía electrostática en él almacenada es $U_e = q^2/2C$. En $t = 0$ se cierra el interruptor y las cargas se mueven desde la armadura de potencial mayor hacia aquella de potencial menor, generando una corriente positiva en la resistencia dada por $i = -dq/dt$, donde el signo menos es necesario ya que la carga disminuye en el tiempo.

En el instante genérico, la d.d.p. V_C en los polos del condensador es igual a aquella en los polos de la resistencia V_R y valen

$$V_C = \frac{q}{C} = V_R = Ri, \quad i = -\frac{dq}{dt} \implies \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC},$$

$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}, \quad \ln \frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC}.$$

Las expresiones explícitas son:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 e^{-t/RC}, \\ V_C(t) &= \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC}, \\ i(t) &= -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = \frac{V_C}{R}. \end{aligned}$$

La carga, la d.d.p. en los lados del condensador y la corriente en el circuito disminuyen exponencialmente con el tiempo con una rapidez dada por la constante de tiempo $\tau = RC$.

La potencia instantánea gastada por la resistencia es:

$$P_R = Ri^2 = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC}$$

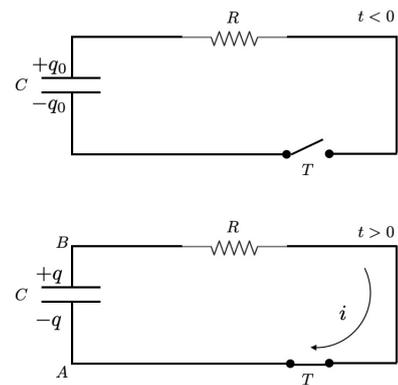


Figure 6.13: Descarga de un condensador.

y en el proceso completo se gasta energía:

$$W_R = \int_0^{\infty} P_R dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{q_0^2}{2C},$$

igual a la energía electrostática inicial del condensador.

Observamos que la corriente de carga es igual a la corriente de descarga (si ponemos $V_0 = \mathcal{E}$): ya que la misma corriente produce los mismos efectos, si en la descarga hay igualdad de módulo entre la variación de energía del capacitor y la energía disipada en la resistencia, se justifica que también en la carga las dos contribuciones sean numéricamente iguales: la diferencia radica en que ahora tienen el mismo signo y por lo tanto debe ser alimentado por una fuente externa (el generador). De hecho, las soluciones obtenidas muestran que el proceso de variación de carga por unidad de tiempo en las dos situaciones es el mismo, sólo que en un caso ocurre espontáneamente en una determinada dirección, en el otro se ve obligado a suceder en la dirección opuesta.

Los dos circuitos simples que hemos ilustrado, comúnmente llamados circuitos RC , muestran de forma realista los procesos de carga y descarga de un condensador. La carga de un condensador siempre lleva algún tiempo (el proceso no es instantáneo) porque siempre hay una resistencia en el circuito, por lo menos la resistencia interna del generador; además, el gasto de energía siempre es mayor que $CV_0^2/2$, debido a la disipación resistiva (irreversible). En el caso de la descarga, hay que destacar que si ésta se produce como se ha descrito, es decir, a través de una resistencia, la energía electrostática se pierde completamente. También observamos que un condensador aislado no conserva su carga indefinidamente, ya que siempre hay procesos de conducción a través del dieléctrico o a través del aire, que se puede esquematizar con una resistencia de pérdida R : del valor de ésta y de la capacidad depende el tiempo de descarga.

La introducción de circuitos con corriente variable en el tiempo requiere retomar la condición de estacionariedad. Hemos asumido implícitamente que la corriente $i(t)$ sea la misma en cada sección del circuito y, por lo tanto, satisface la condición de estacionariedad o, como es mejor decir aquí, de cuasi-estacionariedad. Esto significa que consideramos que el fenómeno de la variabilidad es lo suficientemente lento como para que el tiempo que tarda la luz en atravesar el circuito sea mucho menor que τ (tiempo característico del circuito RC). Si el tamaño de un circuito típico es del orden de $s = 10$ cm, el tiempo del que hablamos es $t = s/c = 3.3 \cdot 10^{-10}$ s; hasta valores de $\tau = 10^{-9}$ s la hipótesis de estacionariedad es válida.

Otro problema relacionado al condensador del circuito es el siguiente: el concepto de corriente ha sido asociado con el movimiento de cargas en un circuito cerrado, pero a través del espacio entre las armaduras de un condensador no hay transporte de cargas. La dificultad se resuelve considerando que para un cambio de carga dq en una armadura, hay un cambio $-dq$ en la otra (inducción completa) y esto equivale a decir que cuando una carga dq llega a una armadura, una carga dq sale de la otra armadura, como si la carga dq hubiera pasado por el condensador. El razonamiento sólo es válido en régimen variable: con un f.e.m. constante y una corriente constante, también la d.d.p. V_C debe ser constante, al igual que las cargas en las armaduras y por tanto no puede haber corriente en el circuito. Aparte del fenómeno transitorio, que dura unas pocas constantes de tiempo, en circuitos RC como los examinados, no puede haber un régimen de corriente continua.

Formalmente, y considerando por simplicidad un condensador plano vacío ($C = \epsilon_0 \Sigma/h$, $E = V/h$), podemos escribir

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\Sigma V}{h} \right) = \epsilon_0 \frac{d}{dt}(\Sigma E) = \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}. \quad (6.42)$$

La corriente variable se relaciona a la derivada con respecto al tiempo del flujo del campo eléctrico a través la sección del condensador. Veremos en el capítulo 10 que la ecuación (6.42) tiene un significado más profundo, y no es sólo un artificio matemático.

6.8 Leyes de Kirchhoff

En los párrafos anteriores hemos siempre considerado circuitos simples, formados por una f.e.m. y una resistencia (que puede ser la resistencia equivalente de un conjunto de resistencias en serie y en paralelo). Existen también circuitos con geometrías más complejas que no puede ser reducidos a una sola resistencia equivalente. Tanto los casos más simples como los más complejos son casos particulares de *red eléctrica*.

Los elementos geométricos de una *red* son los *nodos* y *tramos*. Un nodo es un punto donde convergen por lo menos 3 conductores; los nodos están conectados por tramos, donde pueden existir componentes activas (generadores) y componentes pasivas (resistencias). En el interior de una red es posible identificar algunos caminos cerrados, llamados *mallas*, constituidos por más tramos; un determinado tramo puede pertenecer a más mallas.

El análisis de las redes eléctricas (que no profundizaremos mucho porque es argumento de cursos más especializados) es simplificada por el uso de dos leyes generales, llamadas *leyes de Kirchhoff* relativas a los nodos y a las mallas.

Definición 6.8.1 La primera ley de Kirchhoff, o ley de los nodos, afirma que la suma algebraica de las corrientes que confluyen en un nodo es nula, si tomamos con un signo las corrientes que salen del nodo y con el signo opuesto las que entran

$$\sum_k i_k = 0 \quad (6.43)$$

Es la generalización de la ecuación (6.9), consecuencia del principio de conservación de la carga por una corriente estacionaria.

Consideremos ahora una malla de una red, en la cual fijamos arbitrariamente un sentido de recorrido; en cada tramo de la malla se fija un sentido de la corriente;

Definición 6.8.2 La segunda ley de Kirchhoff, o ley de las mallas, establece que

$$\sum_k R_k i_k = \sum_k \mathcal{E}_k : \quad (6.44)$$

la suma algebraica de las f.e.m. presentes en los tramos de la malla es igual a la suma algebraica de los productos $R_k i_k$, o sea a las d.d.p. en los extremos de cada resistencia R_k en los tramos de la malla (la suma incluye también las resistencias internas de los generadores)

Los signos de los varios términos tienen que satisfacer las siguientes reglas:

- si en el tramo k -imo la corriente i_k es concorde con el sentido elegido en la malla, $R_k i_k$ es positivo;
- en caso contrario, $R_k i_k$ es negativo;
- si en la fuente de f.e.m. \mathcal{E}_k fluye una corriente cuyo sentido va del polo negativo al polo positivo, \mathcal{E}_k es positiva;
- en caso contrario, \mathcal{E}_k es negativa.

Tomemos como ejemplo la malla en figura 6.14, con los sentidos especificados, y aplicamos la ley de Ohm generalizada (6.36) a cada tramo

$$\begin{aligned} R_1 i_1 &= V_A - V_B + \mathcal{E}_1 \\ R_2 i_2 &= V_B - V_C - \mathcal{E}_2 \\ -R_3 i_3 &= V_C - V_D - \mathcal{E}_3 \\ R_4 i_4 &= V_D - V_A + \mathcal{E}_4. \end{aligned}$$

Sumando las cuatro ecuaciones tenemos

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 + R_4 i_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4,$$

que corresponde a la ecuación (6.44), si se satisfacen las reglas de los signos enunciadas.

La aplicación de las dos leyes de Kirchhoff a una red, formada por varias mallas, lleva a definir un procedimiento general de solución de circuitos.

Si la red tiene N nodos ($N \geq 2$) y L tramos ($L \geq 3$), utilizando la ecuación (6.43) se pueden escribir N ecuaciones lineales entre las corrientes que circulan en los L tramos; de estas sólo $N - 1$ son independientes, como se puede entender si se piensa que cada corriente de un tramo pertenece siempre a dos nodos, aquellos a los extremos de un tramo, y, por lo tanto, las $N - 1$ ecuaciones contiene todas las informaciones. Al final tendremos L incógnitas y $N - 1$ condiciones, por lo tanto el número de corrientes independientes a encontrar es

$$M = L - (N - 1) = L - N + 1.$$

Éste es también el número de mallas independientes que se pueden encontrar en una red ($M \geq 2$). Una manera simple de encontrar M mallas en una red es de elegir las mallas tal que cada una tenga por lo menos un tramo que no pertenece a la malla anterior. Una vez encontradas las M mallas, se asocia a cada malla una corriente i_1, \dots, i_M .

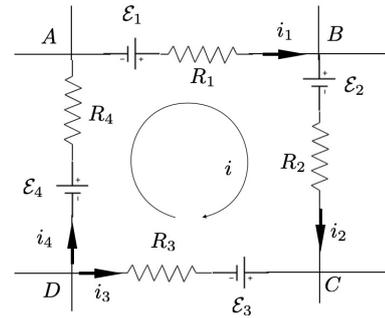
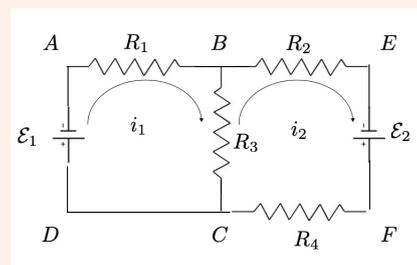


Figure 6.14: Descarga de un condensador.

Ejercicio 6.7 En la red eléctrica mostrada en figura, $\mathcal{E}_1 = 18 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 12 \text{ V}$, $R_1 = 12 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$. Determinar la intensidad de corriente erogada por cada generador y la intensidad de corriente que circula en R_3 . Verificar que el balance energético de la potencia en la red. Las resistencias internas de los generadores son despreciables.

Solución: Los nodos de la red son dos, B y C , y los tramo son tres; por lo tanto el número de mallas independientes es $M = 3 - 2 + 1 = 2$.

Elegimos las mallas $ABCD$ y $BEFC$, con las corrientes i_1 e i_2 en los sentidos mostrados. En el tramo que contiene R_3 suponemos que la corriente, igual a $i_1 - i_2$, vaya desde B hacia C . Escribimos la ecuación (6.44)



$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_1 &= R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2), \\ \mathcal{E}_2 &= (R_2 + R_4)i_2 - R_3(i_1 - i_2). \end{aligned}$$

Ordenamos las anteriores para poner en evidencia las corrientes

$$\begin{aligned} (R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 &= -\mathcal{E}_1, \\ -R_3 i_1 + (R_2 + R_3 + R_4)i_2 &= \mathcal{E}_2, \end{aligned}$$

y numéricamente encontramos

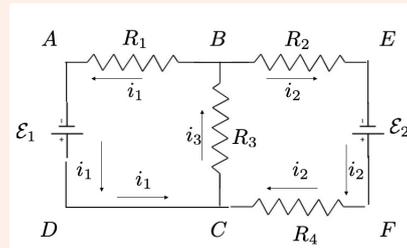
$$i_1 = -0.8 \text{ A}, \quad i_2 = 0.6 \text{ A}.$$

La corriente en la primera malla circula en el sentido contrario al elegido; en la resistencia R_3 las corrientes tienen el mismo sentido y valdrá 1.4A desde C hacia B . La solución está mostrada en figura. La potencia erogada por los generadores es

$$P_{\text{gen}} = \mathcal{E}_1 i_1 + \mathcal{E}_2 i_2 = 21.6\text{W},$$

y para las resistencias

$$P_{\text{R}} = \sum_{k=1}^4 R_k i_k = 21.6\text{W},$$





7. Campo magnético

La propiedad de atraer limaduras de hierro que presentan ciertos minerales de hierro y, en particular, la *magnetita* (combinación de óxidos de hierro, $FeO - Fe_2O_3$), se conocía ya en el siglo VII a.C.; el nombre de magnetita se derivó del nombre de la ciudad griega de Magnesia, en Asia Menor, donde se encontraron depósitos del mineral, y la propiedad observada se denominó magnetismo.

Esta propiedad de atracción no está presente de manera uniforme en el material, sino que se manifiesta principalmente en ciertas partes, y es posible construir muestras cilíndricas donde esta propiedad se localiza en las bases. Tanto estos objetos como otros con una geometría diferente (por ejemplo, una barra doblada en forma de *C*) se denominan imanes y las partes donde se localiza la propiedad de atracción se llaman *polos del imán*.

En el siglo XVI, W. Gilbert realizó una serie de experimentos con imanes con el fin de poner en evidencia las características del magnetismo y las diferencias con los fenómenos de la electrostática, que él mismo había estudiado (véase el capítulo 1). Los resultados sobre el estudio de las interacciones de los polos magnéticos, teniendo en cuenta también las observaciones posteriores, se resumen en los siguientes puntos.

- A. Si un imán suspendido en el centro por un hilo, y por lo tanto libre de girar, se acerca a un segundo imán, sostenido por ejemplo con la mano, se observa que éste ejerce una cierta fuerza sobre el primero. Como en el caso de las fuerzas de naturaleza electrostática, podemos interpretarlo diciendo que un imán genera un campo, llamado campo magnético, y que el otro imán se ve afectado por la acción que el campo magnético ejerce en la posición que ocupa. Un análisis sistemático nos lleva a establecer que la fuerza de interacción entre los dos imanes es atractiva o repulsiva en función de los polos, y que sólo hay dos tipos de polos, llamados polos positivos y polos negativos; además, encontramos que los polos de un mismo imán son siempre de signo contrario. La forma en que se realizó este primer experimento deja claro que los fenómenos observados no son en absoluto atribuibles a cargas eléctricas fijas, localizadas en determinadas regiones de los imanes. De hecho, la magnetita es un conductor y el segundo imán, que se sostiene en la mano, está ciertamente descargado, como se puede comprobar por medios electrostáticos.
- B. Si se coloca una varilla fina de hierro cerca de un trozo de magnetita, ésta adquiere la

propiedad de atraer limaduras de hierro, principalmente en las proximidades de los extremos: la varilla de hierro inmersa en el campo magnético generado por la magnetita se ha convertido así en un imán, es decir, se ha *magnetizado*. Se llama imán artificial o imán y tiene dos polos magnéticos de signo contrario. Si es pequeña, la varilla se llama también *aguja magnética* magnético.

- C. Si suspendemos la aguja magnética definida anteriormente por un hilo y la dejamos libre de girar, observamos que tiende a posicionarse aproximadamente paralela al meridiano terrestre; desplazada de esta posición de equilibrio, la aguja efectúa oscilaciones a su alrededor, que son inevitablemente amortiguadas por el rozamiento. La experiencia demuestra la existencia de un campo magnético natural, el *campo magnético terrestre*, y pone en evidencia un comportamiento de la aguja magnética totalmente análogo al de un dipolo eléctrico situado en un campo eléctrico \vec{E} . La aguja magnética, en otras palabras, se comporta como un dipolo magnético que, dejado libre, se orienta en la dirección y sentido del campo magnético existente en el punto donde se coloca. El polo de la aguja que está orientado aproximadamente hacia el norte geográfico se llama polo norte (*N*) y recibe un signo positivo, el otro se llama polo sur (*S*) y recibe un signo negativo. Una vez definidos de esta manera los polos de un imán y realizando experimentos como los del punto A, se comprueba siempre que la interacción entre polos magnéticos del mismo signo es repulsiva, y la de los polos magnéticos de signo contrario, atractiva.
- D. El estudio cuantitativo de la fuerza magnética entre los polos de dos imanes, realizado por Coulomb con el mismo aparato con el que había obtenido la ley para la fuerza entre cargas eléctricas, demostró también en este caso una tendencia inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, al menos para polos puntiformes, como son con buena aproximación los de los extremos de las barras largas y finas. Por lo tanto, se podría enunciar una ley de Coulomb para la interacción magnética entre dos polos, dada por la fuerza

$$F_m = \kappa_m \frac{q_1^* q_2^*}{r^2}, \quad (7.1)$$

donde los polos están caracterizados por las *masas magnéticas* q_1^* y q_2^* y una constante κ_m que depende del medio donde se efectúa el experimento.

Aunque la estructura de la ecuación (7.1) sea idéntica a la de la fuerza entre dos cargas eléctricas o entre dos masas, hay, sin embargo, una diferencia fundamental.

Una carga eléctrica, ya sea positiva o negativa, siempre puede ser aislada y esto es consecuencia de la existencia de la carga elemental positiva que lleva el protón y la carga elemental negativa que lleva el electrón: es decir, la posibilidad de separación ya existe a nivel elemental. Incluso la masa, aunque no cuantizable y sea de un solo signo, es claramente aislable a nivel elemental. En cambio, nunca ha sido posible obtener un polo magnético aislado: los polos magnéticos parecen existir siempre en pares de igual valor y signo contrario, es decir, sólo se manifiestan en forma de dipolos magnéticos. La indicación clásica, obtenida cuando aún no se había formado la imagen actual de la estructura elemental de la materia, es la aparición del imán cortado. Si se corta un imán por la mitad, siempre aparecen dos polos de signo contrario en la zona del corte, que antes no presentaba la propiedad de atraer limaduras de hierro. Con el dispositivo experimental de Coulomb, tras comprobar la igualdad en módulo de los polos preexistentes, se comprueba que los dos nuevos polos son cuantitativamente iguales a éstos. Repitiendo el corte en piezas cada vez más pequeñas, se obtiene cada vez el mismo resultado, sin conseguir aislar un polo magnético.

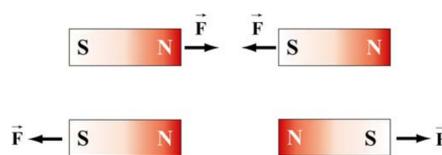


Figure 7.1: Fuerza entre imanes.

Junto a esta experiencia, son significativas aquellas realizadas con limaduras de hierro colocadas en la proximidad de un imán, figura 7.2. Los granos de limaduras se disponen ordenadamente a lo largo de líneas regulares, lo que interpretamos suponiendo que cada grano se magnetiza por el campo magnético del imán y se convierte en un dipolo magnético orientado paralelamente al campo mismo.

El conjunto de hechos experimentales presentados aquí sugiere la hipótesis de que los elementos constitutivos de los imanes son dipolos magnéticos, es decir, objetos caracterizados por una masa magnética nula y un momento de dipolo magnético \vec{m} . Dado que la no aislabilidad de los hipotéticos polos magnéticos se confirma también a nivel elemental, nos lleva a suponer que los átomos y las moléculas, al igual que poseen una estructura eléctrica, también tienen un momento dipolar magnético. Por lo tanto, concluimos que la ecuación (7.1) no juega un papel fundamental, siendo utilizable sólo en situaciones particulares y refiriéndose a cantidades como las masas magnéticas que no tienen realidad física.



Figure 7.2: Limadura de hierro en un campo magnético.

La primera relación entre fenómenos magnéticos y eléctricos fue por parte de Oersted en el año 1811 y, consecutivamente, profundizado por Ampère en el 1820. El experimento ha sido posible gracias a la pila de Volta que permitió la producción de corrientes eléctricas constantes e intensas y por un periodo de tiempo suficientemente largo. Oersted mostró que una aguja magnética puesta cerca de un hilo donde pasa corriente, se coloca en una posición particular de equilibrio. Estos resultados se interpretan diciendo que en un hilo donde pasa corriente se genera un campo magnético y la aguja se orienta según este campo magnético. Sucesivamente, Ampère demostró que también dos hilos, en los cuales pasa corriente, interactúan e intuyó que las *acciones magnéticas no son nada más que la manifestación de la interacción de cargas eléctricas en movimiento*.

Para explicar las acciones sobre los imanes necesitamos pensar que en cada átomo o en cada molécula tienen que existir corrientes microscópicas locales, que se llaman corrientes moleculares de Ampère o corrientes amperianas; la interacción entre un circuito donde pasa corriente eléctrica y un imán es el resultado de la interacción entre los electrones en movimiento en el conductor y las corrientes amperianas en el imán. La interacción entre dos imanes es simplemente la interacción entre las corrientes amperianas en los dos imanes.

Está claro que no sólo el concepto de masa magnética no tiene significado físico sino que también el concepto de dipolo magnético no tiene realidad física: podemos utilizar los dipolos magnéticos solamente para representar la manera con la cual se manifiestan las interacciones magnéticas, o sea, como un artefacto matemático. De hecho, Ampère demostró la *equivalencia entre un circuito donde pasa corriente y un dipolo magnético*. Ya que hemos implementado el concepto de dipolo eléctrico, es útil utilizarlo también para los fenómenos magnéticos. Según la analogía con un dieléctrico polarizado, podemos decir que un imán viene visto como un medio polarizado y los efectos magnéticos se observan solamente en los extremos donde no existe compensación entre dipolos consecutivos. Además, ya que $\sum_i q_i^* = 0$, se puede decir que el *momento de dipolo magnético* es una propiedad intrínseca del sistema.

Advertimos que un circuito eléctrico y un dipolo magnético, aunque sean equivalentes bajo muchos aspectos, no son el mismo sistema físico, por lo tanto, la equivalencia es incompleta. De

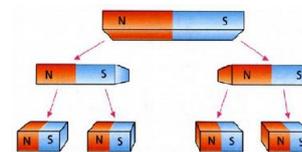


Figure 7.3: Imanes cortados.

hecho, demostraremos que el campo magnético no es irrotacional ($\nabla \times \vec{B} \neq 0$), mientras que debería de ser así si los dipolos obedecieran a la ley (7.1). Además, la hipótesis de la existencia física de los dipolos magnéticos está descartada también a nivel microscópico. Se descubrió que los constituyentes del átomo (el protón, el neutrón y el electrón), poseen un momento magnético: ahora, mientras que para los primeros se les atribuye una estructura a quark, por lo tanto, el momento magnético sería asociado a estos, el electrón (como también los quarks) entre los límites de nuestro conocimiento es puntual, por lo tanto, el momento magnético aparece como una propiedad intrínseca, además, conectando al momento angular intrínseco (spin), no asociable a movimiento internos o rotaciones sobre su eje, imposible para un objeto puntual.

Volviendo al desarrollo histórico, en los años posteriores a 1820 Faraday demostró una nueva conexión entre la electricidad y el magnetismo, demostrando que los campos magnéticos que varían en el tiempo producen campos eléctricos (no conservativos). Finalmente Maxwell, a quien se debe la ordenación formal del electromagnetismo clásico, predijo el resultado simétrico, es decir, que los campos eléctricos que varían en el tiempo dan lugar a campos magnéticos. Por lo tanto, demostró que, en el caso más general, un campo eléctrico y un campo magnético no pueden tener existencia independiente y deben ser verificados en único concepto: un campo *electromagnético*. Con el desarrollo de la teoría de la relatividad especial, la noción de campo electromagnético adquirió un aspecto más, en el sentido de que los campos eléctricos y magnéticos tienen un significado relativo: una interacción magnética en un sistema de referencia inercial puede parecer eléctrica en otro sistema de referencia inercial y viceversa.

N La existencia del monopolio magnético elemental (y de su antipartícula) no contradiría las teorías cuánticas que describen el comportamiento elemental de la materia. Una posible explicación de su ausencia actual es la siguiente: en el big-bang del que se originó el universo, también se produjeron monopolos y antimonopolos, junto con las demás partículas: la mayoría de éstas, tras los procesos de aniquilación partícula-antipartícula desaparecieron en muy poco tiempo, liberando energía. Algunos, sin embargo, podrían haber sobrevivido y haberse dispersado por el universo, de forma similar a los neutrinos y a la llamada radiación cósmica de fondo de microondas, otros fósiles de los procesos que ocurrieron en los instantes inmediatamente posteriores, el big-bang. Dado que la interacción de estos hipotéticos monopolos con la materia podría dar lugar a una considerable liberación de energía (a escala microscópica), se han construido experimentos para señalar el posible paso de los monopolos: uno de ellos está instalado en el laboratorio subterráneo Gran Sasso del Instituto Nacional de Física Nuclear. El rasgo característico de estos laboratorios es el apantallamiento de gran parte de la radiación cósmica mediante kilómetros de roca, lo que facilita la detección de fenómenos poco frecuentes debidos a la penetración de partículas extraterrestres: por ejemplo, en el laboratorio de Gran Sasso se ha realizado recientemente una medición directa del flujo de neutrinos producido en las reacciones nucleares que tienen lugar en el interior del sol.

7.1 Líneas de fuerza del campo magnético

La conclusión principal del párrafo anterior es que las acciones del campo magnético son el resultado de la interacción entre las cargas en movimientos; utilizando la representación a través de un campo, podemos decir que la acción magnética es debida al hecho de que un sistema de cargas en movimiento genera un campo magnético, que indicaremos con \vec{B} , y que el otro sistema de cargas en movimiento siente una fuerza porque está sumergido en \vec{B} .

Examinemos ahora algunas propiedades del campo magnético. Primero, el campo magnético es una cantidad vectorial, la verificación experimental está dada por el estudio de las direcciones de la aguja en un campo magnético. Determinar \vec{B} quiere decir darle a cada punto una dirección, sentido y módulo. En general, estos varían por cada punto (campo no uniforme) y en un punto varían en el tiempo (campo no constante); además, el valor de \vec{B} puede depender del medio donde se propague.

Como por el campo eléctrico, empezaremos con el estudio de los fenómenos magnéticos en el vacío y estacionarios, o sea, el campo magnético es constante en el tiempo (o lentamente variable).

La representación del campo magnético se hace utilizando las líneas de fuerza y valen las mismas propiedades a), b) y c) que hemos visto para el campo eléctrico (sección 1.5). Una simbología específica, que adoptamos aquí para el campo magnético pero es aplicable a cualquier situación, es la situación donde las líneas de fuerza son ortogonales a un plano (muchas veces coincide con la hoja que estamos leyendo): con un punto se indica que el campo \vec{B} sale de la hoja, con una cruz que entra en la hoja.

La propiedad d) vista por las líneas de fuerza del campo eléctrico, o sea, tienen origen en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas, no puede ser extendida al campo magnético: bajo este punto de vista, las líneas de fuerza para los dos campos son intrínsecamente distintas. La demostración es la siguiente: consideramos una superficie cerrada Σ que contiene en su interior un imán o también parte de esto. La equivalencia formal entre las corrientes microscópicas y los dipolos magnéticos lleva a que en el interior de la superficie esté contenido siempre un número entero de dipolos, cualquier superficie *no puede nunca cortar* uno de estos hipotéticos dipolos magnéticos elementales. Por otra parte, el campo magnético genera una fuerza que es del tipo ecuación (7.1), condición necesaria y suficiente para formular la ley de Gauss para \vec{B} (como por el campo \vec{E}). Dada la estructura dipolar, la suma de las masas magnéticas es siempre nula, sigue que:

Definición 7.1.1

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0 : \quad (7.2)$$

el flujo del campo magnético a través de una cualquiera superficie cerrada es siempre nulo. En términos locales, como la divergencia del campo magnético es siempre nula:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (7.3)$$

A pesar de que haya sido demostrada utilizando la ecuación (7.1), ésta es válida en general y constituye una de las propiedades fundamentales del campo magnético; la ecuación (7.3) corresponde a una de las ecuaciones de Maxwell en el caso estacionario.

El campo \vec{B} es por lo tanto solenoidal; el flujo de \vec{B} a través de infinitas superficies que tienen el mismo contorno es siempre el mismo; por lo tanto, se puede hablar de manera unívoca de flujo a través de una línea cerrada o sea de flujo concatenado con una línea cerrada:

$$\int_{\Sigma_1} \vec{B}_1 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_2} \vec{B}_2 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2 = \dots \int_{\Sigma_i} \vec{B}_i \cdot \hat{u}_n d\Sigma_i. \quad (7.4)$$

Una consecuencia de la ecuación (7.2) es que tomada cualquier superficie cerrada por cada línea de fuerza que sale, tiene que existir otra que entra: si así no fuera, el flujo a través de la superficie cerrada sería distinto que cero. Esta condición, junta a la no existencia de masas magnéticas aisladas y de dipolos magnéticos reales, lleva a la conclusión de que *las líneas de fuerza del campo magnético son líneas cerradas, sin inicio y sin fin*.

7.2 Fuerza magnética sobre una carga en movimiento

Consideremos una partícula de masa m y carga q , puesta en un campo magnético \vec{B} . Si la partícula está en reposo en un sistema de referencia con respecto a las fuentes del campo magnético, se encuentra que sobre ella no actúa ninguna fuerza, de acuerdo con lo dicho anteriormente de que la interacción magnética se manifiesta solamente entre cargas en movimiento. Si de lo contrario, la

partícula se mueve con una velocidad \vec{v} con respecto al sistema de referencia, se observa que sobre la partícula actúa una fuerza llamada *fuerza de Lorentz*,

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (7.5)$$

El modulo de la fuerza de Lorentz es:

$$F = qvB \sin \theta \quad (7.6)$$

siendo θ el ángulo entre \vec{v} y \vec{B} : la fuerza es nula si la velocidad es paralela al campo magnético $\theta = 0$, $\theta = \pi$ y es máxima e igual a qvB , cuando \vec{v} es ortogonal a \vec{B} . La dirección de la fuerza es ortogonal al plano formado por \vec{v} y \vec{B} y el sentido está determinado por la regla del producto vectorial si la carga es positiva, mientras que es opuesto si la carga es negativa; recordemos que tal regla es la regla de la mano derecha que lleva \vec{v} sobre \vec{B} (véase figura 7.5).

En particular, la fuerza es siempre ortogonal a la velocidad, o sea, a la trayectoria y por lo tanto, según la definición de trabajo y de energía cinética, se obtiene

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_Q^2 - \frac{1}{2}mv_P^2 = W = \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (7.7)$$

Para cualquier desplazamiento desde el punto P al punto Q en la región donde existe el campo magnético, la energía cinética de la partícula se mantiene constante ya que la fuerza de Lorentz no cumple ningún trabajo sobre la partícula: la fuerza no entrega a la partícula una aceleración tangencial, sino que solamente una aceleración centrípeta. En otras palabras, cuando una partícula cargada se mueve en un campo magnético, su velocidad cambia en dirección pero no en modulo.

Es conveniente poner en evidencia las diferencias entre la fuerza magnética ecuación (7.5) y la fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$. Por la última, a menos que los puntos P y Q coincidan o se encuentren en una superficie equipotencial, se cumple siempre un trabajo

$$W = \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{s} = q(V_P - V_Q)$$

y la energía cinética de la partícula cambia; en general, la velocidad puede cambiar en modulo y en dirección.

Notemos además que la fuerza electrostática es paralela al campo \vec{E} , mientras que la fuerza magnética es ortogonal a \vec{B} .

Unidades 7.2.1 Desde la fuerza de Lorentz podemos ya definir la unidad de medida del campo magnético

$$B = \frac{F}{qv} = \frac{\text{N}}{\text{C m s}^{-1}} = \frac{\text{N}}{\text{A m}} = \text{T} \quad (7.8)$$

llamado Tesla

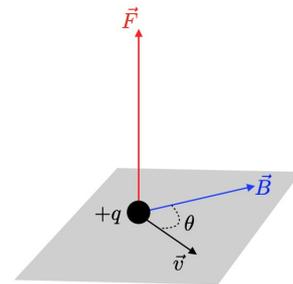


Figure 7.4: Fuerza de Lorentz.

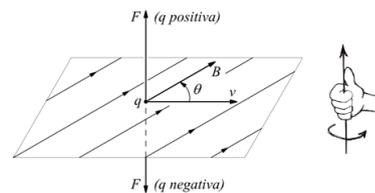


Figure 7.5: Fuerza de Lorentz: regla de la mano derecha.

7.2.1 Movimiento en un campo uniforme, $\theta = \pi/2$

Supongamos que el campo magnético \vec{B} sea uniforme en una región y que la velocidad inicial de la partícula sea ortogonal a \vec{B} : la fuerza dada por ecuación (7.5), también ortogonal a \vec{B} , produce una variación en la dirección de la velocidad, que sigue siendo ortogonal a \vec{B} . El movimiento de la partícula es así en un plano y la ley del movimiento es, poniendo en ecuación (7.6) $\sin \theta = 1$:

$$F = qvB = ma_n = m \frac{v^2}{r}$$

donde obtenemos el *radio de curvatura* de la trayectoria

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (7.9)$$

El radio de curvatura es contante ya que todas las cantidades son constantes. La ecuación (7.9) es correcta para todos los valores de v ; para velocidades cercanas a la de la luz, la relación anterior es modificada por los efectos relativísticos $m\gamma v = mv/\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Ya que el radio de curvatura es constante, entonces la trayectoria es un arco de circunferencia de radio r dado por la ecuación (7.9) o una circunferencia completa, si la partícula sigue en la región donde está definido el \vec{B} . El movimiento es circular uniforme con velocidad igual a aquella inicial y velocidad angular:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}. \quad (7.10)$$

La anterior se puede escribir en forma vectorial. Recordando la expresión de la velocidad y de la aceleración de un movimiento circular, y la propiedad de anticomutatividad del producto vectorial:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \implies \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (7.11)$$

el termino $\vec{\alpha} \times \vec{r} = \vec{a}_T$ es la aceleración tangencial y el segundo $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_N$ es la aceleración centripeta. Porque ω es constante por la ecuación (7.10) (si \vec{B} es constante) tenemos, acordando también la propiedad anticonmutativa del producto vectorial:

$$q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{\omega} \times \vec{v} = -m\vec{v} \times \vec{\omega}$$

o sea

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}. \quad (7.12)$$

Esta relación es independiente del valor del ángulo θ y muestra que la velocidad angular es siempre paralela a \vec{B} : si la carga es negativa, $\vec{\omega}$ toma el mismo sentido de \vec{B} y, por lo tanto, desde la punta de \vec{B} el movimiento es antihorario, si la carga q es positiva, $\vec{\omega}$ es opuesto a \vec{B} y el movimiento es horario.

En fin, el periodo del movimiento circular uniforme y la frecuencia valen:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}, \quad (7.13)$$

y no depende del radio de curvatura ni de la velocidad.

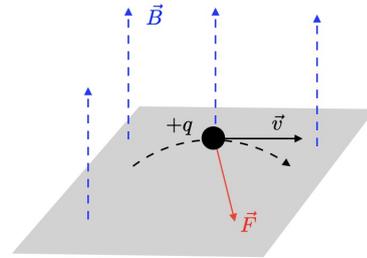


Figure 7.6: Fuerza de Lorentz, $\theta = \pi/2$.

La relación (7.9) se puede escribir como

$$B = \frac{mv}{qr}$$

y se presta a una definición operativa de B basada en la medición del radio de curvatura de la trayectoria recorrida por las partículas con velocidad y relación m/q conocidas. El campo magnético se da en función de las cantidades mecánicas y de la carga eléctrica, sin tener que definir previamente cantidades como la masa magnética o el momento de dipolo magnético o a la acción que experimenta una aguja magnética en un campo magnético. Una versión más práctica de la definición operativa de B a través de la fuerza de Lorentz se mostrará en el ejemplo 7.1.

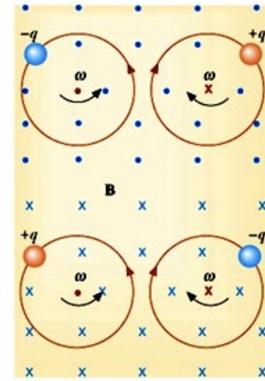


Figure 7.7: Movimiento de carga.

7.2.2 Movimiento en un campo uniforme, θ genérico.

Si el ángulo θ que forma la velocidad de la partícula con el campo magnético es cualquiera, tenemos que decomponer la velocidad inicial en dos componentes $v_n = v \sin \theta$ ortogonal a \vec{B} y $v_p = v \cos \theta$ paralela a \vec{B} . La fuerza magnética que actúa sobre la partícula es

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{v}_n + \vec{v}_p) \times \vec{B} = q\vec{v}_n \times \vec{B}$$

ya que $\vec{v}_p \times \vec{B} = 0$ (son vectores paralelos).

Por lo tanto, tenemos en un plano ortogonal a \vec{B} un movimiento circular uniforme con velocidad v_n igual a lo descrito anteriormente; el radio de curvatura es:

$$r = \frac{mv_n}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB}. \quad (7.14)$$

Ya que en la dirección de \vec{B} no existe fuerza, \vec{v}_p se mantiene constante y el movimiento proyectado en la dirección de \vec{B} es lineal y uniforme. La composición de los dos movimientos genera un movimiento helicoidal uniforme que tiene como eje la dirección de \vec{B} . En el tiempo $T = 2\pi/\omega$, independiente de \vec{v} , la partícula se desplaza de una cantidad

$$p = v_p T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB}, \quad (7.15)$$

que se llama *paso de la hélice*. Fijado \vec{B} , el sentido de la hélice corresponde al sentido del movimiento circular y por lo tanto está dado por la regla encontrada en caso anterior.

Botella magnética y bandas de Van Allen.

Cuando el movimiento de las partículas se produce en un campo magnético no uniforme, se producen situaciones complejas. Como ejemplo, consideremos un campo magnético con simetría axial, más intenso en los extremos y más débil en el centro, según el diagrama de la figura 7.9, donde el engrosamiento y el adelgazamiento de las líneas de campo indican el valor del módulo de \vec{B} . El eje z es el eje de simetría, y el campo magnético tiene la componente longitudinal B_z , siempre del mismo signo, y la componente radial B_r que cambia de signo de izquierda a derecha; el patrón es el mismo en todos los planos que pasan por el eje z . Esta configuración se conoce como *botella magnética*.

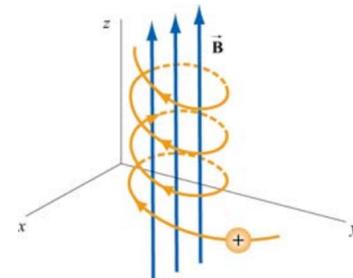


Figure 7.8: Movimiento helicoidal.

Supongamos de colocar una carga positiva en la zona superior izquierda y con velocidad que entra en la hoja: la carga está sometida a la fuerza $q\mathbf{v} \times (\vec{B}_z + \vec{B}_r)$, que inicialmente tiene una componente radial debida a \vec{B}_z , y una componente a lo largo del eje z , debida a \vec{B}_r . La partícula comienza así a girar alrededor del eje z desplazándose hacia una zona donde B es menor y el radio de curvatura (7.14) y el paso de la hélice (7.15) aumentan. En un instante genérico tenemos, por lo tanto, un movimiento helicoidal de radio y paso variables; \vec{B}_z actúa sólo sobre la componente \vec{v}_n de la velocidad, \vec{B}_r actúa tanto sobre \vec{v}_n como sobre \vec{v}_p . Una vez pasado el centro, \vec{B}_r cambia de dirección y la fuerza a lo largo del eje z también cambia de dirección y ahora frena el movimiento de la partícula a lo largo del eje z ; mientras tanto, la partícula se desplaza hacia zonas donde B es mayor, de modo que tanto el radio de curvatura como el paso de la hélice disminuyen. Es posible que en un determinado instante $\vec{v}_n = \vec{v}_p$ se anule y luego cambie de signo: la partícula vuelve atrás, recorriendo una trayectoria helicoidal diferente, pero con el mismo sentido de rotación. Este efecto de espejo magnético se repite en el movimiento de derecha a izquierda y la partícula se queda atrapada.

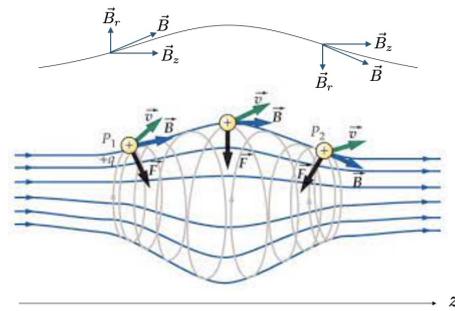


Figure 7.9: Botella magnética

El sistema constituye un contenedor sin paredes, por ejemplo, para mantener confinado un plasma de electrones e iones positivos a temperaturas muy elevadas ($T > 10^7$ K), como se requeriría en aplicaciones de tipo fusión termonuclear controlada. Sin embargo, en las condiciones requeridas para la fusión, es decir, densidades muy elevadas de partículas cargadas, el sistema no es estable: de hecho, el movimiento de estas cargas produce un campo magnético que altera en gran medida la configuración del campo magnético deseado; como resultado, muchas partículas dejan de estar confinadas y no se puede alcanzar la densidad requerida para los procesos de fusión. En otras palabras, la botella magnética sólo funciona si la densidad del plasma es tal que la configuración de \vec{B} en la botella no se ve alterada. Los cinturones de Van Allen son un ejemplo del efecto botella magnética debido al campo magnético terrestre, cuyas líneas tienen precisamente el patrón descrito, con los extremos en los polos Norte y Sur. Las partículas cargadas, esencialmente protones y electrones, procedentes directamente del exterior de la tierra o producidas por interacciones de partículas cósmicas con la atmósfera terrestre, entran en la botella magnética y realizan el movimiento descrito quedando atrapadas. El confinamiento no es perfecto y se alcanza un equilibrio dinámico entre las partículas que entran y las que salen.

Hay dos zonas de confinamiento: una zona interior, poblada por protones y electrones derivados de la desintegración de neutrones producidos en las interacciones entre las partículas cósmicas y la atmósfera que se extiende desde 800 km hasta 4000 km desde la superficie terrestre y una zona exterior, compuesta por partículas cósmicas procedentes del sol, principalmente electrones que se extiende hasta 60000 km de la tierra, como en figura 7.10. Los cinturones de Van Allen fueron descubiertos en 1958 al examinar los datos transmitidos por los equipos puestos en órbita por el satélite estadounidense Explorer I y estudiados posteriormente por otros satélites estadounidenses y soviéticos. El nombre proviene del investigador responsable del diseño del primer experimento por satélite destinado a medir la distribución de partículas cargadas en la atmósfera superior de la Tierra. La densidad de partículas cargadas en los cinturones de Van Allen es alrededor de $10^4 - 10^5$ partículas/cm³ (en el

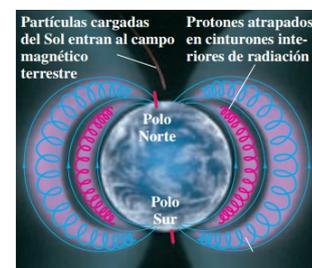


Figure 7.10: Cinturones de Van Allen.

aire a presión atmosférica tenemos $2.5 \cdot 10^{19}$ moléculas/cm³).

7.3 Fuerza magnética en un conductor

La corriente eléctrica en un conductor es debida al movimiento de electrones bajo la acción de un campo eléctrico creado por un generador; si n es el número de electrones libres por unidad de volumen, cada uno con carga $-e$, y \vec{v}_d sus velocidades de deriva, la densidad de corriente se escribe como $\vec{j} = -ne\vec{v}_d$, siendo paralela y con el mismo sentido que el campo eléctrico. Si un conductor donde pasa corriente está en una región donde existe un campo magnético, cada electrón está sujeto a la fuerza de Lorentz

$$\vec{F}_L = -e\vec{v}_d \times \vec{B}.$$

A través de los choques que los electrones en movimiento tienen con los iones del retículo, esta fuerza se transmite a la masa del hilo conductor, que ahora en adelante supondremos indeformable.

En un tramo de conductor ds y de sección Σ están contenidos $n\Sigma ds$ electrones y la fuerza resultante es:

$$d\vec{F} = n\Sigma ds \vec{F}_L = -(\Sigma ds) ne\vec{v}_d \times \vec{B} = \Sigma ds \vec{j} \times \vec{B}.$$

Desde la relación anterior, siendo Σds igual al volumen infinitesimal $d\tau$, se nota que la fuerza que actúa por unidad de volumen sobre el conductor es:

$$\vec{F}_\tau = \vec{j} \times \vec{B}. \quad (7.16)$$

Por otro lado, haciendo referencia a un hilo conductor y recordando que Σj es la corriente i que pasa en el hilo, orientamos $d\vec{s}$ como \vec{j} y obtenemos:

$$d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B}. \quad (7.17)$$

Esta relación se llama *segunda ley de Laplace* y expresa el hecho de que la fuerza magnética sobre un tramo infinitesimal de hilo donde pasa corriente es ortogonal al hilo y al campo magnético y está orientado con respecto a $d\vec{s}$ y \vec{B} según la regla de la mano derecha; el módulo es $dF = iB ds \sin \theta$, siendo θ el ángulo entre $d\vec{s}$ y \vec{B} . Observemos que el signo de la fuerza no depende del signo de los portadores de carga y es proporcional a la corriente.

Para obtener la fuerza sobre un tramo de hilo indeformable de longitud finita, donde pasa corriente i (estacionaria), se integra la ecuación (7.17):

$$\vec{F} = i \int_P^Q d\vec{s} \times \vec{B}, \quad (7.18)$$

donde los puntos P y Q son los extremos del hilo.

Dado un campo magnético cualquiera, la ley (7.18) permite calcular la fuerza magnética que actúa sobre un hilo conductor donde pasa corriente de forma cualquiera; en general la fuerza es distinta que cero también si el circuito es cerrado ($P \equiv Q$). La estructura de la ecuación (7.18) muestra que la fuerza total es la suma de infinitos elementos infinitesimales; pero a diferencia de otros casos matemáticamente similares, donde la contribución de cada elemento infinitesimal tiene sentido físico, en el caso de la ecuación (7.18) la contribución del elemento singular no tiene significado físico: de hecho no es posible realizar un tramo infinitesimal de conductor donde pasa corriente y medir la fuerza sobre de este; en otras palabras, la ecuación (7.17) es un instrumento

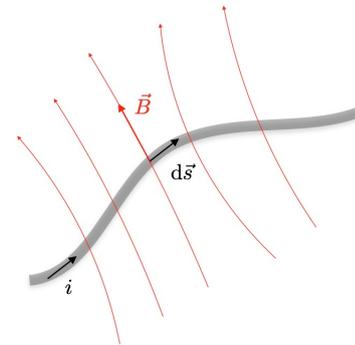


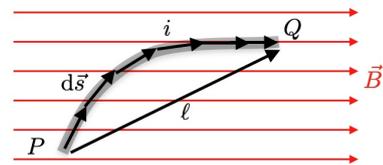
Figure 7.11: Conductor en un campo magnético.

matemático de calculo. A nivel elemental tiene sentido hablar de corriente cerrada como aquella corriente que circula en una espira infinitesimal de Ampère o aquella debida a un electrón alrededor de un núcleo.

Otra observación importante es la siguiente: la ecuación (7.18) es una ley macroscópica muy bien verificada experimentalmente, que podemos asumirla como *ley de base*; desde esta, podemos obtener la ecuación (7.5) razonando al contrario, una vez admitido que la corriente es debida a un flujo de cargas elementales. Por eso, se nota que la velocidad a considerar en la ecuación (7.5) aplicada a los electrones de conducción es aquella (como hemos admitido implícitamente) de deriva v_d y no la velocidad de agitación térmica, mucho más grande que v_d . Este hecho confirma la idea de que las velocidades térmicas están distribuidas de manera casual, por lo tanto, la velocidad resultante de las correspondientes fuerzas de Lorentz es cero en cada instante; se explica así que para un conductor en campo magnético donde no circula corriente no actúa ninguna fuerza magnética.

Estudiemos ahora algunos casos particulares. Supongamos que el campo magnético sea uniforme y que el hilo conductor donde pasa corriente sea lineal, de longitud ℓ . Entonces la ecuación (7.18) se simplifica en

$$\vec{F} = i \left(\int_P^Q d\vec{s} \right) \times \vec{B}, \tag{7.19}$$



porque el módulo del campo y el ángulo entre $d\vec{s}$ y \vec{B} son constantes entonces tendremos

$$\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B} \quad \text{y} \quad F = i\ell B \sin \theta. \tag{7.20}$$

Figure 7.12: Conductor curvilíneo en un campo magnético.

Si el conductor es curvilíneo, pero está en un plano, se puede demostrar fácilmente que

$$\vec{F} = i \int_P^Q d\vec{s} \times \vec{B} = i\vec{PQ} \times \vec{B}. \tag{7.21}$$

Es suficiente escribir

$$d\vec{s} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y + dz\hat{u}_z, \quad \vec{PQ} = \Delta x\hat{u}_x + \Delta y\hat{u}_y, \quad \vec{B} = B_x\hat{u}_x + B_y\hat{u}_y + B_z\hat{u}_z$$

donde el plano $x - y$ es aquello donde yace el hilo, $\Delta x = x_Q - x_P, \Delta y = y_Q - y_P, B_x, B_y, B_z$ son constantes; desarrollando los productos vectoriales e integrando se encuentra la igualdad. Por lo tanto, la fuerza sobre un hilo que yace en un plano y está en un campo magnético uniforme no depende de la forma del hilo, sino que sólo de los puntos iniciales y finales, véase figura 7.12.

Si el cable que se encuentra en un plano forma un circuito cerrado, la fuerza es evidentemente nula, ya que $\vec{PQ} = 0$ (véase el ejemplo 7.2). Tanto este resultado como (7.21) son realmente válidos incluso si el cable no está en un plano, como demostraremos en el párrafo 7.5 por un método diferente. Aunque no sea posible construir un conductor aislado que lleve la corriente, ya que ésta siempre circula en un circuito cerrado, hay varias formas de construir un dispositivo en el que una parte del circuito sea móvil para poder mostrar el efecto de la fuerza (7.19), o en el que las fuerzas en varios tramos del circuito se compensen y sólo quede el efecto en un solo tramo, como vemos en el ejemplo 7.1.

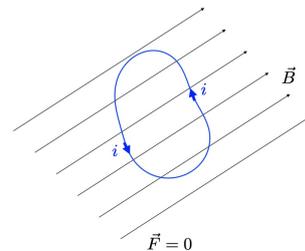


Figure 7.13: Conductor cerrado en un campo magnético.

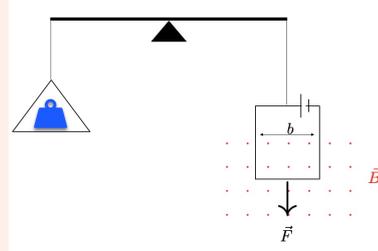
Ejercicio 7.1 Una bobina rígida $b = 5 \text{ cm}$ de ancho está suspendida de una balanza. La parte inferior está sumergida en un campo magnético uniforme B ortogonal al plano de la bobina. Si en la bobina circula una corriente de intensidad $i = 1 \text{ A}$ con el sentido adecuado, se observa que hay que colocar una masa $m = 0.5 \text{ g}$ en el plato para equilibrar la balanza. Calcular el valor del módulo de B .

Solución: El lado horizontal de la bobina inmersa en el campo magnético se ve afectado por la fuerza (7.20), $\vec{v}f = ib \times \vec{B}$, que en módulo vale ibB , ya que b y B son ortogonales. En los otros tramos de la bobina sometida al campo magnético la corriente tiene direcciones opuestas y las fuerzas dadas por la ecuación (7.20) son iguales y opuestas; también tienen la misma línea de acción, por lo que no producen ningún efecto.

Con las direcciones dadas en la figura, \vec{F} se dirige hacia abajo y se equilibra con la fuerza del peso mg . En conclusión

$$mg = ibB \quad \implies \quad B = \frac{mg}{ib} = 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

para la unidad de medida del campo magnético hemos usado el tesla (T). Con este método, o uno análogo en el que se sustituye la balanza por un dinamómetro, es posible determinar el valor de un campo magnético midiendo la fuerza que actúa sobre una sección de conductor por la que circula corriente. Como hemos dicho, basándonos en la ley de Laplace y, por tanto, en última instancia, en la fuerza de Lorentz, tenemos una definición operativa sencilla y práctica del campo magnético. Además del módulo, la dirección y el sentido de B se pueden encontrar orientando el instrumento (en la versión dinamométrica) y buscando la posición donde la fuerza es máxima.



Ejercicio 7.2 Una corriente de intensidad i circula en un circuito cerrado en forma de semicírculo de radio R . El circuito está contenido en el plano $x - y$ con la sección recta PQ paralela al eje x y está inmerso en un campo magnético uniforme \vec{B} paralelo al eje y . Calcular la fuerza magnética en la sección curva y en la sección recta.

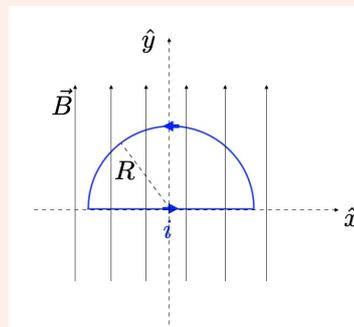
Solución: La fuerza en el tramo lineal $\vec{PQ} = 2R\hat{u}_x$, inmerso en el campo $\vec{B} = B\hat{u}_y$ es, según la ecuación (7.20)

$$\vec{F} = i\vec{PQ} \times \vec{B} = 2iRB\hat{u}_x \times \hat{u}_y = 2iRB\hat{u}_z$$

paralela y del mismo sentido al eje z .

En el tramo curvo, siguiendo el sentido de la corriente $d\vec{s} = -dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y$,

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= i d\vec{s} \times \vec{B} = -iBdx\hat{u}_x \times \hat{u}_y + iBdy\hat{u}_y \times \hat{u}_y = \\ &= -iBdx\hat{u}_z \end{aligned}$$



integrando en a lo largo de la semicircunferencia

$$\vec{F} = -iB\hat{u}_z \int_{-R}^R = -2iRB\hat{u}_z,$$

igual y opuesta a aquella del diámetro. Verificamos con este ejemplo que en un campo uniforme la fuerza no depende de la forma del conductor, siempre y cuando esté en un plano, y que la fuerza es nula en un circuito plano cerrado. ■

7.4 Principio de equivalencia de Ampère

Desde un punto de vista mecánico, la fuerza (7.18) tiene que considerarse como la resultante de un sistema de fuerzas aplicadas en puntos distintos; esta genera un desplazamiento de acuerdo con el teorema del movimiento del centro de masa. En general, además de tener la resultante dada por la ecuación (7.18), el sistema de fuerzas magnéticas presenta un torque resultante no nulo, por lo tanto, es posible tener rotaciones.

En este párrafo trataremos, por simplicidad, solamente circuitos planos rígidos donde pasa corriente eléctrica y en una región de campo magnético uniforme; en este caso, la fuerza resultante es nula y el circuito no se desplaza (y no se deforma), pero el torque resultante puede ser distinto que cero y poner en rotación al circuito.

Consideremos una espira rectangular, con lados a y b , donde pasa corriente i e identificamos con \hat{u}_n al versor de la normal a la espira y el sentido de la corriente es antihorario. La espira está en un campo magnético \vec{B} uniforme que forma un ángulo θ con \hat{u}_n . Como se puede deducir desde la figura 7.14, las fuerzas magnéticas \vec{F}_3 y \vec{F}_4 sobre los lados RS y PQ son iguales y opuestas y tienen la misma recta de acción: cada una es la resultante de un sistema de fuerzas paralelas, aplicadas en el centro del lado, y forman un par de brazo nulo y por lo tanto torque nulo. Las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 sobre los lados QR y SP , cada una de módulo iaB , ya que \vec{B} es ortogonal a los lados a , son también iguales y opuestas, pero constituyen un par de brazo $b \sin \theta$. El torque del par de fuerzas es:

$$M = b \sin \theta F = iabB \sin \theta = i\Sigma B \sin \theta$$

y es paralelo al plano de la espira.

Definimos *momento magnético de la espira* al vector

$$\vec{m} = i\Sigma\hat{u}_n,$$

paralelo y con el mismo sentido de \hat{u}_n y con módulo igual al producto de la intensidad de corriente por el área de la espira. El torque mecánico \vec{M} puede ser escrito como

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = i\Sigma\hat{u}_n \times \vec{B}. \quad (7.22)$$

La ecuación (7.22), obtenida para una espira rectangular, es válida para cualquier circuito plano. De hecho, cualquier circuito se puede siempre aproximar a n circuitos rectangulares infinitesimales donde pasa la misma corriente i . En los lados en común, las corrientes son iguales y opuestas, por lo tanto, los efectos del campo magnético se anulan y quedan solamente los efectos producidos en los bordes exteriores, coincidentes con el circuito. Llamando $d\vec{m} = i d\Sigma\hat{u}_n$ al momento magnético

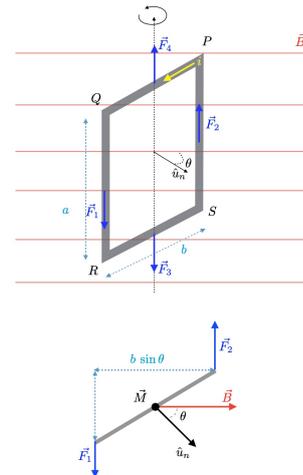


Figure 7.14: Espira en un campo magnético.

del circuito infinitesimal de área $d\Sigma$ sobre el cual actúa el torque mecánico $d\vec{M} = d\vec{m} \times \vec{B}$, se tiene el torque mecánico total, véase figura 7.15:

$$\vec{M} = \int_{\Sigma} d\vec{M} = i \left(\int_{\Sigma} d\Sigma \right) \hat{u}_n \times \vec{B} = i\Sigma \hat{u}_n \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

El torque dado por la ecuación (7.22) es nulo cuando \vec{m} es paralelo a \vec{B} : la posición de equilibrio estable se tiene cuando $\theta = 0$, aquella con $\theta = \pi$ corresponde al equilibrio inestable. Por cualquier otro valor de θ , \vec{M} hace girar la espira de tal manera que \vec{m} se haga paralelo y concorde a \vec{B} .

En particular, tomemos un eje de rotación paralelo a \vec{M} y llamemos I el momento de inercia de la espira con respecto a este eje; supongamos que desplazamos la espira desde su posición de equilibrio estable a un ángulo θ pequeño, para poder aproximar $\sin \theta \simeq \theta$. El teorema del momento angular proyectado en el eje de rotación da

$$M = -mB\theta = \frac{dL}{dt} = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

donde el signo menos indica que el torque llama siempre a la espira a su posición de equilibrio. Obtenemos así la ecuación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{mB}{I}}$$

y las pequeñas oscilaciones de la espira son armónicas con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mB}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{i\Sigma B}}. \quad (7.23)$$

El comportamiento oscilatorio de la espira donde pasa corriente y sumergida en un campo magnético calca exactamente al del dipolo eléctrico puesto en un campo eléctrico. Por otro lado, como se dijo anteriormente, también una aguja magnética tiene el mismo comportamiento; además, la ecuación (7.23) proporciona un método práctico para determinar el momento magnético de una aguja magnética midiendo simplemente el periodo de oscilación.

Esta identidad de comportamiento entre espira y aguja magnética ha sido generalizada por Ampère en forma de postulado,

Definición 7.4.1 principio de equivalencia de Ampère: una espira de área $d\Sigma$ donde pasa corriente i equivale, por los efectos magnéticos, a un dipolo elemental magnético

$$d\vec{m} = id\Sigma\hat{u}_n, \quad (7.24)$$

perpendicular al plano de la espira y orientado con respecto al sentido de la corriente según la regla de la mano derecha.

La ecuación (7.24) tiene que ser considerada como un instrumento de calculo muy útil porque permite aplicar a situaciones magnéticas conceptos ya desarrollados para los dipolos eléctricos; está claro que *no* se puede dar validez absoluta.

Análogamente a lo visto para el dipolo eléctrico, también para el dipolo magnético se define una *energía potencial*:

$$U_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta = -i\Sigma B \cos \theta, \quad (7.25)$$

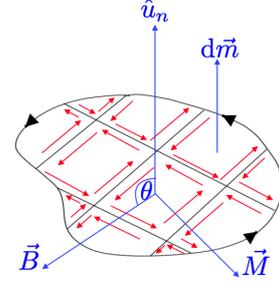


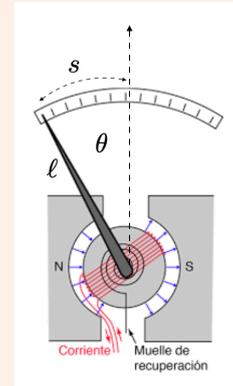
Figure 7.15: Torque total para un circuito genérico.

mínima en la posición de equilibrio estable ($\theta = 0$) y máxima en la posición de equilibrio inestable ($\theta = \pi$). Entre torque y energía potencial sigue válida la relación:

$$M = -\frac{dU_p}{d\theta} = -mB \sin \theta. \quad (7.26)$$

Ejercicio 7.3 El Galvanómetro es un instrumento universal por la medida de la corriente eléctrica, su esquematización está mostrada en figura. La corriente i que hay que medir pasa por una bobina formada por N espiras rectangulares de área Σ y soportadas a lo largo del eje por dos resortes. La bobina está sometida a la acción de un campo magnético \vec{B} producido por un imán que se expresa en un par de fuerzas aplicadas a los lados verticales. En el interior de la bobina se coloca un cilindro de hierro dulce C , y esta disposición, como veremos en el capítulo 9, garantiza que las líneas de campo de \vec{B} sean siempre perpendiculares a la superficie del cilindro y, por lo tanto, a los lados verticales de la bobina, independientemente de la posición que tome.

El momento magnético de la bobina $\vec{m} = Ni\Sigma\hat{u}_n$, forma un ángulo $\theta = \pi/2$ con el campo magnético \vec{B} que actúa en los lados verticales (es este campo el que interesa y no el del hierro). Como resultado, la bobina está sometida al momento mecánico dado por la ecuación 7.22, $M = Ni\Sigma B$ y empieza a girar. Los resortes por los que la bobina está unida al hilo de suspensión ejercen un torque elástico de módulo k que se opone a la rotación: k es una constante característica del sistema. Por lo tanto, existe una posición de equilibrio identificada por la condición



$$k\theta = Ni\Sigma B \implies \theta = \frac{Ni\Sigma B}{k} \quad (7.27)$$

El índice (solidal con la bobina) se utiliza para medir el ángulo de desviación θ desde la posición de reposo cuando no circula la corriente. Supongamos que la escala esté graduada de modo que $s = ns_0$, siendo $s = \theta\ell$ (el arco de circunferencia descrito por un ángulo θ con radio ℓ que corresponde a la longitud de la aguja). Imaginemos que la escala esté graduada de modo que $s = ns_0$; entonces $\theta = ns_0/\ell$ y la ecuación (7.27) será

$$i = \left(\frac{ks_0}{N\Sigma B\ell} \right) n = Sn. \quad (7.28)$$

Existe, por lo tanto, una relación de proporcionalidad directa entre la intensidad de la corriente i y el número de divisiones n en que se desplaza el índice de la escala graduada. La constante S depende de las características de construcción del instrumento y puede medirse haciendo pasar una corriente de intensidad conocida a través del mismo. A título indicativo, si la corriente de fondo de escala es $i_f = 50\mu\text{A}$ y la escala tiene $n = 100$ divisiones, $S = 50\mu\text{A}/100 = 0,2\mu\text{A}/\text{divisiones}$. Se puede reducir S , haciendo que el instrumento sea más sensible, por ejemplo eliminando los resortes y suspendiendo la bobina directamente por un alambre: si éste es lo suficientemente fino, la constante k suele ser menor que con los resortes. Si se invierte el sentido de la corriente, se invierte el sentido de rotación; por lo tanto, se puede construir un galvanómetro de centro cero que no sólo mide la corriente, sino que también indica su sentido.

7.5 Fuerza, torque y trabajo a través del flujo magnético

Los resultados encontrados pueden ser generalizados utilizando el concepto de flujo.

Consideremos un circuito cualquiera C , también no plano, donde pasa corriente i y una superficie cualquiera Σ que se apoya sobre C . Dividimos Σ en n circuitos rectangulares infinitesimales (figure 7.16), en los cuales circula la corriente i . La energía potencial del genérico circuito de área $d\Sigma$ es:

$$dU_p = -d\vec{m} \cdot \vec{B} = -i\vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = -id\Phi(\vec{B}), \quad (7.29)$$

donde hemos utilizado la definición de flujo del campo magnético. La energía potencial total es:

$$U_p = -i \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = -i\Phi(\vec{B}). \quad (7.30)$$

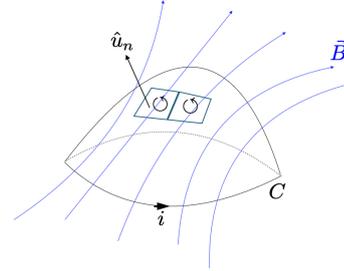


Figure 7.16: Superficie encima de un circuito C .

El campo magnético es solenoidal y, por lo tanto, fijando el contorno C , el flujo de \vec{B} no depende de la superficie Σ : o sea, la ecuación (7.30) está determinada por el circuito C y afirma que

Definición 7.5.1 la energía potencial de un circuito donde pasa corriente y sumergido en un campo magnético \vec{B} es igual al producto con signo cambiado de la corriente por el flujo de \vec{B} concatenado con el circuito.

Para un desplazamiento rígido, en general una rototranslación, o una deformación del circuito, el flujo de \vec{B} cambia y llamamos $d\Phi(\vec{B})$ a la variación infinitesimal (ahora es una variación infinitesimal y no un elemento de flujo infinitesimal); ya que el flujo cambió de Φ a $\Phi + d\Phi$, cambia también la energía potencial de U_p a $U_p + dU_p$, o sea, de la cantidad $dU_p = -i(d\Phi + \Phi - \Phi) = -id\Phi$ y por lo tanto se cumple trabajo:

$$dW = -dU_p = id\Phi(\vec{B}). \quad (7.31)$$

Para una variación finita desde una configuración inicial a una final el trabajo vale:

$$W = i\Delta\Phi = i \left[\Phi_2(\vec{B}) - \Phi_1(\vec{B}) \right]. \quad (7.32)$$

Si es positivo, se ha sido cumplido por las fuerzas del campo, si negativo, contra las fuerzas del campo.

Es esencial la condición que durante el desplazamiento la corriente sigue constante: si no fuera así, las fórmulas escritas ya no son válidas. La importancia de esta aclaración deriva de la existencia de fenómenos, que veremos en el capítulo 10, que provocan una variación de la corriente en un circuito cuando varía el flujo magnético concatenado con el propio circuito. Se entiende así que la condición requerida implica necesariamente una intervención para mantener la corriente constante y que la U_p no puede ser la única forma de energía en los fenómenos magnéticos (situación que recuerda a los procesos de potencial constante en electrostática). Examinemos ahora algunos casos concretos.

Casos particulares

Si el circuito cumple una translación rígida en el eje x , el trabajo para un desplazamiento infinitesimal dx es:

$$dW = F_x dx = i \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx$$

por lo tanto, la componente en el eje x de la fuerza es

$$F_x = i \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

De manera análoga, para las otras componentes tenemos:

$$\vec{F} = i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{u}_z \right) = i \nabla \Phi = -\nabla U_p : \quad (7.33)$$

la fuerza que actúa sobre el circuito es proporcional al gradiente de la energía potencial. Esta expresión es válida para cualquier circuito sumergido en un campo magnético cualquiera, también no uniforme; si un \vec{B} es uniforme, el flujo a través el circuito que cumple cualquier translación no varía con la posición, el gradiente del flujo es nulo y también la fuerza. Imaginemos que partimos el circuito en dos partes y llamamos \vec{F}_1 y \vec{F}_3 las fuerzas sobre las dos partes, tiene que ser $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 0$ o sea $\vec{F}_1 = -\vec{F}_3$; también si cambiamos la forma del tramo de P a Q , tiene que ser $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ o sea $\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$ y, concluyendo, $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$; la fuerza sobre un tramo de hilo depende solamente del punto inicial y del punto final y no de la forma del hilo, si el campo es uniforme.

Cuando el circuito cumple una rotación rígida infinitesimal

$$dW = -dU_p = M_\theta d\theta = i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta,$$

si M_θ es la componente del torque en el eje de rotación; tenemos

$$M_\theta = i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial U_p}{\partial \theta}.$$

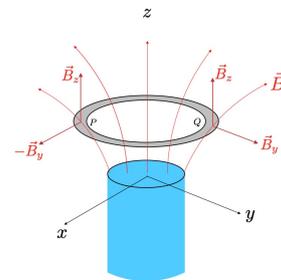
Finalmente, si el circuito es plano y de área pequeña Σ y si está puesto en un campo magnético no uniforme, tenemos

$$\vec{F} = i \nabla (\vec{B} \cdot \hat{u}_n \Sigma) = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B}), \quad (7.34)$$

$$M_\theta = i \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{B} \cdot \hat{u}_n \Sigma) = \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{m} \cdot \vec{B}); \quad (7.35)$$

\vec{m} es el momento magnético del circuito igual a $i \Sigma \hat{u}_n$, y se supone que \vec{B} , también si es no uniforme, tenga el mismo valor en todos los puntos de Σ .

Estas fórmulas, que también podrían derivarse desde la ecuación (7.25), también se aplican a una pequeña aguja magnética de momento \vec{m} ; nótese que la ecuación (7.34) es análoga a la ecuación (2.55) que es válida para un dipolo eléctrico en un campo \vec{E} no uniforme. Resumiendo los resultados sobre la fuerza experimentada por un circuito en un campo no uniforme, disponemos de dos fórmulas: ecuación (7.18), basada directamente en la segunda ley elemental de Laplace (7.17) que utiliza una integral extendida al circuito, y la ecuación (7.33) que, en cambio, utiliza el gradiente del flujo de \vec{B} a través de una superficie apoyada en el circuito. Este segundo procedimiento también proporciona explícitamente una expresión para el trabajo y el torque mecánico. Para comparar los dos procedimientos, apliquémoslos a una bobina circular de radio r , con centro en el eje z y situada en un plano ortogonal al eje z , por la que circula la corriente i . La bobina está sometida a la acción



de un campo magnético con simetría axial respecto al eje z , cuyas líneas de \vec{B} forman un ángulo θ con el eje z en los puntos en los que se sitúa la espira (véase la figura 7.40). Calculemos la fuerza que actúa sobre la espira utilizando primero (7.17). En el punto P tenemos

$$d\vec{s} = ds \hat{u}_x, \quad \vec{B} = -B \sin \theta \hat{u}_y + B \cos \theta \hat{u}_z,$$

por lo tanto la fuerza elemental es

$$d\vec{F}_P = i d\vec{s} \times \vec{B} = iB ds (-\sin \theta \hat{u}_z - \cos \theta \hat{u}_y).$$

En el elemento $d\vec{s}$ diametralmente opuesto, o sea en el punto Q , tenemos

$$d\vec{F}_Q = i(-d\vec{s}) \times (B \sin \theta \hat{u}_y + B \cos \theta \hat{u}_z) = iB ds (-\sin \theta \hat{u}_z + \cos \theta \hat{u}_y).$$

La fuerza resultante sobre los dos elementos es

$$d\vec{F} = -2iB \sin \theta ds \hat{u}_z.$$

Observamos que el resultado es independiente de la elección de los ejes x e y , como tiene que ser por la simetría del problema. La fuerza total se dirige a lo largo del eje z y se obtiene integrando a lo largo de medio bucle, ya que se han considerado pares de elementos:

$$\vec{F} = -2iB \sin \theta \int_0^{\pi r} d\hat{u}_z = -2\pi r i B \sin \theta \hat{u}_z.$$

La fuerza total es atractiva, por el sentido de la corriente (\hat{u}_n concorde a \vec{B}); si la corriente circulara en el sentido contrario, la fuerza sería repulsiva. Observamos que pur sienta la espira plana la fuerza no es nula porque el campo magnético no es uniforme; pero, dada la simetría de la configuración, es nulo el torque (la espira no gira).

El mismo resultado se obtiene empezando con la relación (7.30), escrita como

$$F = F_z = i \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

de hecho, por razones de simetría, la fuerza tiene que ser paralela al eje z . Supongamos ahora que la espira cumple una translación infinitesimal dz a lo largo del eje z y consideremos una superficie cerrada a forma de caja cilíndrica que tiene como bases las superficies Σ y Σ' de la espira antes y después del desplazamiento, respectivamente; la superficie lateral será la franja de altura dz y área $2\pi r dz$. Si orientamos las superficies hacia el exterior y llamamos Φ' el flujo que sale a través de Σ' , $-\Phi$ el flujo saliente de Φ y Φ_1 el flujo saliente pro la superficie lateral, tenemos entonces

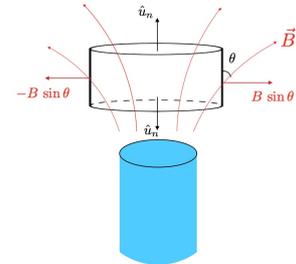
$$\Phi_{\text{tot}} = 0, \quad \Phi' - \Phi + \Phi_1 = 0.$$

La diferencia $\Phi' - \Phi$ representa la variación del flujo a través el circuito causada por el desplazamiento y por lo tanto, en términos infinitesimales

$$d\Phi = -\Phi_1 = -2\pi r dz B \sin \theta;$$

de hecho, la componente de \vec{B} ortogonal a la superficie lateral es $B \sin \theta$, igual sobre toda la superficie lateral por la simetría cilíndrica. En conclusión

$$F = i \frac{d\Phi}{dz} = -i \frac{d\Phi_1}{dz} = -2\pi r i B \sin \theta$$



y el signo menos indica que la fuerza es atractiva (discorde al eje z); hemos así encontrado la fórmula precedente.

Si la espira es pequeña así que $r \ll z$, donde z es la distancia más cercana al polo del imán (que genera \vec{B}), podemos $\sin \theta \simeq \theta \simeq r/z$ y la fuerza es

$$\vec{F} = -\frac{2\pi r^2 i B}{z} \hat{u}_z = -\frac{2B}{z} \vec{m},$$

donde $\vec{m} = \pi r^2 i \hat{u}_z$ es el momento magnético de la espira.

Unidades 7.5.1 Podemos expresar otra vez la unidades de medida del campo magnético:

$$\frac{\text{N}}{\text{C} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{N}}{\text{A m}} = \frac{\text{kg}}{\text{A s}^2},$$

esta unidad se llama *tesla* T. Submúltiplos muy usados, pero no estándar, son *gauss*, definido $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$. Ya hemos mencionado que el campo magnético terrestre en la superficie de la tierra es del orden de 10^{-5} T , es decir, 10^{-1} G . Los campos magnéticos constantes máximos que se pueden producir hoy en día es de 1200 T . El flujo del campo magnético se mide en T m^2 (campo por superficie) y esta unidad se denomina *weber* (Wb). Por lo tanto, El flujo del campo magnético se mide en T m^2 (campo por superficie) y esta unidad se llama *Weber* ([Wb]). Además, por la relación entre trabajo y flujo, tenemos

$$\text{Wb} = \frac{\text{J}}{\text{A}} = \frac{\text{J s}}{\text{C}} = \text{V s} \implies \text{T} = \frac{\text{V s}}{\text{m}^2}$$

y la unidad de medida de momento magnético ($\vec{m} = i \Sigma \hat{u}_n$) es

$$\text{A m}^2 = \frac{\text{J}}{\text{T}}. \quad (7.36)$$

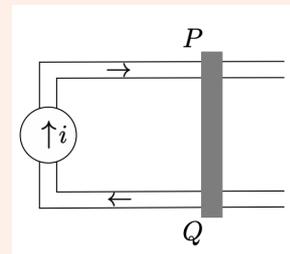
Ejercicio 7.4 Un generador capaz de mantener una corriente constante i (como en figura) alimenta un circuito formado por dos conductores rígidos lineales paralelos y por un hilo rígido PQ largo b que puede moverse sin fricción, quedando siempre ortogonal a los dos conductores. El circuito está en un campo magnético \vec{B} uniforme que entra en la hoja. Calcular la fuerza que actúa sobre el hilo PQ .

Solución: El hilo PQ siente la fuerza (7.20) que, según los sentidos dados por el problema, es paralela y con el mismo sentido de la x

$$\vec{F} = i \vec{PQ} \times \vec{B} = ibB \hat{u}_x.$$

Dicha fuerza es constante y el hilo se mueve de moto uniformemente acelerado.

El mismo resultado se obtiene utilizando la ecuación (7.31): por un desplazamiento dx el flujo a través el circuito $\Phi = \Sigma B = bx, B$, varía de $d\Phi = bB dx$, se cumple trabajo $dW = ibB dx$ y la fuerza será $F = ibB$. El flujo es positivo, porque la normal al circuito orientada según la regla de la mano derecha es concorde a \vec{B} , y aumenta en el desplazamiento, por lo tanto $d\Phi$ y dW son positivos y la fuerza es concordante con el eje x . Si la corriente hubiese tenido el sentido opuesto entonces \hat{u}_n y \vec{B} habrían sido discordantes, el flujo habría sido negativo $\Phi = bBx$, y disminuiría debido al desplazamiento, consecutivamente $d\Phi$ y dW habría sido negativos y la fuerza hacia la dirección opuesta al eje x .



Es importante prestar atención a los signos si, además del módulo, se desea conocer la dirección de la fuerza; desde este punto de vista el resultado obtenido de (7.31) es más inmediato. Observamos que la fuerza se puede escribir como $F = id\Phi/dx$, de acuerdo a la ecuación (7.33). De hecho, el fenómeno resulta de una traslación, aunque sólo sea de una parte del circuito, que implica una variación de flujo, por lo que estamos en el ámbito de validez de la (7.33). Concluimos que el circuito se deforma bajo la acción de la fuerza magnética y que el cable se desplaza hacia la derecha si \hat{u}_n y \vec{B} son concordantes (ambos salientes o entrantes), mientras que se desplaza hacia la izquierda si \hat{u}_n y \vec{B} son discordantes. Obsérvese un hecho importante: el desplazamiento bajo acción de la fuerza magnética es siempre en la dirección que aumenta el flujo a través del circuito. De hecho, el desplazamiento hacia la derecha aumenta el área y por tanto el flujo, que es positivo porque \hat{u}_n y \vec{B} son concordantes; pero también en el desplazamiento hacia la izquierda el flujo, que es negativo porque \hat{u}_n y \vec{B} son discordantes, aumenta porque desde un valor negativo tiende a cero.

Propiedades de los dipolos		
	Eléctrico	magnético
momento de dipolo	$\vec{p} = q\vec{a}$	$\vec{m} = i\Sigma\hat{u}_n$
torque	$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$	$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$
periodo pequeñas oscilaciones	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{pE}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mB}}$
fuerza en un campo no uniforme paralelo al momento de dipolo	$F_x = p\frac{\partial E}{\partial x}$	$F_x = m\frac{\partial B}{\partial x}$

Table 7.1: Comparación entre las propiedades de los dipolos.

7.6 Efecto Hall

En un conductor de sección $\Sigma = ab$ pasa corriente i con sentido en el eje x . La densidad de corriente es

$$\vec{j} = \frac{i}{ab}\hat{u}_x = ne\vec{v}_d$$

y como hemos dicho, toma el mismo valor independientemente del signo de los portadores de carga.

Si el conductor está puesto en un campo magnético uniforme \vec{B} , que asumimos perpendicular a \vec{j} y concorde al eje y , sobre cada portador de carga actúa la fuerza de Lorentz es:

$$\vec{F} = e\vec{v}_d \times \vec{B}.$$

La estructura de la formula muestra que sobre la carga e actúa una fuerza no electrostática y, por lo tanto, definimos de acuerdo a la definición de campo electromotor

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{F}}{e} = \vec{v}_d \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{ne} \times \vec{B}. \quad (7.37)$$

Esto es un aspecto muy importante de la fuerza magnética sobre una carga en movimiento, la cual permite en cada caso definir un campo eléctrico de origen magnético, o sea, un campo electromotor dado por:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (7.38)$$

Como veremos, este campo no es conservativo.

En el caso en examen \vec{E}_H tiene la dirección sobre el eje z , o sea, aquella de lado b del conductor; el sentido depende del signo de la carga: si $e > 0$, \vec{E}_H es concorde al eje z , mientras que es opuesto al eje z si $e < 0$. \vec{E}_H es conocido como *campo de Hall*, desde el nombre del físico que en el año 1879 lo puso en evidencia; provoca una deflexión en el movimiento de las cargas, añadiendo una componente transversa a la velocidad de deriva, y consecutivamente, lleva a una acumulación de cargas de signos opuestos sobre las caras ortogonales a \vec{E}_H , o sea, en el eje z . Se llega a un equilibrio porque esta acumulación origina un campo electrostático \vec{E}_{el} que se opone a una acumulación; la condición es:

$$\vec{E}_H + \vec{E}_{el} = 0.$$

En equilibrio el dispositivo se porta como un generador en el cual no circula corriente; la tensión del campo \vec{E}_H es:

$$\mathcal{E} = \int_P^Q \vec{E}_H \cdot d\vec{z} = \vec{E}_H \cdot \vec{PQ} = \pm E_H b,$$

con signo positivo si $e > 0$, negativo si $e < 0$. En módulo:

$$\mathcal{E} = E_H b = \frac{jBb}{ne} = \frac{iB}{nea} = \frac{Bb}{nep} \frac{V_A - V_B}{d}; \quad (7.39)$$

El fenómeno descrito se llama *efecto Hall transversal*, y tiene aplicaciones interesantes. Primero, desde el signo de \mathcal{E}_H se puede determinar el signo de los portadores de carga; además, conocidos los módulos de \mathcal{E}_H y B se puede obtener la densidad de carga ne .

Para la mayoría de los metales, los portadores de carga son negativos, de acuerdo con la suposición de que son electrones, y la densidad de carga medida está en buena concordancia con el número de electrones de valencia por unidad de volumen. Sin embargo, hay algunos metales bivalentes, entre ellos el zinc y materiales como los semiconductores, en los que el signo de \mathcal{E}_H corresponde a portadores positivos. La explicación de esta aparente anomalía se atribuye a una modalidad particular de movimiento de la deriva de los electrones en estos materiales: en esencia, los electrones van a llenar posiciones vacías, llamadas *huecos*, creando a su vez huecos en las posiciones que dejan; el paso de los electrones de una zona neutra A a una zona B con huecos, hace que la zona B sea neutra y la zona A positiva y, por lo tanto, aparece como un movimiento de cargas positivas en sentido contrario al movimiento de los electrones. Sólo con la mecánica cuántica se puede dar una explicación completa de estos efectos.

Finalmente, la ecuación (7.39) no sólo proporciona una relación de proporcionalidad entre la tensión \mathcal{E}_H y el módulo B del campo magnético, sino que se puede utilizar para construir medidores de campo magnético, llamados *sondas Hall*; la constante de proporcionalidad:

$$\alpha = \frac{\mathcal{E}_H}{B} = \frac{i}{nea} = \frac{b(V_A - V_B)}{nepd}$$

puede determinarse experimentalmente introduciendo la sonda en un campo magnético de valor conocido y midiendo el valor de la tensión Hall.

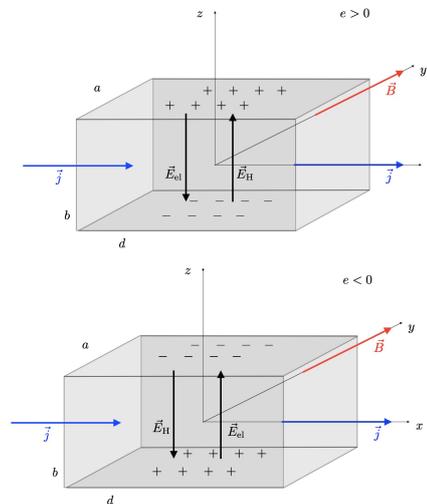


Figure 7.17: Efecto Hall por cargas distintas.

Ejercicio 7.5 Una cinta de cobre, de longitud $d = 2\text{ cm}$ y con lados $a = 0.1\text{ cm}$, $b = 1.5\text{ cm}$, es atravesada por una corriente $i = 5\text{ A}$ y está inmersa en un campo magnético uniforme de módulo $B = 1.5\text{ T}$, ortogonal a la cinta. Calcular el valor de la tensión Hall y la corriente que fluye si se conecta una resistencia con $R = 10^{-4}\ \Omega$ entre los puntos P y Q de la figura.

Solución: En el cobre, el número de electrones por unidad de volumen es $n = 8.49 \cdot 10^{28}$ electrones/ m^3 . A partir de (7.39) calculamos la tensión Hall:

$$\mathcal{E}_H = \frac{iB}{nea} = \frac{5 \cdot 1.5}{8.49 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}} = 5.52 \cdot 10^{-7}\text{ V}.$$

La constante $\alpha = 3.68 \cdot 10^{-7}\text{ V/T}$. Cuando se conecta una resistencia externa R entre los puntos P y Q , se forma un circuito en el que la banda de cobre atravesada por la corriente e inmersa en un campo magnético actúa como generador. Utilizando la simbología del apartado 6.7, el campo eléctrico E a lo largo del circuito es $\vec{E} = \vec{E}_H + \vec{E}_{el}$, en el interior de la cinta, $\vec{E} = \vec{E}_{el}$ en el interior de la resistencia externa.

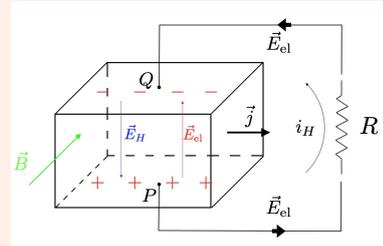
El generador E_H en módulo es mayor que E_{el} porque el circuito ya no está abierto y las cargas acumuladas pueden moverse a lo largo de la resistencia externa; al equilibrio estático con corriente nula ha sido sustituido por el equilibrio dinámico con corriente constante. La fuerza electromotriz es

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} + \int_P^Q \vec{E}_H \cdot d\vec{z} = \mathcal{E}_H,$$

claramente coincidente con la tensión de Hall (y se nota que \vec{E}_H no es conservativo. La corriente que circula es $i_H = \mathcal{E}_H / (r + R)$, donde r es la resistencia de la cinta de cobre a lo largo del eje z y se calcula con la ecuación (6.19) y usando lo datos en la tabla 6.1

$$r = \rho \frac{b}{ad} = 1.28 \cdot 10^{-5}\ \Omega.$$

Por lo tanto $i_H = 4.9 \cdot 10^{-3}\text{ A}$, fácilmente medible con un miliamperómetro. La d.d.p. de R , o sea entre los puntos P y Q es $\Delta V = \mathcal{E} - r i_H = R i_H = 4.9 \cdot 10^{-7}\text{ V}$. Con este método se puede calcular \mathcal{E}_H y, por lo tanto, \vec{B} midiendo i_H (conociendo r y R); la sensibilidad de la sonda sería $i_H/B = 3.27\text{ mA/T}$. ■



7.7 Ejemplos de movimiento de cargas en un campo magnético uniforme

Examinemos ahora algunos dispositivos que a partir del análisis del movimiento de las partículas cargadas en un campo magnético permiten deducir ciertas propiedades de las propias partículas y también un tipo particular de acelerador de partículas. La ley del movimiento en un campo magnético se basa en la fuerza de Lorentz o, en el caso de la presencia simultánea de un campo eléctrico, en la

$$F = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.40)$$

expresión completa de la fuerza que actúa sobre una partícula cargada, que se sigue denominando fuerza de Lorentz. Se da por supuesto que el movimiento de las partículas consideradas, general-

mente iones o electrones, tiene lugar en el interior de recipientes en los que se ha creado un vacío para evitar la acción perturbadora de las colisiones con las moléculas de aire: éstas harían que el movimiento se produjera con características muy diferentes a las predecibles a partir de 7.40.

Espectrómetro de masa

El espectrómetro de masas es un instrumento que separa los iones que tienen la misma carga y diferente masa o, más generalmente, que tienen diferentes relaciones carga-masa. Un ejemplo típico es el de los isótopos, átomos de un mismo elemento que tienen núcleos con el mismo número Z de protones, pero un número diferente N de neutrones, por lo que el número de masa $A = Z + N$ es diferente.

Se sitúan en el mismo lugar de la tabla periódica (de ahí el nombre de isótopos) y tienen propiedades químicas idénticas, pero al tener una composición nuclear diferente tienen propiedades físicas distintas. El primer espectrómetro de masa fue ideado por Thomson en el 1912: en esencia, al aparato con el que había medido la relación e/m de los electrones en 1897 (véase el ejemplo 2.2) le añadió un campo magnético paralelo al campo eléctrico y utilizó como fuente un gas enrarecido en el que los iones positivos son producidos por descargas eléctricas y acelerados por una d.d.p. del orden de 10^4 V, que les da una velocidad v . Refiriéndose a la figura 7.18 donde los campos son discordantes, la fuerza eléctrica $q\vec{E}$ provoca una desviación en el plano $y-z$ y la fuerza magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$ una desviación en el plano $x-z$. Suponiendo que los iones entran en el dispositivo en $z = 0$ moviéndose a lo largo del eje z , para $z = L$ tenemos

$$y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \frac{L^2}{v}, \quad x = \frac{qBL^2}{2mv}.$$

La expresión de y es la de un movimiento uniformemente acelerado, ya visto en el ejemplo 2.2 y a partir del cual se determinó la relación q/m para los electrones. En realidad, la expresión de x es aproximada bajo el supuesto de que el radio de curvatura r dado por (7. 7) sea mucho mayor que L ; entonces, el arco de círculo puede confundirse con un arco de parábola, como si el movimiento fuera uniformemente acelerado, y resulta

$$x = \frac{1}{2} \frac{qvB}{m} \frac{L^2}{v^2}.$$

Valores numéricos típicos pueden ser $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 20 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, $v = \sqrt{2qV/m} = 3.1 \cdot 10^5$ m/s, $B = 0.1$ T, $r = 0.65$ m, $L \sim 0.1$ m, $E = 10^4$ V/m.

La trayectoria, o sea el punto de salida de los iones, es una parábola

$$y = \frac{2E}{L^2 B^2} \frac{m}{q} x^2;$$

De este modo, Thomson descubrió que los iones de neón caían en dos parábolas diferentes, una correspondiendo a $A = 20$, el otro a $A = 22$; además a partir de la intensidad de las trazas de las dos parábolas, registradas con una placa fotográfica impresionada por debido a la energía de los iones, dedujo que el isótopo con masa 20 era unas 9 veces más frecuente que el de masa 22: y efectivamente la media ponderada con los factores 9 y 1 da el valor conocido de 20.2 de A para el

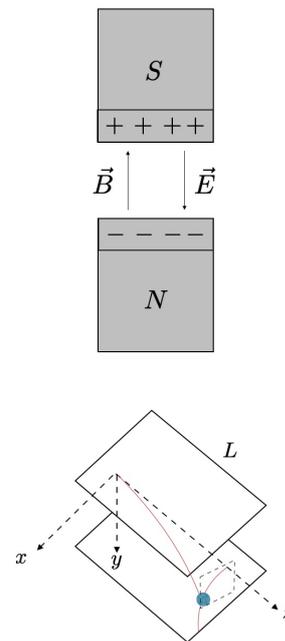


Figure 7.18: Esquema del espectrómetro de masas.

neón. Así podemos entender el origen de los valores de A que son muy diferentes de un número entero: son causados precisamente por el hecho de que un elemento se presenta como una mezcla de isótopos; cada isótopo, en cambio, tiene un número de masa A muy cercano a un número entero.

El descubrimiento de Thomson estimuló el crecimiento de este campo de investigación y se construyeron varios tipos de espectrómetros más precisos, es decir, en los que, para los mismos isótopos, la separación de los isótopos era más nítida que en el espectrómetro de Thomson. Una contribución importante fue la de Aston, que hacia el 1920 desarrolló un espectrómetro en el que la zona de desviación eléctrica era distinta de la zona de desviación magnética y que permitía medir la masa con una precisión de al menos una parte en 10^4 . Aston descubrió un gran número de isótopos y midió su porcentajes relativos (denominados abundancias).

Un espectrómetro especialmente adecuado para la medición de abundancias es el espectrómetro exclusivamente magnético diseñado hacia 1920 por Dempster. Los iones producidos en la fuente S pasan a través de un par de estrechas rendijas F_1 y F_2 que definen su trayectoria y entre los cuales se aplica una d.d.p. V del orden de 10^3 V (figura 7.19)

A la salida de F_2 , todos los iones, independientemente de sus masas si tienen la misma carga y considerando despreciables la velocidad inicial, poseen una energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = qV \quad (7.41) \quad \text{Figure 7.19: Espectrómetro de Dempster.}$$

Así obtenemos un haz delgado y colimado de iones isoenergéticos que, después de F_2 , entra en una región en la que sólo actúa un campo magnético uniforme B , ortogonal a la hoja y que entra en la hoja. Como visto en el párrafo 7.2.1 los iones describen una trayectoria circular de radio $r = m v / (qB)$. Dada la misma energía cinética y la misma carga, a diferentes masas corresponden diferentes velocidades y, por lo tanto, diferentes radios. Hallando v en función de r sustituyendo en la ecuación 7.41 obtenemos

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2V}, r = \sqrt{\frac{2V m}{B^2 q}}. \quad (7.42)$$

La razón m/q resulta determinada, para los varios tipos de iones, de la medida de r .

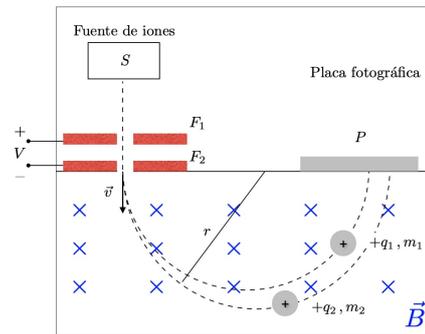
Supongamos ahora que el revelador sea una placa fotográfica y que el haz de iones esté formado por dos isótopos de mas atómica A_1 y A_2 ; desde la ecuación (7.42) obtenemos

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2,$$

la cual no depende de V y B .

El ciclotrón

La aceleración de las partículas cargadas por los campos electrostáticos está limitada por la d.d.p. máxima alcanzable, que es del orden de 10^7 V (principalmente debido a un efecto llamado *efecto corona*).



Un método alternativo, realizado en 1934 por Lawrence y Livingstone, consiste en la aplicación repetida de una d.d.p. variable. La máquina se llama ciclotrón y funciona según el siguiente esquema (figura 7.20). Se aplica una d.d.p. alterna $V = V_0 \sin(\omega_{RF}t)$, llamada radiofrecuencia, entre dos cavidades metálicas semicilíndricas, llamadas D por su forma d mayúscula; las cavidades están inmersas en un campo magnético uniforme ortogonal a ellas.

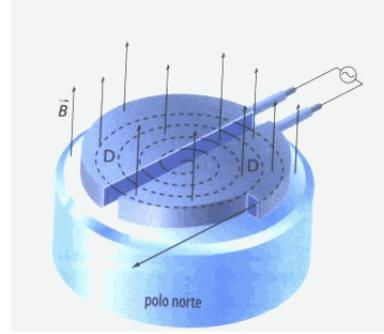


Figure 7.20: Ciclotrón.

Un ion de masa m y carga q se inyecta en el sistema desde la fuente S en el centro y suponemos que es acelerado por la d.d.p. V existente en ese instante entre las dos D . Entra en D , dentro de la cual el campo eléctrico es esencialmente nulo, y está desviado por la fuerza de Lorentz haciendo un semicírculo de radio $r_1 = mv_1/(qB)$ donde v_1 es la velocidad adquirida, que se determina por $1/2mv^2 = qV$; después de un tiempo

$$t_1 = \frac{1}{2} \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{\pi m}{qB}$$

el ion sale de D_1 y está por entrar en D_2 . Si en el mismo tiempo la radiofrecuencia ha cambiado de signo, el ion experimenta una segunda aceleración entre D_1 y D_2 y se tiene

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV = 2qV.$$

En D_2 el ion cumple un semicírculo de radio $r_2 = mv_2/(qB) > r_1$ en el tiempo

$$t_2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi r_2}{v_2} = \frac{\pi m}{qB} = t_1$$

y se nota que el tiempo para cumplir una órbita circular no depende de la velocidad de la partícula. Si en el tiempo t_2 la radiofrecuencia ha cambiado otra vez de signo, el proceso de aceleración se repite entre D_2 y D_1 y así sucesivamente.

La condición de funcionamiento es que el tiempo t que se tarda en recorrer medio giro sea igual al semiperíodo de la radiofrecuencia

$$T_{RF} = \frac{2\pi}{\omega_{RF}} = 2t = \frac{2\pi m}{qB} \implies \omega_{RF} = \frac{qB}{m} = \omega : \quad (7.43)$$

la pulsación ω_{RF} de la radiofrecuencia de ciclotrón tiene que ser igual a la velocidad angular de los iones.

El proceso continua hasta que el ion llega al radio máximo R , determinado por las dimensiones del magnete del ciclotrón. A tal radio corresponde una velocidad máxima y energía cinética del ion

$$v_{\max} = \frac{qBR}{m}, \quad E_{c,\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}. \quad (7.44)$$

Porque a cada giro el ion adquiere una energía cinética $2qV$, el número de giros para llegar a la energía cinética máximas es

$$N = \frac{E_{c,\max}}{2qV} = \frac{qB^2R^2}{4mV}$$

al cual corresponde el tiempo

$$t_N = \frac{2\pi m}{qB} N = \frac{\pi R^2 B}{2, V}.$$

En este momento, mediante un mecanismo adecuado, el haz de iones acelerado se desvía fuera del ciclotrón y se guía hacia la zona de utilización, pudiendo comenzar un nuevo ciclo de aceleración; se dice que el ciclotrón es una máquina de funcionamiento pulsado, es decir, no continuo. Este método también tiene una limitación fundamental. A medida que la velocidad de las partículas aumenta, hay que utilizar fórmulas relativistas; la pulsación resulta $\omega = qB/(m\gamma)$: para velocidades pequeñas (7.43) es correcta ya que $\gamma \simeq 1$, pero cuando $v \geq 0.1c$ (siendo c la velocidad de la luz) el efecto de γ no puede despreciarse. Refiriéndonos, como se hace comúnmente, a la frecuencia de la revolución, escribimos

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m\gamma} = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

siendo $\nu_0 = \omega_{RF}/2\pi$ la radiofrecuencia del ciclotrón. A medida que v aumenta, la frecuencia ν disminuye (el periodo de revolución aumenta) y se pierde el sincronismo con la radiofrecuencia que tiene la frecuencia fija $\nu_{RF} = \nu_0$. El ion ya no se ve afectado por la misma d.d.p. de aceleración y el ion llega en el hueco entre las D en instantes distintos y viene decelerado. Esta dificultad se superó parcialmente haciendo disminuir la ν_{RF} , pero el límite viene puesto por las dimensiones del imán, porque al crecer de la energía hay que aumentar R .

8. Ley de Ampère

8.1 Campo magnético producido por una corriente

En el capítulo anterior hemos puesto en evidencia algunas propiedades de la interacción magnética, subrayando que ésta se manifiesta entre cargas en movimiento, y hemos analizado la fuerza sobre un circuito donde pasa corriente utilizando la fuerza de Lorentz.

En este capítulo veremos el enlace explícito entre el campo magnético y las corrientes que lo generan.

El análisis de los primeros experimentos sobre las características del campo magnético producido por corrientes en conductores indujo a Laplace a formular una ley, conocida como la *primera ley de Laplace*, la cual expresa el campo magnético producido por un tramo infinitesimal ds donde pasa corriente, en un punto P distante r desde el elemento de hilo:

$$d\vec{B} = \kappa_m i \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} = \kappa_m \frac{ids}{r^2} \hat{u}_t \times \hat{u}_r;$$

\hat{u}_r es el versor de la dirección orientada desde $d\vec{s}$ hacia P ,
 \hat{u}_t el versor tangente al hilo, por lo tanto, $d\vec{s} = ds \hat{u}_t$, κ_m

es una constante que depende del sistema de unidades y del medio. Suponiendo que se opera en el vacío, como haremos en todo el capítulo, en el sistema internacional tenemos:

$$\kappa_m = 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} = 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}},$$

donde la unidad H/m (henry partido por metro) se justificará en las secciones siguientes. En la realidad

$$\kappa_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \implies \mu_0 = 4\pi \kappa_m = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \simeq 1.36 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad (8.1)$$

y μ_0 se llama *permeabilidad magnética del vacío*.

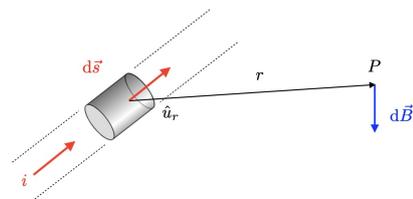


Figure 8.1: Campo magnético producido por corriente eléctrica.

La primera ley de Laplace se escribe como:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ids}{r^2} \hat{u}_t \times \hat{u}_r. \quad (8.2)$$

El campo magnético elemental de un tramo infinitesimal de circuito es proporcional a la corriente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; la orientación de \vec{B} depende del sentido de la corriente (o sea a \hat{u}_t). Las líneas de fuerza del campo magnético siguen la regla de la mano derecha donde el pulgar indica la dirección de la corriente; o sea, si el pulgar está por arriba, entonces las líneas de fuerza circulan en sentido antihorario (según las puntas de los dedos, véase figura 8.2).

La formula (8.2) tiene validez general, pero solamente como herramienta matemática de calculo; esto porque no es posible medir la contribución de un elemento infinitesimal de hilo, el cual además no puede existir solo.

Lo que tiene significado físico, y se puede medir, es la superposición de las contribuciones de la ecuación (8.2), o sea, su integral y se llama *ley de Ampère-Laplace*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} \quad (8.3)$$

la cual entrega en cada punto del espacio el campo magnético debido a un circuito cerrado de forma cualquiera, donde pasa corriente i . La ecuación (8.3), que es verificada experimentalmente por cualquier circuito, da la conexión entre el campo magnético y la corriente que lo genera.

En general, si el conductor no es un hilo, se considera un elemento largo ds , de sección $d\Sigma$ donde pasa una corriente de densidad \vec{j} ; el elemento de corriente se escribirá:

$$di d\vec{s} = \vec{j} d\Sigma d\vec{s} = \vec{j} d\tau,$$

donde \vec{j} es paralelo a $d\vec{s}$. La ecuación (8.2) se escribe como:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \times \hat{u}_r}{r^2} d\tau \quad (8.4)$$

e integrando en todo el volumen τ donde $\vec{j} \neq 0$, tenemos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{j} \times \hat{u}_r}{r^2} d\tau. \quad (8.5)$$

Si conocemos la distribución de las corrientes, entonces es posible calcular el campo magnético en todo el espacio. En el caso de varios circuitos el campo magnético se calcula como superposición de las contribuciones (8.3) ó (8.5).

Campo magnético producido por una carga en movimiento

La densidad de corriente es proporcional al número de cargas por unidad de volumen, $\vec{j} = nq\vec{v}$; substituyendo en la ecuación (8.4) tenemos:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{u}_r}{r^2} n d\tau \quad (8.6)$$

donde $n d\tau$ es el número de cargas contenidas en el volumen $d\tau$ que en movimiento producen el campo $d\vec{B}$.

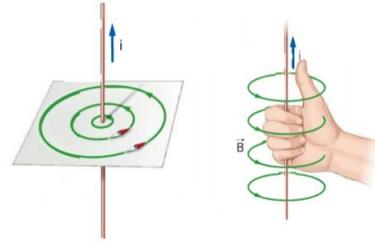


Figure 8.2: Regla de la mano derecha por el campo magnético generado por un hilo donde pasa corriente.

Entonces, el campo magnético producido por una sola carga en movimiento es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \hat{u}_r}{r^2} \quad (8.7)$$

válida en el sistema de referencia donde $\vec{v} \neq 0$. El campo eléctrico debido a la carga, en el mismo punto P donde queremos calcular el campo magnético, es

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r,$$

admitiendo que la formula sea correcta también si la carga se mueve. Sigue que

$$\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (8.8)$$

estableciendo una relación entre campo eléctrico y magnético producidos por una carga en movimiento. En la ecuación (8.8) hemos puesto:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \implies c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (8.9)$$

siendo $c = 3 \cdot 10^8$ m/s la velocidad de la luz en el vacío. Obviamente los cálculos son correctos si la velocidad $v \ll c$; también el campo eléctrico tiene las mismas limitaciones.

El interés fundamental de la ecuación (8.7) es que pone en evidencia como el campo magnético depende del movimiento de las cargas, independientemente de las causas que producen el movimiento.. Por lo tanto hay que esperar que no sólo una corriente en un conductor genere un campo magnético, sino que también un movimiento de cargas genérico genere un campo magnético.

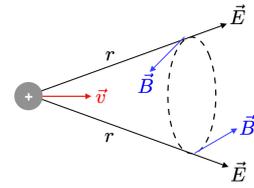


Figure 8.3: Campo magnético producido por una carga.

8.2 Campos magnéticos producidos por circuitos particulares

Apliquemos ahora la ley elemental de Laplace (8.2) a algunas configuraciones donde la corriente fluye en un conductor lineal de forma simple. En la práctica, la integral que aparece en la ecuación (8.3) se extiende a una línea tal que el cálculo se reduzca a una integral unidimensional. Veremos en el párrafo 8.4 un método alternativo mucho más simple aplicable sólo si existen simetrías particulares.

8.2.1 Hilo rectilíneo indefinido. Ley de Biot-Savart

Consideramos un hilo conductor rectilíneo, de longitud $2a$, donde pasa corriente continua i , y nos ponemos en el eje mediano del hilo en el punto P , distante R del hilo.

Un elemento de hilo produce en el punto P un campo magnético

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} \implies dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin \theta}{r^2}.$$

Observamos la siguientes relaciones trigonométricas:

$$R = r \sin(\pi - \theta) = r \sin \theta \implies \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R^2},$$

$$R = s \tan(\pi - \theta) = -s \tan \theta \implies ds = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta},$$

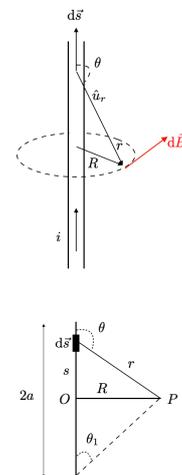


Figure 8.4: Campo magnético producido por hilo.

y el módulo del campo magnético es

$$dB = \frac{\mu_0 i \sin \theta d\theta}{4\pi R}.$$

la anterior se integra desde el valor mínimo del ángulo $\theta = \pi/2$ hasta su valor máximo que dependerá de las dimensiones del hilo. El hilo de longitud a (medio hilo) produce un campo en módulo

$$B_a = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\pi/2}^{\theta_{\max}} \sin \theta d(\theta) = -\frac{\mu_0 i \cos \theta_{\max}}{4\pi R}$$

y el campo total es, expresando $\cos \theta_{\max} = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos \theta_1 = -a/\sqrt{a^2 + R^2}$, véase figura 8.4:

$$B_a = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}.$$

En el plano mediano, el campo magnético es constante en cada circunferencia de radio R y tangente en esta circunferencia. Llamando \hat{u}_ϕ el versor tangente a la circunferencia y orientado con respecto al sentido de la corriente según la regla de la mano derecha, podemos escribir

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \hat{u}_\phi. \quad (8.10)$$

Si $a \rightarrow \infty$ (o sea, $\theta \rightarrow \pi$), entonces la ecuación (8.10) se transforma en:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{u}_\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{u}_t \times \hat{u}_n, \quad (8.11)$$

siendo \hat{u}_t el versor paralelo al hilo y concorde a la corriente y \hat{u}_n el versor normal al hilo hacia P .

La ecuación (8.11), conocida como *ley de Biot-Savart*, afirma que el campo magnético producido por un hilo indefinido depende sólo de la distancia desde el hilo, en manera inversamente proporcional; sus líneas de fuerzas son circunferencias concéntricas al hilo.

La estructura de las líneas B se revela fácilmente con limaduras de hierro colocadas en un plano ortogonal al cable. Mientras que en ausencia de corriente no se aprecia ninguna disposición ordenada, cuando una corriente continua atraviesa el hilo la limadura se adensan a lo largo de circunferencias con centro en el hilo. El experimento también puede realizarse con agujas magnéticas colocadas a igual distancia R del hilo, que se orientan tangencialmente a una circunferencia de radio R (si se pueden despreciar los efectos del campo magnético terrestre con respecto al campo del hilo); invirtiendo el sentido de la corriente en el hilo, las agujas giran 180° .

El cable indefinido es un sistema ideal; en la realidad, se puede tener un circuito con una sección recta bastante larga y la ecuación (8.11) se verifica si uno se coloca a una distancia del cable mucho menor que la longitud. Es interesante relacionar el resultado (8.11) con el resultado visto en el ejercicio 1.2, relativo al campo eléctrico producido por un hilo recto indefinido cargado con densidad uniforme λ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{u}_t \times \hat{u}_n, \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi R} \hat{u}_n.$$

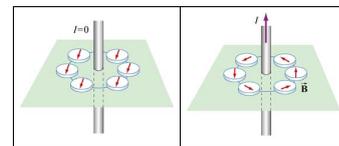


Figure 8.5: Deflexión de agujas magnéticas cerca de un hilo donde pasa corriente eléctrica.

El campo \vec{E} se obtuvo como superposición de las contribuciones ortogonales al hilo a los elementos de hilo con carga $dq = \lambda ds$ (las contribuciones paralelas se eliden):

$$dE = \frac{\lambda ds}{4\pi r^2} \sin \theta.$$

Se puede suponer que también el campo magnético, cuyo módulo tiene la misma estructura de aquello del campo eléctrico, se puede obtener sumando las contribuciones elementales: sustituimos $1/(4\pi\epsilon_0)$ con $\mu_0/(4\pi)$, λ con i y obtenemos

$$dB = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2} \sin \theta.$$

De estas observaciones nació la primera ley de Laplace, que posteriormente se demostró que era válida en cualquier circunstancia.

Ejercicio 8.1 Calcular el campo magnético producido por una espira cuadrada de lado $2a$ en los puntos del eje de la espira.

Solución: Cada lado de la espira produce en el eje x (normal a la espira) el campo magnético \vec{B} , dado por la ecuación (8.10), de módulo

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}},$$

cuya componente en el eje x es

$$B_{1,x} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \cos \alpha,$$

El campo total es la suma de los campos creados por los cuatro lados

$$\vec{B} = 4\vec{B}_{1,x} = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)\sqrt{R^2 + a^2}} \hat{u}_x,$$

donde hemos substituido $x^2 + a^2$ a R^2 ; este es paralelo al eje x en cuanto, en los punto del eje, las cuatro componentes ortogonales se eliden. En el centro de la espira $x = 0$, el campo magnético es máximo y vale

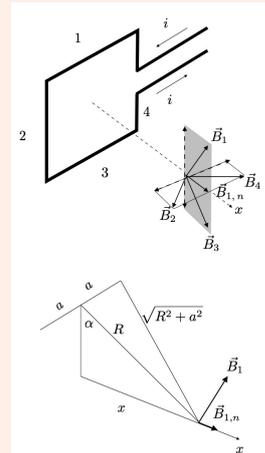
$$\vec{B}_{\max} = \frac{\mu_0 \sqrt{2} i}{\pi a} \hat{u}_x,$$

mientras que para $x \rightarrow \pm\infty$ el campo tiende a cero. En vez, a distancias $x \gg a$ tenemos

$$\vec{B}(x \gg a) = \frac{2\mu_0 i a^2}{\pi} \frac{1}{x^3} \hat{u}_x.$$

Según la definición del momento magnético de la espira, tenemos para una espira cuadrada $\vec{m} = i\Sigma\hat{u}_n = 4a^2\hat{u}_n$ y el campo magnético en el eje ($\hat{u}_n = \hat{u}_x$) se escribe

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{r^3}, \quad (8.12)$$



identico como estructura a

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3},$$

campo eléctrico en el eje de un dipolo eléctrico (párrafo 2.6). El campo magnético en el eje de una pequeña espira ($x \gg a$ se llama aproximación de pequeña espira) es un campo de dipolo. Volveremos a este tema en un momento, pero digamos ahora que el resultado es válido para los circuitos planos donde corre corriente, cualquiera que sea su forma, y constituye el otro aspecto válido del principio de equivalencia de Ampère, según el cual una espira y un dipolo son equivalentes también para el campo magnético producido y no sólo por la fuerza.

8.2.2 Espiral circular

Consideremos ahora una espiral circular de radio R , donde pasa corriente i . En el punto P , distante x desde O de la espiral, un elemento $d\vec{s}$ de espiral genera un campo magnético $d\vec{B}$ de módulo:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{|d\vec{s} \times \hat{u}_r|}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{r^2},$$

ya que $d\vec{s}$ y \hat{u}_r son ortogonales. La componente en el eje x vale:

$$dB_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \cos \theta,$$

con θ el ángulo formado por $d\vec{B}$ con el eje x .

Cuando se consideran las contribuciones $d\vec{B}$ de todos los elementos $d\vec{s}$ que forman la espira, las componentes paralelas al eje se suman, mientras que las transversales se cancelan de dos en dos, por simetría del problema. En los puntos del eje de la espira el campo magnético es, por lo tanto, paralelo al eje mismo y concorde si la corriente circula según la regla de la mano derecha. En total:

$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 i \cos \theta}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \hat{u}_n = \frac{\mu_0 i \cos \theta}{4\pi} \frac{2\pi R}{r^2} \hat{u}_n,$$

siendo $\cos \theta$ y r constantes, si el punto P es fijo. Substituyendo $r^2 = x^2 + R^2$ y $\cos \theta = R/r$, se obtiene:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{3r^3} \hat{u}_n = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{u}_n. \quad (8.13)$$

Observamos que \vec{B} tiene el mismo sentido en todos los puntos del eje. En el centro de la espira ($x = 0$), el campo es máximo y vale:

$$\vec{B}_{\max} = \frac{\mu_0 i}{2R} \hat{u}_n; \quad (8.14)$$

por $x \rightarrow \infty$ el campo tiende a cero.

Cuando está satisfecha la condición $x \gg R$ la ecuación (8.13) se traduce en:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 R^2}{2x^3} \hat{u}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i\pi R^2}{x^3} \hat{u}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{x^3} \quad (8.15)$$

donde hemos puesto $\vec{m} = i\Sigma\hat{u}_n = i\pi R^2\hat{u}_n$, que es el momento magnético de la espira circular.

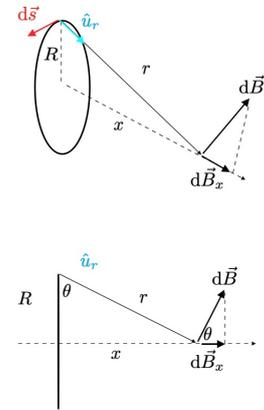


Figure 8.6: Campo magnético producido por una espira donde pasa corriente eléctrica.

También en el caso de una espira circular encontramos el mismo resultado que en la ecuación (8.12), o sea que el campo magnético producido por la espira circular en los puntos del eje tiene la misma estructura que el campo eléctrico producido por un dipolo, siempre que la distancia sea mucho mayor que las dimensiones del sistema. La analogía no se limita solamente a los puntos del eje, sino que se encuentra que en general el comportamiento del campo magnético \vec{B} de la espira es idéntico al campo eléctrico \vec{E} de un dipolo, así valen las ecuaciones (2.44) y (2.46)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 p}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta) \quad (8.16)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{u}_r) \hat{u}_r - \vec{m}]. \quad (8.17)$$

donde \hat{u}_r es el versor dirección y el sentido de \vec{m} está dado por la corriente. Se confirma plenamente el principio de equivalencia de Ampère.

Si en un punto distante r de una espira de momento magnético \vec{m}_1 , a lo largo de la dirección \hat{u}_r se coloca una segunda espira de momento magnético \vec{m}_2 , la energía potencial magnética se escribe según la ecuación (2.58):

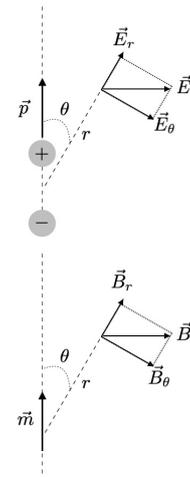
$$U_p = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{u}_r)(\vec{m}_2 \cdot \hat{u}_r)]. \quad (8.18)$$

La simetría de la expresión de U_p con respecto a \vec{m}_1 y \vec{m}_2 indica que la ecuación (8.18) describe la interacción mutua dipolo-dipolo en el caso magnético.

Para calcular la fuerza de interacción entre dos dipolos o el torque con respecto a un eje de rotación, las ecuaciones (7.34) y (7.35)

$$\vec{F} = -\nabla U_p = \nabla(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1), \quad M_\theta = -\frac{\partial U_p}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1).$$

Sin embargo, hay una diferencia sustancial entre las líneas de campo eléctrico de un dipolo eléctrico y el campo magnético de una espira en las cercanías del sistema: las primeras salen o entran de las cargas, las segundas son continuas sin principio ni fin. La estructura de las líneas de campo eléctrico de dipolo está de acuerdo con la propiedad de que la circulación de \vec{E} a lo largo de cualquier línea cerrada es nula: por otra parte, si tomamos una trayectoria cerrada coincidente con una de las líneas de campo \vec{B} de una espira circular, nos damos cuenta de que el campo es siempre equidireccional a lo largo de dicha línea y por tanto su circulación no puede ser nula. Esta diferencia no está relacionada con el caso particular, sino que es una propiedad fundamental del campo magnético, como veremos en el párrafo 8.4: aquí encontramos la limitación del principio de equivalencia de Ampère, debido esencialmente a la inexistencia de los dipolos magnéticos.



Ejercicio 8.2 El disco de Rowland

Un disco de radio $R = 20$ cm posee una carga eléctrica distribuida uniformemente con densidad $\sigma = 10^{-6}$ C/m² y gira alrededor de su eje cumpliendo $N = 200$ giros por segundo. Calcular el campo magnético producido en el eje del disco a una distancia $x = 1$ cm desde el centro O .

Solución. La carga dq que se encuentra en la corona circular entre los radios r y $r + dr$ vale

$$dq = \sigma d\Sigma = 2\pi \sigma r dr;$$

debido a la rotación, tenemos una corriente equivalente

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} 2\pi \sigma r dr = \omega \sigma r dr,$$

donde T es el período y ω la velocidad angular de rotación. Dicha espira de radio r produce en el punto P del eje distante x , un campo magnético (8.13)

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2} \frac{r^2}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \frac{r^3 dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

El campo magnético total se obtiene integrando (por partes) entre 0 y R , considerando el disco formado por infinitas espiras circulares, y se obtiene

$$B = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left[\frac{2x^2 + r^2}{(x^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^R = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left[\frac{2x^2 + R^2}{(x^2 + R^2)^{1/2}} - 2x \right].$$

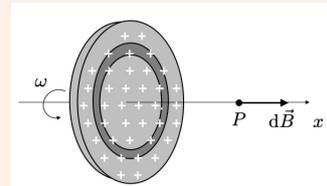
Si $x^2 \ll R^2$, como en este caso, el campo magnético se puede aproximar a (con expansión en Taylor por $x \rightarrow 0$)

$$B = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2}.$$

Numéricamente, siendo $\omega = 2\pi N \cdot 10^2$ rad/s,

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 0.2}{2} = 1.58 \cdot 10^{-10} \text{ T}.$$

Este campo es muy pequeño en comparación con el campo magnético terrestre, que es del orden de 10^{-5} T, por lo que su detección plantea considerables problemas experimentales. Sin embargo, la medición fue realizada por Rowland en 1878 y demostró por primera vez que los efectos magnéticos producidos por un cuerpo cargado en movimiento no difieren cualitativamente de los de las corrientes eléctricas. ■



8.2.3 Solenoide lineal

Un solenoide lineal está constituido por un hilo conductor enrollado en forma de hélice cilíndrica de paso muy pequeño.

Sea d la longitud del solenoide, R el radio, N el número total de espiras, $n = N/d$ el número de espiras por unidad de longitud; si éstas están suficientemente cerca para considerarlas distribuidas con continuidad, en el tramo dx tendremos ndx espiras. El valor del campo magnético en un punto P sobre el eje se calcula con la expresión: ecuación (8.13)

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2 r^3} dx; \quad (8.19)$$

el cual es paralelo al eje x y está conectado con el sentido de la corriente según la regla de la mano derecha. Si utilizamos la variable ϕ ,

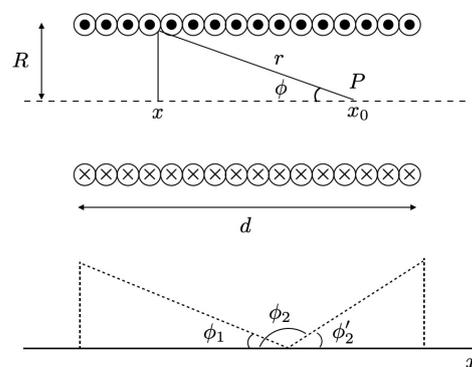


Figure 8.7: Campo magnético producido por un solenoide donde pasa corriente eléctrica.

como en figura 8.7, se observa:

$$\begin{aligned} r \sin \phi &= R, \\ x - x_0 &= -R \cot \phi, \quad dx = \frac{R d\phi}{\sin^2 \phi} \\ \implies dB &= \frac{\mu_0 n i}{2} \sin \phi d\phi. \end{aligned}$$

El campo magnético en el punto P se obtiene sumando sobre todas las espiras, o sea, integrando entre ϕ_1 y ϕ_2 :

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin \phi d\phi = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi'_2) \quad (8.20)$$

donde ϕ_1 y $\phi'_2 = \pi - \phi_2$ son los ángulos bajo los cuales el punto P ve las espiras finales del solenoide. Midiendo x con respecto al centro del solenoide tenemos:

$$B(x) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left[\frac{d + 2x}{\sqrt{(d + 2x)^2 + 4R^2}} + \frac{d - 2x}{\sqrt{(d - 2x)^2 + 4R^2}} \right]. \quad (8.21)$$

El campo magnético es máximo en el centro ($x = 0$), donde vale:

$$B(x) = \mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}} \quad (8.22)$$

y decrece simétricamente con respecto al centro.

Un caso particular es cuando el solenoide es muy largo $d \gg R$, desde el centro O las dos espiras terminales están vistas bajo ángulos casi nulos, por lo tanto, $\cos \phi_1 = \cos \phi'_2 = 1$ y el campo magnético vale:

$$B_\infty = \mu_0 n i, \quad (8.23)$$

La líneas de fuerza y el módulo del campo magnético generado por un solenoide están mostrados en figura 8.8. La línea de fuerza son muy similares a aquellas de un imán cilíndrico; el módulo del campo magnético, en función de la posición, está mostrado por distintos valores del radio del solenoide, $R = \{d/2, d/10, d/50, d/100\}$ y normalizado con los valore de la corriente y el número de espiras. Claramente, el efecto es lineal con la densidad de espiras y la intensidad de corriente. La figura 8.8 muestra el módulo del campo magnético en el eje del solenoide para distintos valores de la relación R/d . Cuando esta relación es muy pequeña, en el límite cero (caso del solenoide indefinido), la zona en la que el campo magnético tiene aproximadamente el valor B_∞ es bastante extendida; se estrecha a medida que R/d aumenta y al mismo tiempo el valor en el centro disminuye, mientras que se extiende la región exterior en la que hay un campo magnético distinto que cero.

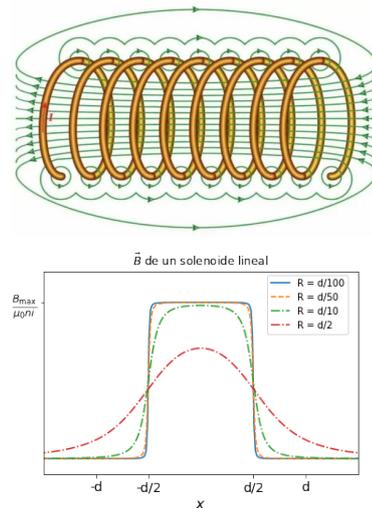


Figure 8.8: Líneas de fuerza de un solenoide (arriba) y el módulo del campo magnético.

8.3 Acciones electrodinámicas entre circuitos

Calculamos ahora la fuerza entre dos circuitos donde pasa corriente, utilizando las leyes elementales de Laplace, ecuación (7.17) y (8.2). Llamamos $d\vec{s}_1$ y $d\vec{s}_2$ a los elementos de hilo de los circuitos

e i_1 e i_2 las corrientes correspondientes, la fuerza $d\vec{F}_1$ que actúa sobre el elemento $d\vec{s}_2$ debido al campo magnético $d\vec{B}_1$ producido por $d\vec{s}_1$ en el punto donde se encuentra $d\vec{s}_2$ es:

$$d\vec{F}_{1,2} = i_2 d\vec{s}_2 \times d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{s}_2 \times (d\vec{s}_1 \times \hat{u}_1)}{r^2}.$$

La fuerza que actúa de $d\vec{s}_2$ sobre $d\vec{s}_1$ está dada por:

$$d\vec{F}_{2,1} = i_1 d\vec{s}_1 \times d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s}_2 \times \hat{u}_2)}{r^2}.$$

No es difícil encontrar situaciones particulares donde $d\vec{F}_{1,2} \neq -d\vec{F}_{2,1}$, en contradicción con el principio de acción y reacción; el hecho no es preocupante ya que, como se ha dicho anteriormente, las leyes de Laplace, per se, no se aplican a sistemas físicamente realizables.

La fuerza resultante entre los dos circuitos se obtiene con una doble integración extendida a los dos circuitos que considera los elementos $d\vec{s}$

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{s}_2 \times (d\vec{s}_1 \times \hat{u}_1)}{r^2},$$

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s}_2 \times \hat{u}_2)}{r^2}.$$

Recordando la regla del doble producto vectorial:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3) \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_3,$$

la integral que aparece en $\vec{F}_{1,2}$ se transforma en:

$$\oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{s}_2 \cdot \hat{u}_1) d\vec{s}_1}{r^2} - \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2) \hat{u}_1}{r^2}.$$

Si escribimos $\hat{u}_1/r^2 = -\nabla(1/r)$, el primer término es:

$$\oint_1 \left[\oint_2 \frac{(d\vec{s}_2 \cdot \hat{u}_1)}{r^2} \right] d\vec{s}_1 = - \oint_1 \left[\oint_2 \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\vec{s}_2 \right] d\vec{s}_1 \quad (8.24)$$

es cero porque la circulación de un gradiente es siempre cero.

Por lo tanto, como $\hat{u}_1 = -\hat{u}_2$ y ya que las integrales se pueden cambiar:

$$\vec{F}_{1,2} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2) \hat{u}_1}{r^2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{s}_2 \cdot d\vec{s}_1) \hat{u}_2}{r^2} = -\vec{F}_{2,1} \quad (8.25)$$

la fuerza entre los dos circuitos obedece al principio de acción y reacción.

Examinemos ahora el caso de dos hilos lineales indefinidos donde pasan corrientes i_1 e i_2 . Si son ortogonales, entonces la ecuación (8.25) nos dice que la fuerza es nula ya que $d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2 = 0$. Si son paralelos, entonces se nota que si las corrientes tienen el mismo sentido la fuerza es atractiva ya que $d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2 > 0$, si las corrientes circulan en sentidos contrarios entonces la fuerza es repulsiva. El módulo de la fuerza es:

$$F_{1,2} = B_1 i_2 d = \frac{\mu_0 i_1 i_2 d}{2\pi r}.$$

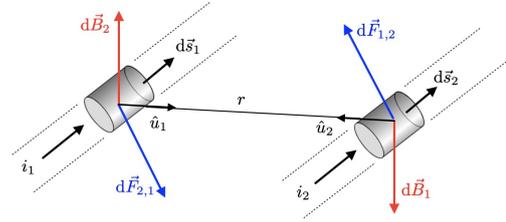


Figure 8.9: Acciones mecánicas sobre dos circuitos en los cuales pasa corriente.

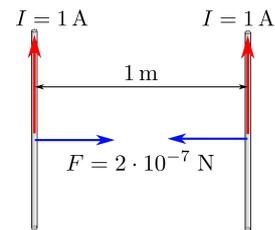


Figure 8.10: Fuerza entre hilos donde pasa corriente eléctrica.

La fuerza por unidad de longitud es:

$$F_d = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} . \quad (8.26)$$

y es igual por ambos hilos.

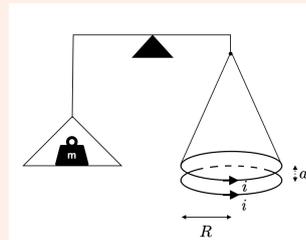
Unidades 8.3.1 La decimoprimer Conferencia Internacional de pesas y medidas decidió, en el año 1960, adoptar como cantidad eléctrica fundamental la intensidad de corriente, utilizando como unidad de medida de base la ecuación (8.26): tiene intensidad de 1 A aquella corriente que circulando en dos hilos lineales paralelos a una distancia $r = 1\text{m}$ origina una fuerza $F = \mu_0/2\pi = 2 \cdot 10^{-7}\text{N}$ por metro de cada conductor. Se observa que esta definición fija en la práctica el valor de κ_m , o sea, de la permeabilidad magnética en el vacío μ_0 al valor $4\pi \cdot 10^{-7}\text{H/m}$. Conociendo la velocidad de la luz, queda fijada también la constante dieléctrica ϵ_0 .

Ejercicio 8.3 Electrodinamómetro absoluto a balanza. Dos espiras circulares de radio $R = 30\text{cm}$ que tienen el mismo eje se colocan en planos horizontales paralelos $a = 3\text{mm}$ de distancia. La espira superior está suspendida de una balanza. Si la misma corriente $i = 1\text{A}$ circula por las espiras en el mismo sentido, hay que añadir una masa m , que ahora determinaremos, al otro plato de la balanza para restablecer el equilibrio. La relación entre la distancia a y la longitud $2\pi R$ de las espiras es de $1.6 \cdot 10^{-3}$; ésta es muy pequeña y las dos espiras pueden tratarse como hilos paralelos indefinidos. Entre ellos actúa entonces la fuerza de atracción

$$F = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi R} 2\pi R = \frac{\mu_0 i^2}{a}$$

y el equilibrio se restablece con la fuerza peso

$$m = \frac{\mu_0 i^2}{ag} = 1.28 \cdot 10^{-5}\text{kg} = 1.28 \cdot 10^{-2}\text{g} ,$$



siendo g la aceleración de gravedad. La fuerza y, por tanto, la masa son muy pequeñas y su medición es difícil y con errores considerables. Para la misma corriente, la fuerza aumenta si se sustituyen las dos espiras por dos bobinas compactas de n espiras cada una: la geometría sigue siendo la misma, pero la fuerza aumenta de un factor n^2 . Ya con $n = 10$, la masa se convierte en 1.28g , más fácil de medir con alta precisión. En cualquier caso, una vez fijado el valor de μ_0 , el instrumento permite medir la corriente mediante mediciones de magnitudes mecánicas: la escala es cuadrática. como en el electrómetro visto en el ejercicio 4.11. ■

N Los factores 4π en las definiciones de ϵ_0 y μ_0

Llamados κ_e y κ_m los coeficientes en las expresiones de las fuerzas entre dos cargas y entre dos corrientes, vale la relación

$$c^2 = \kappa_e / \kappa_m , \quad (8.27)$$

como veremos cuando calcularemos las ecuaciones de Maxwell y la existencia de las ondas electromagnéticas. Las definiciones

$$\kappa_e = 1/(4\pi \epsilon_0) , \quad \kappa_m = \mu_0/(4\pi)$$

trasforman la relación (8.27) en la ecuación (8.9). Numéricamente los valores de las cantidades eléctricas y magnéticas no cambian, pero es distinto el aspecto de las formulas si se utilizan κ_e y κ_m ó ϵ_0 y μ_0 . Por ejemplo, la ley de Gauss sería

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi \kappa_e q$$

y los campos eléctricos en los casos a simetría esférica, cilíndrica y plana se escriben

$$\vec{E} = \frac{\kappa_e q}{r^2} \hat{u}_r, \quad \vec{E} = \frac{2\kappa_e \lambda}{r} \hat{u}_r, \quad \vec{E} = 4\pi\kappa_e \sigma \hat{u}_n. \quad (8.28)$$

Análogamente la ley de Biot-Savart y el campo magnético al interior de un solenoide se escriben

$$\vec{B} = \frac{2\kappa_m i}{r} \hat{u}_\phi, \quad \vec{B} = 4\pi\kappa_m i \hat{u}_n. \quad (8.29)$$

Resulta que los factores 4π ó 2π no aparecen en las formas relativas a las simetrías circulares, donde los campos varían como $1/r^2$ ó $1/r$, sino que se encuentran en los campos constantes, donde las líneas de campo son rectilíneas. Desde este hecho surgió la propuesta de racionalizar el electromagnetismo, sustituyendo a κ_e y κ_m respectivamente $1/4\pi\epsilon_0$ y $\mu_0/4\pi$, con lo que las fórmulas adquieren el aspecto visto hasta ahora, con los factores 4π y 2π que aparecen cuando el ángulo sólido y el ángulo plano son importantes. A las racionalizaciones de las fórmulas se acompañó la adopción del *sistema Giorgi* de unidad de medida o *sistema m k s A racionalizado* donde las unidades fundamentales era el *metro*, el *kilogramo*, el *segundo* y el *ampere*. Añadiendo las unidades *Kelvin*, *mol* y *candela* se formó el *sistema internacional*.

Observamos que la elección del valor numérico de μ_0 y, por lo tanto, de ϵ_0 fija arbitrariamente los valores de la constante dieléctrica y de la permeabilidad magnética del espacio vacío; el efecto en los materiales se mide con respecto a estas constantes, definiendo la constante dieléctrica relativa y de la permeabilidad magnética relativa, cuyos valores son intrínsecos y no dependen del sistema de unidad de medida, siendo razones.

8.4 Ley de Ampère

El enlace entre las corrientes y el campo magnético producido por estos, que nos proporcionó las ecuación (8.3) y ecuación (8.5), puede ser expresado con una particular integral sobre el campo magnético, así como ocurre por el campo eléctrico con la ley de Gauss.

Empezamos considerando un hilo lineal indefinido donde pasa corriente i , el cual produce un campo magnético dado por la ecuación (8.11), y escribimos el producto escalar entre el campo \vec{B} y un vector infinitesimal $d\vec{s}$ puesto en el espacio cerca del hilo, a una distancia r :

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_\phi \cdot d\vec{s}.$$

La cantidad $\hat{u}_\phi \cdot d\vec{s}$ proporciona la proyección de $d\vec{s}$ en la dirección de \hat{u}_ϕ , la cual es igual a $r d\phi$ y, por lo tanto,

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\phi :$$

el producto escalar depende solamente del ángulo bajo el cual está vista la proyección de $d\vec{s}$ en la dirección de \vec{B} .

La circulación de \vec{B} extendida a una línea cerrada está dada por la circulación

$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\phi.$$

Tenemos ahora dos posibilidades: o la línea cerrada está concatenada con el hilo (o sea contiene el hilo), en tal caso la integral es 2π , por lo tanto,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \pm \mu_0 i$$

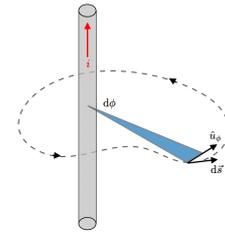


Figure 8.11: Ley de Ampère.

donde el signo depende de la orientación de la corriente y la orientación de la circulación, siguiendo siempre la regla de la mano derecha. O la línea cerrada no está concatenada con el hilo (o sea no contiene el hilo), por lo tanto, la integral es igual a cero: de hecho, para cada elemento $d\vec{s}_1$ de curva con proyección en la dirección de \vec{B} vista bajo un ángulo $d\phi$ existe otro elemento $d\vec{s}_2$ con proyección vista bajo un ángulo $-d\phi$, como en figura 8.12.

Si la línea cerrada concatena muchos hilos lineales donde pasas corrientes i_1, i_2, \dots, i_n los cuales producen los campos $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_n$, el campo magnético en cada punto del espacio está dado por la suma $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n$ y, por lo tanto,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint \left(\sum_k \vec{B}_k \right) \cdot d\vec{s} = \sum_k \oint \vec{B}_k \cdot d\vec{s} = \sum_k \Gamma_k.$$

Cada circulación vale $\mu_0 i_k$ o cero según que la línea contenga o no la corriente i_k ; en figura 8.13 se muestran 3 casos de circulaciones, nótese la orientación de la circulación; concluyendo, podemos decir que la circulación del campo magnético se expresa como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i \tag{8.30}$$

la cual se llama *ley de Ampère*, donde es implícito que la corriente en el segundo miembro es la suma algebraica de todas las corrientes que están concatenadas con el camino.

La ley de Ampère, calculada para hilos lineales indefinidos es válida para cualquier forma de conductor donde pasa corriente eléctrica, y es una propiedad fundamental del campo magnético producido por corrientes estacionarias.

La ecuación (8.30) puede ser escrita de manera diferente expresando cada corriente con la correspondiente densidad de corriente.

Por eso, consideremos una superficie Σ cualquiera que se apoya sobre la línea en la cual se calcula la circulación de \vec{B} y orientada con respecto a la orientación de la línea, según la regla de la mano derecha; llamamos $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k, \dots$ las intersecciones de los hilos conductores con las superficies Σ , véase figura 8.14 y escribimos:

$$\int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot \hat{u}_1 d\Sigma + \dots + \int_{\Sigma_k} \vec{j}_k \cdot \hat{u}_k d\Sigma + \dots$$

lo cual es posible ya que \vec{j} es distinta de cero solamente en las zonas de intersección, donde coincide con $\vec{j}_1, \dots, \vec{j}_k, \dots$. Si la corriente es estacionaria, entonces cada integral se corresponde a la intensidad de corriente eléctrica que circula en el hilo $i_k = \int_{\Sigma_k} \vec{j}_k \cdot \hat{u}_k d\Sigma$ como hemos visto en el capítulo sobre la corriente eléctrica, por lo tanto, la ley de Ampère (8.30) se escribe como:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma.$$

El teorema de Stokes permite transformar la circulación de \vec{B} en un circuito C en flujo del rotor de \vec{B} a través una superficie apoyada en el circuito C :

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

y esta igualdad es válida para cualquier superficie Σ y, por lo tanto,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{8.31}$$

la cual es la expresión local de la ley de Ampère.

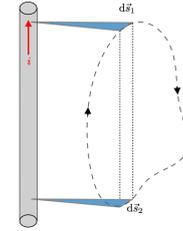
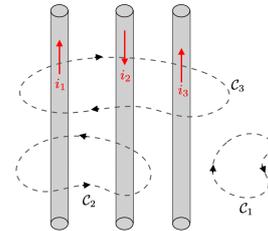


Figure 8.12: Ley de Ampère con circulación no concatenada.



$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= 0 \\ \Gamma_2 &= \mu_0(i_1 - i_2) \\ \Gamma_3 &= \mu_0(-i_1 + i_2 - i_3) \end{aligned}$$

Figure 8.13: Ley de Ampère generalizada.

La ecuación (8.31) es compatible con la condición de estacionariedad de la corriente, expresada por $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, porque $\nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = 0$ por la regla del producto mixto cuando dos vectores son iguales. Si la corriente no es estacionaria, o sea, $\nabla \cdot \vec{j} = -\partial \rho / \partial t$, la ecuación (8.31) no puede ser válida; esta inconsistencia ha sido superada por Maxwell, como veremos en los capítulos siguientes.

Hemos ya observado que la ley de Ampère constituye un enlace entre las fuentes y el campo análogo a aquello dado por el teorema de Gauss. De la misma manera, aunque en un contexto geométrico distinto, la ley de Ampère se puede utilizar para calcular el campo magnético cuando la simétrica lo permite. Conviene encontrar líneas de integración donde el campo sea constante y orientado según el recorrido, como veremos en algunos ejemplos.

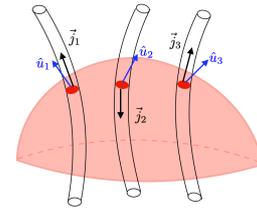


Figure 8.14: Ley de Ampère con densidades de corriente.

Ejercicio 8.4 Verificar que el campo magnético producido por una espira pequeña de radio R satisface la ley de Ampère (8.30).

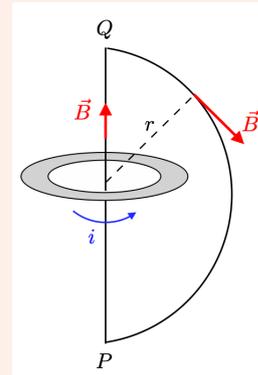
Solución: Podemos elegir el recorrido de integración como mostrado en figura, donde el tramo curvo es una circunferencia de radio $r \gg R$. Para la integral de P a Q utilizamos la ecuación (8.13):

$$\begin{aligned} \int_P^Q \vec{B} \cdot d\vec{x} &= \frac{\mu_0 i R^2}{2} \int_P^Q \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 i R^2}{2} \left[\frac{x}{R \sqrt{x^2 + R^2}} \right]_{-r}^r \\ &= \frac{\mu_0 i r}{\sqrt{x^2 + R^2}}. \end{aligned}$$

La integral desde Q hacia P en la circunferencia resulta desde la ecuación (8.17) donde ponemos $m = i\pi R^2$:

$$\int_Q^P \vec{B} \cdot d\vec{x} = \int_Q^P B_\theta r d\theta = \int_0^\pi = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} i\pi R^2 \sin \theta (r d\theta) = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^2}.$$

Si $r \gg R$ la contribución del tramo lineal vale $\mu_0 i$, mientras aquello del tramo curvo se anula. Si, en vez, la condición $r \gg R$ no está satisfecha, no podemos usar la expresión (8.17) para el campo fuera del eje y no es tan fácil verificar al ecuación (8.30), que sigue siendo siempre válida.



Ejercicio 8.5 En un hilo recto indefinido de radio R fluye una corriente de intensidad i . Calcular el campo magnético producido por el hilo en función de la distancia r al eje del hilo.

Solución La simetría axial del problema indica que el módulo del campo magnético sólo puede depender de la distancia al eje del hilo, es decir, $B = B(r)$; este hecho, junto con la dirección y sentido dados por la primera ley elemental de Laplace, dice que las líneas de campo

\vec{B} son circunferencias con centro en el eje del hilo y situadas en planos ortogonales al hilo. A una de estas circunferencias con radio $r > R$ aplicamos la ecuación (8.30):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B = \mu_0 i \implies B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r},$$

que es la ley de Biot-Savart; la corriente i es aquella que fluye en el hilo concatenada en la circunferencia elegida. Es interesante notar que el campo magnético fuera del hilo no depende del radio R y es igual al de un hilo con sección transversal despreciable, coincidente con el eje del hilo.

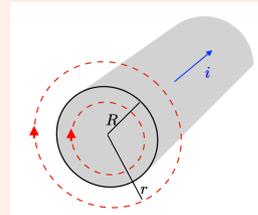
Consideremos ahora en la región interior del hilo una circunferencia análoga a la anterior, pero con radio $r < R$; las consideraciones de simetría son las mismas, pero la corriente concatenada, suponiendo que la densidad es uniforme en la sección transversal y valga $j = i/\pi R^2$, es

$$i(r) = j \pi r^2 = i \frac{r^2}{R^2}.$$

Desde la ley de Ampère

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2 = \mu_0 i \frac{r^2}{R^2} \implies B = \frac{\mu_0 j r}{2} = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} \quad 0 \leq r \leq R. \quad (8.32)$$

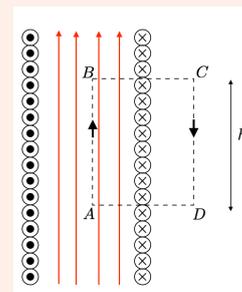
El módulo del campo \vec{B} es nulo en el eje, crece linealmente con el radio en el interior, es continuo para $r = R$ y disminuye como $1/r$ en el exterior. Si el cable fuera hueco, similar a una superficie cilíndrica de grosor despreciable, el campo magnético en el exterior seguiría siendo el mismo, pero en el interior sería nulo, como se demuestra fácilmente con los mismos argumentos utilizados hasta ahora.



Ejercicio 8.6 Deducir desde la ley de Ampère el campo magnético producido por un solenoide rectilíneo indefinido.

Solución Como el sistema es indefinido y la densidad de las espiras (que componen el solenoide) se supone constante, el campo magnético en cada punto del eje, además de ser paralelo al eje, debe tener el mismo valor.

De manera más general, el valor del campo en los puntos de una determinada sección transversal debe ser igual al valor en los puntos correspondientes de cualquier otra sección transversal, es decir, no puede haber variación en las características de \vec{B} a lo largo del solenoide mientras las espiras estén muy cercana. Una consecuencia de esto es que si tomamos una caja cilíndrica coaxial al solenoide y situada en todo su interior, el flujo \vec{B} que entra por una base es igual al que sale por la otra;



como en total el flujo a través de la superficie de la caja es nulo, el flujo que sale por la

superficie lateral debe ser nulo, sea cual sea el radio de la caja. Esto sólo puede ser así si \vec{B} es paralelo a la superficie lateral (si no lo fuera en un punto no lo sería en ningún otro) y concluimos que \vec{B} es paralelo al eje incluso en puntos fuera del eje. Por lo tanto, las líneas de campo están todas confinadas en el interior del solenoide y el campo exterior es cero.

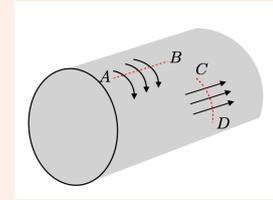
Dadas estas premisas, consideremos la trayectoria cerrada $ABCD$ como en figura; la corriente concatenada es nhi , si n es el número de espiras por unidad de longitud, y la única contribución al circuito proviene del tramo AB ya que en los otros tramos el campo magnético es ortogonal o nulo.

Desde la ecuación (8.30)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bh = \mu_0 n h i \implies B = \mu_0 n i,$$

que es la ecuación (8.23). El resultado no cambia si el tramo AB no coincide con el eje y, por lo tanto, el campo magnético en el interior de un solenoide lineal indefinido es uniforme en todas partes, es paralelo al eje del solenoide, orientado con respecto a la dirección de la corriente según la regla de la mano derecha, y el módulo depende de la corriente y de la densidad de las bobinas, pero no de su radio.

En un solenoide de longitud finita, esta situación se cumple aproximadamente en la zona que rodea al centro, tanto más cuanto menor sea la relación entre el radio y la longitud del solenoide. Al igual que los demás casos de extensión infinita, el solenoide indefinido es un caso ideal no físico, útil como punto de referencia para los cálculos.



Por último, observamos el siguiente hecho: en la práctica, un solenoide está necesariamente dispuesto según una hélice cilíndrica, de modo que el movimiento de las cargas puede pensarse como la superposición de un movimiento circular y un movimiento lineal paralelo al eje del solenoide, movimientos que tienen lugar en una superficie cilíndrica de radio R , coincidente con la superficie del solenoide. Si tomamos un tramo AB como el de la figura, en eso fluye una corriente que puede expresarse como el producto de una densidad de corriente lineal j_n (medida en A/m) por la distancia AB ; nótese que en la ecuación (8.23) el término ni tiene precisamente este significado de densidad de corriente lineal, corriente que circula por n espiras dispuestas en una longitud de un metro. Del mismo modo, la sección CD está atravesada por una corriente de densidad lineal j_p , y cambiando a vectores la densidad de corriente lineal del solenoide es $\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_p$. Cada densidad es proporcional a la velocidad de las cargas y la razón es

$$\frac{j_p}{j_n} = \frac{v_p}{v_n} = \frac{p}{3\pi R}$$

porque al mismo tiempo que se completa una circunferencia de radio R , se produce un avance de la cantidad p , igual al paso de la hélice. Si el solenoide es indefinido, la componente j_n da lugar al campo magnético de módulo $B_0 = \mu_0 j_n$ en el interior y nulo en el exterior; la componente j_p equivale a una corriente distribuida a lo largo de una superficie cilíndrica (véase el ejemplo 8.5 al final) y da lugar a un campo nulo en el interior y en el exterior es igual al campo generado por un hilo indefinido donde pasa corriente $j_p 2\pi R$:

$$B = \frac{\mu_0 j_p 2\pi R}{2\pi r} = \mu_0 j_p \frac{R}{r} = \mu_0 \frac{j_n p R}{2\pi R r} = B_0 \frac{p}{2\pi r}.$$

Normalmente p es mucho menor que R y, claramente, también de r , por lo tanto $B/B_0 \sim 1$: cuantitativamente el efecto descrito no es relevante. ■

8.5 Flujo entre circuitos. Autoflujo

El campo magnético \vec{B}_1 generado por un circuito donde pasa corriente i_1 determina un flujo magnético $\Phi_{1,2}$ a través de cualquier otro circuito en la región donde actúa \vec{B}_1 . Utilizando las definiciones de flujo y del campo magnético, tenemos:

$$\Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2} \left(\oint \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \frac{d\vec{s}_1 \times \hat{u}_r}{r^2} \right) \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2,$$

donde Σ_2 es una superficie cualquiera que se apoya en el segundo circuito, r es la distancia desde el elemento $d\vec{s}_1$ del primer circuito al elemento de área $d\Sigma_2$ y \hat{u}_n es el versor de la dirección orientada a \vec{r} . La expresión del flujo puede ser escrita sintéticamente;

$$\Phi_{1,2} = M_{1,2} i_1,$$

insertando en $M_{1,2}$ todos los factores geométricos y las propiedades magnéticas del medio; el flujo producido por el primer circuito y que atraviesa el segundo es proporcional a la corriente i_1 que circula en el primero. De manera análoga, se encuentra:

$$\Phi_{2,1} = M_{2,1} i_2.$$

En la sección 8.7 demostraremos, a través del potencial vector, y en el capítulo 10, a través de un razonamiento energético, que $M_{1,2} = M_{2,1} = M$: M se llama *coeficiente de mutua inducción* entre los dos circuitos y depende de la forma de los circuitos, de sus posiciones relativas y de las propiedades magnéticas del medio; este coeficiente es constante si los circuitos son indeformables y en reposo uno con respecto al otro.

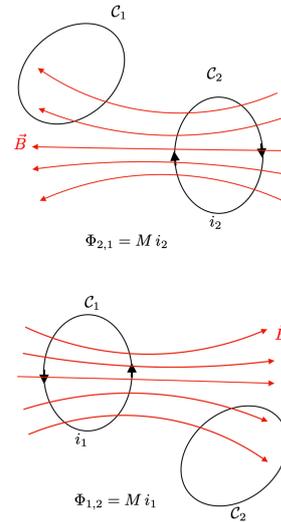


Figure 8.15: Flujos entre circuitos.

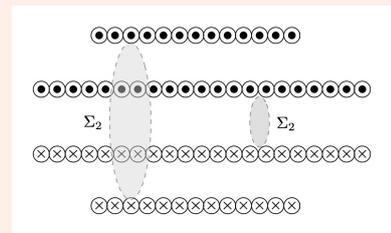
Ejercicio 8.7 Dos solenoides lineales indefinidos son coaxiales: el primero tiene n_1 espiras por unidad de longitud y sección Σ_1 , el segundo tiene n_2 espiras por unidad de longitud y sección $\Sigma_2 > \Sigma_1$. Calcular el coeficiente de inducción mutua por unidad de longitud.

Solución Calculemos $\Phi_{1,2}$, el primer solenoide produce el campo $B_1 = \mu_0 n_1 i_1$ en el interior, mientras que en el exterior $B_1 = 0$. El flujo concatenado con el segundo solenoide es el que pasa por la parte de la sección Σ_2 que coincide con Σ_1 . Así, en la unidad de longitud del segundo solenoide, que tiene n_2 espiras,

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2} &= n_2 \Sigma_1 B_1 = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1 i_1 \\ \implies M &= \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1. \end{aligned}$$

Para calcular $\Phi_{2,1}$ observamos que el campo $B_2 = \mu_0 n_2 i_2$ produce a través n_1 espiras del primer solenoide de sección Σ_1 el flujo:

$$\Phi_{2,1} = n_1 \Sigma_1 B_2 = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1 i_2 \implies M = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1.$$



De este ejemplo se desprende que lo importante no es tanto la sección geométrica del circuito a través del cual se calcula el flujo, como la parte sobre la que el campo es distinto de cero: es decir, como es lógico, lo que interesa es la geometría del flujo. ■

Ejercicio 8.8 Un hilo indefinido coincide con el eje de un solenoide toroidal de N espiras de sección Σ , igual a un rectángulo de lados a , b : el radio interior del toroide es R . Calcular el coeficiente de inducción mutua del sistema.

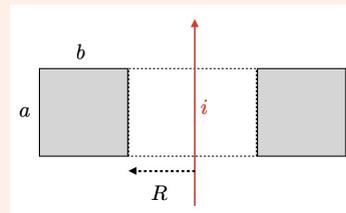
Solución El hilo indefinido produce el campo magnético $B = \mu_0 i / 2\pi r$, ortogonal a cada espira del solenoide. El flujo a través de cada espira es

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_R^{R+h} \frac{a dr}{r} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R}$$

y el coeficiente de mutua inducción es

$$M = \frac{N\Phi}{i} = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R}.$$

Si, por el contrario, partimos del campo del solenoide, el flujo de éste concatenado con el circuito del que forma parte el hilo, que imaginamos completado por un tramo muy alejado del sistema, coincide con el flujo a través de una espira del solenoide toroidal, ya que el campo externo del solenoide es prácticamente despreciable. Por lo tanto, encontramos la misma expresión para M .



En los ejemplos considerados, era fácil verificar que $M_{1,2} = M_{2,1}$; en otros casos la verificación podía ser muy difícil. Si en el ejercicio 8.8, en lugar del hilo indefinido tuviéramos una espira de cualquier forma, el cálculo de $\Phi_{2,1}$ (del solenoide a la espira) sería idéntico, pero el de $\Phi_{1,2}$ (de la espira al solenoide) sería prohibitivo. Por lo tanto, en un cálculo de M es mejor examinar el problema con cuidado y, aprovechando que se dispone de dos posibilidades de cálculo, elegir la que sea analíticamente más accesible.

8.5.1 Autoflujo

El campo magnético generado por un circuito produce un flujo también a través del circuito mismo, llamado autoflujo del circuito, que se escribe:

$$\Phi = \int_{\Sigma} \left(\oint \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} \right) \cdot \hat{u}_n d\Sigma,$$

poniendo en evidencia la corriente, la expresión queda:

$$\Phi = Li$$

donde el factor L se llama *coeficiente de autoinducción del circuito* y depende de la forma del circuito y de las propiedades magnéticas del medio.

Ejercicio 8.9 Calcular el coeficiente de autoinducción de un solenoide toroidal y de un solenoide lineal indefinido (en este último caso por unidad de longitud).

Solución. Para el solenoide toroidal, si N son las espiras, Σ la sección y R el radio medio,

se puede escribir

$$\Phi = N \Sigma B = N \Sigma \frac{\mu_0 N i}{2\pi R} \implies L = \frac{\mu_0 N^2 \Sigma}{2\pi R}.$$

Esto es cierto si el campo puede considerarse uniforme sobre la sección transversal; en caso contrario, hay que conocer la forma de la sección transversal y realizar la integral de flujo, como se vio en el ejercicio 8.8. Con un solenoide de esta tipología tendríamos

$$\Phi = N \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{\mu_0 N^2 a i}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R} \implies L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R}.$$

En el caso del solenoide lineal de sección Σ , tenemos (por unidad de longitud)

$$\Phi = n \Sigma B = n \Sigma \mu_0 n i \implies L = \mu_0 n^2 \Sigma. \quad (8.33)$$

Cuando se calcula el autoflujo, el versor normal a la superficie Σ se orienta con respecto a la dirección de la corriente en el circuito según la regla de la mano derecha por lo que el flujo a través de Σ es positivo: en otras palabras, el coeficiente de autoinducción L se supone siempre positivo. El caso de M es diferente: normalmente se supone que M sea positivo si el flujo concadenado del primer circuito al segundo tiene el mismo signo que el autoflujo del segundo; el problema se hace importante solo cuando tenemos variaciones temporales del flujo.

Unidades 8.5.1 Los coeficientes M y L están dados por la razón entre un flujo y una corriente, y tal medida es

$$\frac{\text{weber}}{\text{ampere}} = \frac{\text{volt segundo}}{\text{ampere}} = \text{ohm segundo}.$$

Tal unidad se llama *henry*, cuyo símbolo es H. En la sección 8.1 habíamos visto la unidad de medida de μ_0 que es T m/A = Wb/(A m) o sea H/m.

Se usan frecuentemente los submúltiplos

$$\text{milihenry } \text{mH} = 10^{-3} \text{H}, \quad \text{microhenry } \mu\text{H} = 10^{-6} \text{H}.$$

Por ejemplo, el coeficiente L para un solenoide lineal con $n = 10^3$ espiras/metro y sección $\Sigma = 100 \text{cm}^2$ es, según la ecuación (8.33), $L = 4\pi \cdot 10^{-6} \text{H/m}$. Normalmente, cuando se trabaja en el vacío, L y M son muy pequeños, en el capítulo 9, veremos que es posible llegar a valores muy altos cuando se utilizan materiales ferromagnéticos.

8.6 Propiedad del campo \vec{B} en el vacío

Las características de la interacción magnética en el vacío están debidas a corrientes estacionarias, o sea, a la magnetoestática y están resumidas en las ecuaciones:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i, \quad \oint \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0. \quad (8.34)$$

a las cuales se corresponden las propiedades locales

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (8.35)$$

llamadas *ecuaciones de Maxwell de la magnetoestática*.

El campo magnético tiene la propiedad de ser siempre solenoidal, pero no es irrotacional. Esta circunstancia no da la posibilidad de encontrar de manera unívoca un potencial escalar magnético desde el cual poder calcular el campo con un operador de gradiente, como veremos en la sección 8.7.

La expresión explícita más general del campo magnético es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{j} \times \hat{u}_r}{r^2} d\tau, \quad (8.36)$$

La compatibilidad con las ecuaciones (8.35) y (8.36) se demuestra aplicando el operador de rotor y divergencia. Utilizando la $\hat{u}_r/r^2 = -\nabla(1/r)$ tenemos:

$$\nabla \cdot \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_{\tau} \vec{j} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \vec{j} \cdot \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\tau = 0;$$

junto a la propiedad del campo magnético, va puesta la fórmula de la fuerza que actúa sobre una carga en movimiento, o sea, la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Discontinuidad del campo magnético

Hemos ya visto, en la sección 3.3 que el campo eléctrico es discontinuo cuando cruza una superficie cargada. Análogamente, demostraremos que el campo magnético es discontinuo al cruzar una superficie donde hay una corriente con densidad lineal \vec{j} . Antes de estudiar la discontinuidad tenemos que calcular el campo magnético producido por una superficie donde pasa corriente eléctrica con densidad \vec{j} . Esta superficie se puede considerar como compuesta por hilos en los cuales pasa una corriente i , véase figura 8.16. El campo magnético es paralelo a la superficie y orientado según la regla de la mano derecha. Si aplicamos la ley de Ampère al camino ABCD, con lado $AB=CD=h$ y, por lo tanto, la circulación es:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2Bh = \mu_0 Ni = \mu_0 n h i \implies B = \frac{1}{2} \mu_0 n i$$

donde $n = N/h$ es el número de hilos por unidad de longitud y N es el número total de espiras en el camino elegido (no existen contribuciones en los lados BC y AD porque el campo magnético es ortogonal al elemento $d\vec{s}$ y, por lo tanto, el producto escalar es cero).

Si tomamos dos puntos P y Q muy cercanos a la superficie, así que la superficie se puede considerar localmente plana, el campo magnético debido a la corriente superficial en los puntos P y Q está dada por:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n i = \frac{1}{2} \mu_0 j_s$$

donde hemos puesto $n i = j_s$ como densidad lineal. A este campo generalmente se superpone otro debido a otras fuentes \vec{B} y en los puntos (que están muy cerca) se puede considerar constante. El campo magnético total en los puntos es:

$$\vec{B}_P = \vec{B} + \frac{1}{2} \mu_0 j_s \hat{u}_x, \quad \vec{B}_Q = \vec{B} - \frac{1}{2} \mu_0 j_s \hat{u}_x.$$

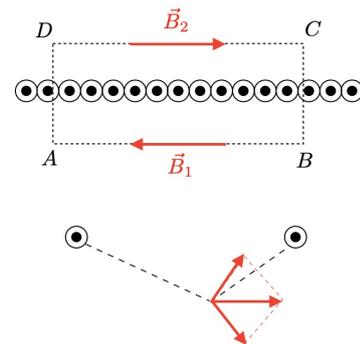


Figure 8.16: Campo magnético producido por una superficie donde pasa corriente eléctrica.

La discontinuidad está dada por:

$$\vec{B}_P - \vec{B}_Q = \mu_0 j_s \hat{u}_x \quad (8.37)$$

y es tangente a la superficie ortogonal a las líneas de corriente. Por lo tanto, la componente normal del campo magnético no varía al cruzar la superficie donde pasa corriente, mientras que la componente tangencial varía en módulo y dirección.

8.7 Potencial vector

El hecho que el rotor del campo magnético sea proporcional a la densidad de corriente (por lo que no es nulo) no nos permite definir un potencial escalar magnético, como no ha sido el caso para el campo eléctrico, donde $\nabla \times \vec{E} = 0$.

Con referencia a la figura 8.17, donde hemos considerado tres caminos distintos desde el punto P y el punto Q y un circuito donde pasa corriente, tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2} &= \int_P^Q (\vec{B} \cdot d\vec{s})_1 + \int_Q^P (\vec{B} \cdot d\vec{s})_2 \\ &\implies \int_P^Q (\vec{B} \cdot d\vec{s})_1 = \int_P^Q (\vec{B} \cdot d\vec{s})_2, \\ \Gamma_{2,1} &= \int_P^Q (\vec{B} \cdot d\vec{s})_1 + \int_Q^P (\vec{B} \cdot d\vec{s})_3 = \mu_0 i \\ &\implies \int_P^Q (\vec{B} \cdot d\vec{s})_1 = \mu_0 i + \int_P^Q (\vec{B} \cdot d\vec{s})_2, \end{aligned}$$

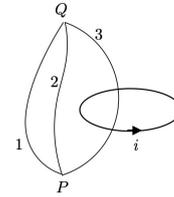


Figure 8.17: Circulación \vec{B} .

La integral de línea de \vec{B} desde el punto P hasta el punto Q es distinto según los recorridos y no se puede siempre poner igual a la diferencia entre los valores de una función escalar V unívoca de la posición; a lo largo de los recorridos 1 y 2, ΔV tomaría siempre el mismo valor, mientras que a lo largo de 3 tendríamos una contribución $k\mu_0 i$, con $k = 1, 2, \dots$ dependiendo si el recorrido de una o más vueltas alrededor de la corriente i .

Afortunadamente, el campo magnético satisface la condición $\nabla \cdot \vec{B} = 0$; esto quiere decir que puede ser siempre expresado como rotor de otro vector \vec{A} , llamado *potencial vector*:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (8.38)$$

De hecho, si aplicamos a la ecuación (8.38) el operador de divergencia encontramos un resultado idénticamente nulo. Las componentes de \vec{B} se obtienen como derivadas de las componentes de \vec{A} (donde por ahora es un vector).

La definición ecuación (8.38) no determina completamente el potencial vector: de hecho si consideramos un nuevo campo vectorial

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla S, \quad (8.39)$$

donde S es una función escalar arbitraria, tenemos

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla S = \nabla \times \vec{A}$$

y, por lo tanto, el campo magnético obtenido desde \vec{A}' es igual al obtenido desde \vec{A} . El potencial vector está definido a menos del gradiente de una función escalar arbitraria.

Esta indeterminación parcial puede ser utilizada para imponer una condición que será útil en casos particulares (como veremos en brevedad). Por el momento, calculamos la divergencia de la ecuación (8.39)

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot (\nabla S) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 S;$$

si se elige S tal que satisfaga la ecuación $\nabla^2 S + \nabla \cdot \vec{A} = 0$, resulta $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$. En otras palabras, si tenemos un determinado potencial vector \vec{A} y se elige la función S tal que satisfaga la $\nabla^2 S = -\nabla \cdot \vec{A}$, el potencial $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla S$ tiene divergencia nula. Todo esto es posible sin que cambie el campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$.

Por lo tanto, la definición completa del potencial vector del campo magnético es:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (8.40)$$

Es importante precisar que la elección de la condición $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ es significativa para campos constantes en el tiempo (magnetostática), mientras que en fenómenos variables en el tiempo resulta más apropiada una condición distinta (la cual será tratada en los capítulos siguientes).

Utilizamos ahora la definición del potencial vector en las ecuaciones de Maxwell para la magnetostática, ecuaciones (8.35):

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j},$$

donde hemos utilizado la regla del doble producto vectorial. Se puede notar que para las condiciones ecuaciones (8.40), el potencial vector obedece a la ecuación

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j},$$

y en coordenadas cartesianas tenemos para las tres componentes:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z. \quad (8.41)$$

Las relaciones anteriores son ecuaciones de Poisson y, por lo tanto, sus soluciones tienen que ser en coordenada cartesianas:

$$A_i(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{j_i(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}, \quad \text{con } i = x, y, z$$

y vectorialmente:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{j} d\tau}{r}. \quad (8.42)$$

Si el elemento de volumen se corresponde al de un elemento de hilo donde pasa corriente i , tenemos $d\tau = \Sigma ds$, $\vec{j} = i\hat{u}_t/\Sigma$, $\vec{j}d\tau = ids\hat{u}_t = id\vec{s}$ y la integral de volumen se transforma en integral de circulación extendido en todo el circuito

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s}}{r}. \quad (8.43)$$

Las relaciones (8.42) y (8.43) expresan el enlace entre las fuentes y el potencial vector; en éstas, el potencial vector \vec{A} puede ser pensado como la superposición de contribuciones infinitesimales $d\vec{A}$ debidos a los volúmenes elementales o a los elementos infinitesimales de hilo, según la lógica y con las mismas limitaciones conceptuales de la primera ley de Ampère; $d\vec{A}$ es *paralelo y concorde al elemento de corriente que lo genera y su modulo decrece con la distancia*.

La ecuación (8.42) aclara también la limitación de la condición $\nabla \cdot \vec{A} = 0$: se nota que ésta es compatible con la condición $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, o sea, en régimen de corrientes estacionarias, pero no con la relación más general $\nabla \cdot \vec{F} = -\partial\rho/\partial t$.

Por último, si calculamos el flujo del campo $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ y utilizando el teorema de Stokes encontramos:

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}, \quad (8.44)$$

la cual es la forma integral de $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$:

Definición 8.7.1 la circulación de \vec{A} en un camino cerrado es igual al flujo de \vec{B} a través de una cualquier superficie Σ apoyada sobre dicho camino.

Como en electrostática, desde la distribución de carga ρ es posible calcular el campo eléctrico \vec{E} o calcular el potencial V y con sus derivadas el campo eléctrico; también en magnetostática es posible calcular el campo magnético directamente con la ecuación (8.5) o utilizando el rotor del potencial vector. A priori, es difícil decir cuál es el método más sencillo para calcular el campo \vec{B} , porque en ambos casos tenemos que desarrollar integrales de vectores. De todas maneras, está claro el significado conceptual de \vec{A} y la razón por la cual se llama potencial vector.

El potencial vector se usa sobre todo en aplicaciones más avanzadas. Mostramos ahora como en algunos casos el potencial vector puede ser útil. Por ejemplo, utilizando \vec{A} podemos demostrar de manera muy rápida que los coeficientes de mutua inducción son iguales $M_{1,2} = M_{2,1}$. Calculamos el flujo del campo magnético utilizando la ecuación (8.44), donde utilizamos la expresión ecuación (8.43) para los dos casos, o sea, el flujo del campo magnético generado por un primer circuito a través de un segundo circuito y viceversa:

$$\Phi_{1,2} = \oint_2 \vec{A}_{1,2} \cdot d\vec{s}_2 = \oint_2 \left[\oint_1 \frac{\mu_0 i_1 d\vec{s}_1}{4\pi r_{1,2}} \right] \cdot d\vec{s}_2 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r_{1,2}},$$

$$\Phi_{2,1} = \oint_1 \vec{A}_{2,1} \cdot d\vec{s}_1 = \oint_1 \left[\oint_2 \frac{\mu_0 i_2 d\vec{s}_2}{4\pi r_{2,1}} \right] \cdot d\vec{s}_1 = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{s}_2 \cdot d\vec{s}_1}{r_{2,1}}.$$

Las dos integrales en el último miembro son iguales, ya que $r_{1,2} = r_{2,1}$ y porque el resultado no depende del orden de integración; por lo tanto, tenemos:

$$\frac{\Phi_{1,2}}{i_1} = M_{1,2} = \frac{\Phi_{2,1}}{i_2} = M_{2,1} \implies M_{1,2} = M_{2,1}.$$

Potencial magnético escalar

Hemos señalado las diferencias entre las ecuaciones de Maxwell para la electrostática y la magnetostática y sus consecuencias sobre las propiedades de los campos \vec{E} y \vec{B} . Sin embargo, hay un caso en el que los problemas de la magnetostática son exactamente los mismos que los de la electrostática, y esto ocurre cuando el campo \vec{B} está definido en una región delimitada del espacio en la que no existen corrientes; veremos posibles realizaciones prácticas en el capítulo 9. En este caso tendremos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = 0$$

y es posible definir un *potencial escalar magnético* V_m tal que

$$\vec{B} = -\nabla V_m.$$

El potencial magnético obedece a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V_m = \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} = 0.$$

El interés de esta situación particular está en el hecho que las soluciones encontradas en determinados problemas electrostáticos se pueden transportar exactamente al caso magnético: la estructura geométrica de las superficies equipotenciales y de las líneas de fuerza es la misma. Queda obviamente distinta la fuerza sobre una carga eléctrica, igual a $q\vec{E}$ en el caso electrostático y a $q\vec{v} \times \vec{B}$ en el caso magnetostático.

8.8 Transformaciones entre campos eléctricos y magnéticos

Una carga q con velocidad \vec{v} en un sistema de referencia inercial, que llamamos sistema de laboratorio, genera los campos:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{u}_r}{r^2} \hat{u}_r,$$

y en cada instante están conectado a través de la relación

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}. \quad (8.45)$$

Como hemos dicho, estas formulas son válidas sólo si $(v/c)^2 \ll 1$.

Consideremos ahora un segundo sistema de referencia inercial, que se mueve con respecto al primero con velocidad \vec{v} , igual a la velocidad de la carga q . Indicamos sintéticamente con O el primer sistema y con O' el segundo sistema, en el cual la carga está en reposo.

Una carga de prueba q_0 está sujeta a la misma fuerza en los dos sistemas, porque son inerciales; por simplicidad supongamos que q_0 tenga en un particular instante la velocidad \vec{v} en el sistema O . En O , la carga está sujeta a la fuerza:

$$\vec{F} = q_0 (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

mientras que en el sistema O' la fuerza sobre la carga es solamente:

$$\vec{F}' = q_0 \vec{E}',$$

ya que en O' el campo magnético \vec{B}' es nulo. Igualando la dos fuerzas se deduce que:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}.$$

Para el campo \vec{B}' , vale seguramente la relación

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E},$$

y como \vec{B}' es nulo, vale la relación ecuación (8.8).

Otro ejemplo es el siguiente: en el sistema O una carga está en reposo y un dispositivo que produce un campo magnético está en movimiento con velocidad \vec{v} ; este dispositivo está en el un sistema de referencia comóvil con O' . En O' la carga se mueve con velocidad $-\vec{v}$, el campo eléctrico \vec{E}' es cero y la fuerza sobre la carga se escribe:

$$\vec{F}' = -q\vec{v} \times \vec{B}'.$$

En el sistema O el campo magnético \vec{B} es igual a \vec{B}' , la carga está en reposo, pero en ella actúa una fuerza \vec{F} que tiene que ser igual a \vec{F}' :

$$\vec{F} = q\vec{E} = \vec{F}' = -q\vec{v} \times \vec{B} \implies \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}.$$

Las relaciones $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}'$ y $\vec{B} = \vec{B}'$ pueden ser escritas de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}', \quad \vec{B} = \vec{B}' + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}'.$$

Las expresiones de las transformaciones de los campos que hemos obtenido en los casos particulares tienen validez general, independientemente del sistema de cargas que generan los campos. Precisamente, los campos medidos en el sistema O' en movimiento con velocidad \vec{v} con respecto al sistema O están dados por:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}. \quad (8.46)$$

Las relaciones inversas, relativas a los campos en el sistema O en movimiento con velocidad $-\vec{v}$ con respecto a O' , son:

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}', \quad \vec{B} = \vec{B}' + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}'. \quad (8.47)$$

Estas relaciones constituyen las *transformaciones galileanas de los campos eléctricos y magnéticos*; y son válidas si $v \ll c$.

La cosa más importante que hay que observar es que en el cambio de un sistema al otro el campo \vec{E} y el campo \vec{B} no se transforman independientemente; consecutivamente la fuerza sobre una carga puede aparecer solamente eléctrica o solamente magnética o resultante de los dos efectos: la clasificación del tipo de interacción cambia de sistema a sistema de referencia, también si la fuerza es la misma.

9. Propiedades magnéticas de la materia

9.1 Magnetización de la materia

Hemos hablado en los capítulos anteriores que en la naturaleza existen materiales, compuestos de hierros, que son capaces de crear un campo magnético o que si acercamos un material a otro magnético esto se magnetiza. Al lado con estos fenómenos muy vistosos, limitados a algunos materiales, existen otro muchos más comunes pero menos evidentes.

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de la materia en presencia de un campo magnético. Inicialmente daremos una descripción fenomenológica y, utilizando el *vector magnetización* \vec{M} , veremos como se modifican las ecuaciones de la magnetostática.

Consideremos un solenoide lineal, de radio R y longitud d , con n espiras por unidad de longitud, y pongámoslo con el eje vertical. Colguemos con un resorte un pequeño inductor, compuesta de N' espiras de radio $r \ll R$ coaxiales con el solenoide y donde pasa corriente i' ; supongamos que la posición de equilibrio de la bobina, bajo la acción de la fuerza peso y de la fuerza elástica, coincida con el centro O' de la cara terminal del solenoide. Cuando en solenoide circula corriente i entonces se crea un campo magnético y sobre el inductor actúa una fuerza

$$F = \pm m' \frac{dB}{dx}$$

donde $m' = \pi r^2 N' i'$ es el momento magnético del inductor. Si \vec{m}' es concorde con el campo \vec{B} del solenoide, o sea i e i' tienen el mismo sentido, la fuerza sobre el inductor es atractiva y lleva el inductor hacia el centro del solenoide, si \vec{m}' es discorda al campo \vec{B} la fuerza es repulsiva y empuja el inductor hacia fuera donde el campo es menor.

Ahora repetimos el experimento pero en vez de utilizar un inductor, usamos materiales distintos. Cuando en el solenoide circula corriente se observa que sobre el material actúa una fuerza.

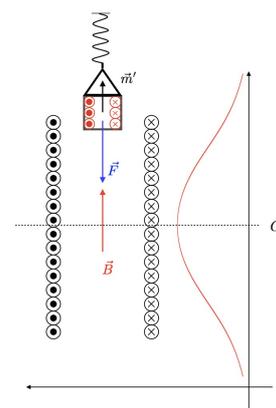


Figure 9.1: Solenoide con inductor.

Cualitativamente, por la mayor parte de los materiales la fuerza es pequeña también si el campo magnético toma valores muy altos. Algunos materiales vienen atraídos hacia el interior, otros empujados hacia fuera y esto independientemente del sentido del campo magnético, que se obtiene cambiando el sentido de la corriente. El conjunto de los resultados se interpreta suponiendo que algunos materiales, bajo un campo magnético, adquieren un momento magnético paralelo y concorde a \vec{B} , mientras que otros adquieren un momento magnético paralelo y discorde a \vec{B} : los primeros son aquellos que vienen atraídos, los segundos aquellos repulsados.

Por un análisis cuantitativo, nos referimos a un volumen dado τ , igual para todos los materiales usados. La fuerza por unidad de volumen vale, en módulo:

$$F_{\tau} = \frac{F}{\tau} = \frac{m}{\tau} \frac{dB}{dx} = M \frac{dB}{dx}.$$

La cantidad M , que representa el *momento magnético de la unidad de volumen del material*, se llama *magnetización*; y se define

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{\tau}. \quad (9.1)$$

Desde la medida sistemática de F_{τ} , además a las diferencia de signo y de módulo, se obtienen otros comportamientos. Si hacemos variar la intensidad de la corriente i en el solenoide, cambia \vec{B} y obtenemos como cambia M en función de B : mientras que por la mayor parte de los materiales se observa que la magnetización es directamente proporcional al valor del campo magnético, por otros como el hierro la dependencia de M con B es más complicada. Además, por algunos materiales, la fuerza depende de la temperatura, y por otros es independiente.

Según las características tenemos una primera clasificación de los materiales:

- **Diamagnéticos:** son los materiales que vienen repulsados por el solenoide. \vec{M} es opuesta al campo magnético externo y es proporcional; el efecto no depende de la temperatura. A esta clase pertenecen la mayoría de los materiales.
- **Paramagnéticos:** son los materiales que viene atraídos por el solenoide. \vec{M} es concorde al campo magnético externo y es proporcional. Se encuentra que el efecto aumenta con el disminuir de la temperatura, pero existen excepciones.
- **Ferromagnéticos:** son los materiales que vienen fuertemente atraídos por el solenoide. \vec{M} es concorde al campo magnético externo pero la relación entre ellos no es lineal ni unívoca. Además, normalmente los materiales se quedan magnetizados por un tiempo largo también cuando se ha apagado el campo magnético externo, cosa que no ocurre para los diamagnéticos y paramagnéticos.

La idea de asociar la fuerza a la magnetización, o sea al momento magnético por unidad de volumen, acuerda cuanto hecho para los dieléctricos con el vector polarización, o sea momento de dipolo eléctrico por unidad de volumen. Como veremos, existen analogías muy fuertes entre los dos fenómenos aún si estos son muy distintos conceptualmente.

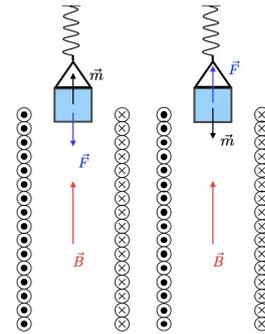


Figure 9.2: Solenoide con distintos materiales.

9.2 Permeabilidad magnética

El momento magnético que se crea bajo la acción del campo magnético externo causa una modificación del campo mismo: o sea el medio magnetizado se suma a las fuentes de \vec{B} constituidas por las corrientes de conducción. Examinemos el efecto del solenoide indefinido cuyo campo tiene la expresión $B_0 = \mu_0 ni$, donde B_0 es campo magnético en el vacío.

Imaginemos de rellenar completamente el solenoide con el medio homogéneo; se encuentra que \vec{B} es paralelo a \vec{B}_0 con la razón entre módulos

$$\frac{B}{B_0} = \kappa_m . \tag{9.2}$$

A esta razón damos el nombre de *permeabilidad magnética relativa del medio considerado*. Por lo tanto

$$B = \kappa_m B_0 = \mu_0 \kappa_m n i = \mu n i \tag{9.3}$$

definiendo *permeabilidad magnética absoluta* la cantidad

$$\mu = \mu_0 \kappa_m . \tag{9.4}$$

Obviamente κ_m es adimensional y μ tiene la misma unidad de medida de μ_0 , [H/m].

La relación (9.2) es valida para cualquier circuito en un medio indefinido. También la ecuación (9.4) es general, porque según la ley de Ampère-Laplace el campo magnético en el vacío tiene siempre el coeficiente μ_0 . Podemos decir que el campo magnético que existe en un medio indefinido homogéneo creado por un circuito donde pasa corriente eléctrica es

$$\vec{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \wedge \hat{u}_r}{r^2} . \tag{9.5}$$

La variación del campo magnético debida a la presencia del medio es

$$B - B_0 = \kappa_m B_0 - B_0 = (\kappa_m - 1)B_0 = \chi_m B_0 .$$

Definiendo así una nueva cantidad, *la susceptibilidad magnética*

$$\chi_m = \kappa_m - 1 , \quad \kappa_m = 1 + \chi_m , \tag{9.6}$$

por lo tanto, el campo magnético en un medio se puede escribir

$$B = \kappa_m B_0 = (1 + \chi_m)B_0 = B_0 + \chi_m B_0 = \mu_0 n i + \mu_0 \chi_m n i$$

y podemos darle la interpretación siguiente: el primer termino es el campo magnético producido por un solenoide indefinido en el vacío mientras que el segundo es idéntico a aquello que sería producido por un solenoide donde pasa corriente con densidad $\chi_m n i$.

Como veremos esta interpretación no es ficticia: en la superficie del medio magnetizado existe una corriente real, la cual no es una corriente de conducción sino que una corriente de origen atómica. Estas corrientes se llaman corrientes *amperianas*, en honor a Ampère que por primero intuyó la existencia.

Es clara la analogía con los fenómenos estudiados en el capítulo 5: la permeabilidad magnética juega el mismo rol que la constante dielectrica y las corrientes amperianas aquello de las cargas de polarización. Es importante evidenciar que la variedad de los fenómenos magnético es mayor, como veremos en los siguientes párrafos.

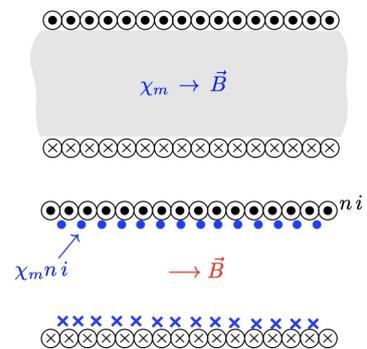


Figure 9.3: Corrientes amperianas en un material.

Materiales diamagnéticos

Desde la medida del \vec{B} en el solenoide por un material diamagnético se obtiene que la permeabilidad magnética relativa es constante al variar del campo magnético y es menor que 1:

$$\kappa_m < 1 \implies \chi_m < 0. \quad (9.7)$$

Porque B es menor que B_0 las corrientes amperianas tienen que dar una contribución opuesta a B_0 , circulando en el sentido opuesto con respecto a aquella de conducción; esto es coherente con el hecho que el momento magnético es opuesto a \vec{B}_0 , si admitimos que \vec{m} llegue de las corrientes amperianas. En la tabla 9.2 se reportan algunos valores numéricos; es importante notar que χ_m depende de la densidad de material, en el sentido que es mucho mayor en los gases que en los líquidos y en los sólidos.

Susceptibilidad de materiales diamagnéticos			
plata	$-2.39 \cdot 10^{-5}$	agua	$-0.90 \cdot 10^{-5}$
oro	$-3.46 \cdot 10^{-5}$	mercurio	$-0.90 \cdot 10^{-5}$
plomo	$-1.58 \cdot 10^{-5}$	argon	$-1.10 \cdot 10^{-8}$
cobre	$-0.98 \cdot 10^{-5}$	nitrógeno	$-1.35 \cdot 10^{-8}$
silicio	$-0.42 \cdot 10^{-5}$	hidrógeno	$-0.45 \cdot 10^{-8}$

Table 9.1: Susceptibilidad de materiales diamagnéticos

Materiales paramagnéticos

Para estos materiales la permeabilidad magnética relativa es constante al variar del campo magnético y es mayor que 1:

$$\kappa_m > 1 \implies \chi_m > 0; \quad (9.8)$$

las corrientes amperianas tienen el mismo sentido de las corrientes de conducción y los efectos magnéticos se suman. En estos casos los efectos son pequeños, los valores de χ_m están entre 10^{-4} y 10^{-5} a temperatura ambiente. En la tabla 9.2 se reportan algunos valores numéricos para χ_m .

Es importante la dependencia de la temperatura la cual obedece a la ley, llamada *primera ley de Curie*

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T},$$

donde ρ es la densidad, T es la temperatura expresada en Kelvin y C es una constante. Solamente algunos metales paramagnéticos no siguen la anterior y poseen una susceptibilidad prácticamente constante.

Materiales ferromagnéticos

La permeabilidad de un material ferromagnético puede tomar valores muy altos $10^3 - 10^5$ y depende del valor del campo magnético externo y de la manera con la cual se llegó a tal valor; κ_m y χ_m no son funciones unívocas de B . Las corrientes amperianas tienen el mismo sentido de aquellas de conducción y sus contribuciones al campo magnético son muy altas. También para los materiales ferromagnéticos existe una dependencia de la temperatura en el sentido que más allá de una determinada temperatura el comportamiento se parece al paramagnetismo.

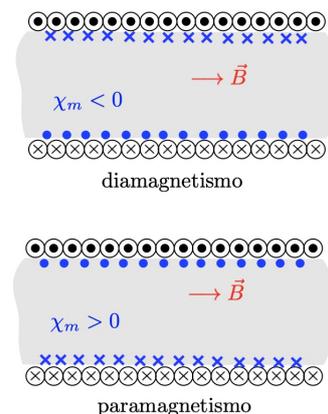


Figure 9.4: Corrientes amperianas en materiales.

Susceptibilidad de materiales paramagneticos			
aluminio	$2.08 \cdot 10^{-5}$	titanio	$18.22 \cdot 10^{-5}$
calcio	$1.94 \cdot 10^{-5}$	tungsteno	$7.92 \cdot 10^{-5}$
magnesio	$1.17 \cdot 10^{-5}$	uranio	$40.92 \cdot 10^{-5}$
platino	$27.91 \cdot 10^{-5}$	oxigeno	$387.4 \cdot 10^{-8}$
sodio	$0.85 \cdot 10^{-5}$		

Table 9.2: Susceptibilidad de materiales paramagneticos

9.3 Corrientes amperianas

En el párrafo anterior hemos introducido la susceptibilidad magnética como cantidad macroscópica que permite de estimar el proceso de magnetización de un material. De otro lado, hemos también hipotetizado que la magnetización fuese debida a corrientes atómicas. Trataremos de manera exhaustiva este argumento en las secciones siguientes. Por el momento decimos simplemente que el movimiento de los electrones alrededor del núcleo puede ser considerado como corriente microscópica, al cual está asociado un momento magnético. En la mayor parte de los casos estos momentos magnéticos se compensan y en general el material no tiene magnetización, cuando actúa un campo magnético externos el movimiento de los electrones está perturbado y se origina un momento magnético que es opuesto al campo magnético externo: esto es el mecanismo del diamagnetismo. La situación se parece al mecanismo de polarización de un material dielectrico bajo el acción de un campo eléctrico externo: y como para el dielectrico el efecto se opone al campo que lo ha generado, disminuyendo el campo magnético efectivo en el medio.

En algunos materiales existen condiciones de asimetría donde las moléculas pueden tener momento magnético intrínseco, debido a la agitación térmica el momento magnético total es cero, pero bajo la acción de un campo magnético externo se crea una orientación parcial y se origina un momento magnético paralelo y concorde al campo externo, el cual supera el efecto diamagnetico. Esto es lo que ocurre en los materiales paramagneticos y es evidente el paralelismo con la polarización de los dielectricos. La diferencia es que mientras el campo de dipolo eléctrico en el interior del medio se opone a \vec{E} , el campo magnético y la corrientes elementales que generan los momentos magnéticos son concordes a \vec{B} . Pero, aparte del signo, se puede efectuar el mismo análisis matemático.

Tanto para el diamagnetismo que para el paramagnetismo se puede entender clásicamente el origen de los fenómenos, mientras que las previsiones numéricas no son precisas ya que la explicación correcta se llega utilizando la mecánica cuántica. En el ferromagnetismo el fenómeno es más complejo y no existe una explicación clásica; también aquí existen momentos magnéticos intrínsecos que se orientan paralelamente con el campo magnético externo, la diferencia es que es suficiente un campo relativamente débil para que los efectos sean muy grandes.

Sin profundizar la discusión decimos que los átomos o las moléculas en los materiales adquieren un momento magnético medio $\langle \vec{m} \rangle$ bajo la acción del campo \vec{B} , orientado paralelamente a \vec{B} . Consideramos un volumen $\Delta\tau$ alrededor de un punto P , donde están contenidos ΔN_τ átomos (o moléculas), el momento magnético es

$$\Delta \vec{m} = \Delta N_\tau \langle \vec{m} \rangle$$

y el momento magnético por unidad de volumen, o sea la magnetización es

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta \tau} = \frac{\Delta N_\tau}{\Delta \tau} \langle \vec{m} \rangle = n \vec{m} \quad (9.9)$$

donde n es el numero de átomos (o moléculas) por unidad de volumen en P . Para $\Delta\tau \rightarrow 0$ se define

la magnetización \vec{M} en función de la posición. Se habla de magnetización uniforme cuando \vec{M} es constante en el medio.

Supongamos de tener un cilindro magnétizado uniformemente con magnetización paralela al eje z y aislamos un disco de grosor dz . Dividimos el disco en prismas de base $d\Sigma$, altura dz y volumen $d\tau = d\Sigma dz$. Cada uno de los prismas tiene un momento magnético orientado como \vec{M} , como en figura 9.5,

$$d\vec{m} = \vec{M}d\tau = M d\Sigma dz \hat{u}_z.$$

Según el principio de equivalencia de Ampère el mismo momento magnético lo tiene una espira de área $d\Sigma$ y altura dz donde pasa corriente di_m , tal que

$$d\vec{m} = di_m d\Sigma \hat{u}_z = M d\Sigma dz \hat{u}_z \implies di_m = M dz. \quad (9.10)$$

Como sabemos, la equivalencia es válida también por el campo magnético producido.

Substituyamos cada prisma de material magnetizado con el circuito equivalente donde pasa di_m . Si \vec{M} es constante las corrientes se eliden a dos a dos en los lados en común y quedan solamente las corrientes sobre la superficie del cilindro. El disco de material magnetizado uniformemente es equivalente a un circuito donde pasa corriente dada por ecuación (9.10). Procediendo en la misma manera para todos los discos de altura dz los cuales forman el cilindro con altura h , concluimos que este equivale a una banda de altura h donde pasa corriente

$$i_m = \int_0^h M dz = M h \quad (9.11)$$

o sea corriente con densidad lineal

$$M = \frac{i_m}{h} = \frac{di_m}{dz} = \vec{j}_{s,m}.$$

Vectorialmente el enlace entre la densidad lineal de corrientes amperianas y la magnetización se escribe, considerando la regla de la mano derecha:

$$\vec{j}_{s,m} = \vec{M} \wedge \hat{u}_n \quad (9.12)$$

donde \hat{u}_n es el versor normal al eje del cilindro y orientado hacia el exterior.

Otra forma de escribir la relación entre magnetización y las corrientes amperianas se obtiene calculando la circulación de \vec{M} en un camino cerrado genérico que contenga i_m , véase figura (9.7). Porque fuera del cilindro $M = 0$ y que en el cilindro vale la ecuación (9.11), se tiene:

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{s} = i_m. \quad (9.13)$$

En el caso más general \vec{M} puede no ser uniforme en el material. Entonces por dos prismas contiguos en el eje x tenemos dos componentes M_z y M'_z distintas, que llegan de dos corrientes $di_1 = M_z dz$ y

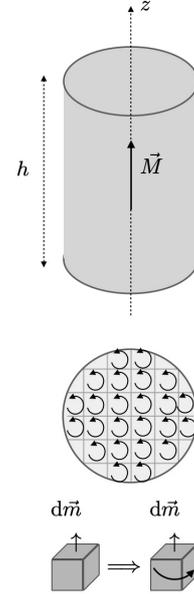


Figure 9.5: Magnetización.

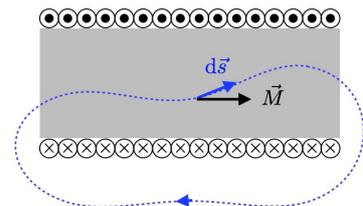


Figure 9.6: Magnetización.

$di_2 = M'_z dz$, por lo tanto la corriente efectiva en el eje y, o sea en la cara en común, es

$$di_1 - di_2 = (M_z - M'_z) dz = -\frac{\partial M_z}{\partial x} dx dz.$$

Repitiendo el argumento para dos prismas contiguos en el eje z y para la componente M_x de la magnetización, notamos que en el eje y hay corriente

$$di_4 - di_3 = (M'_x - M_x) dx = \frac{\partial M_x}{\partial z} dx dz.$$

y en todo el eje y tenemos

$$di_y = di_4 - di_3 + di_1 - di_2 = \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) dx dz.$$

El elemento de área $d\Sigma_y = dx dz$ es ortogonal al eje y y por lo tanto la componente en la dirección y de la densidad de corriente es

$$j_y = \frac{di_y}{dx dz} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = (\nabla \wedge \vec{M})_y. \quad (9.14)$$

Completando el razonamiento para todos los ejes

$$\vec{j}_m = \nabla \wedge \vec{M} \quad (9.15)$$

Hay que hacer atención que \vec{j}_m es una densidad de corriente, definida en un volumen y medida en A/m^2 , mientras que $\vec{j}_{s,m}$ es una densidad lineal de corriente definida sobre una superficie y medida en A/m .

Las ecuaciones (9.12) y (9.15) establecen en el caso general la relación entre el vector magnetización y las corrientes amperianas que son el aspecto macroscopico de las corrientes atómicas originadas en el medio debido a la presencia del campo magnético externo. Deducimos que los efectos magnéticos de un medio magnetizado se pueden calcular desde una distribución superficial de corriente con densidad lineal $\vec{j}_{s,m}$ y por una distribución espacial de corriente con densidad \vec{j}_m . En particular es así que se puede determinar en el interior de un medio magnetizado el campo magnético debido al medio mismo, entendido como *campo macroscopico medio*.

Veremos más adelante una situación formal de las ecuaciones (9.12) y (9.15). Por el momento notamos la analogía con la situación de un dielectrico polarizado donde el efecto del medio se calcula desde una distribución de carga de polarización σ_p y de una distribución de volumen con densidad ρ_p , conectadas al vector de polarización:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{u}_n, \quad \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}. \quad (9.16)$$

9.4 El campo H

Las ecuaciones generales de la magnetostática en el vacío tienen que ser modificadas cuando tenemos medio magnetizados. Sigue invariata la propiedad de \vec{B} de ser solenoidal mientras que cambian las ecuaciones donde aparecen las fuentes, debido al hecho que ahora tenemos corrientes amperianas. Por lo tanto tenemos que escribir en forma integral

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + i_m) = \mu_0 i + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{s} \quad (9.17)$$

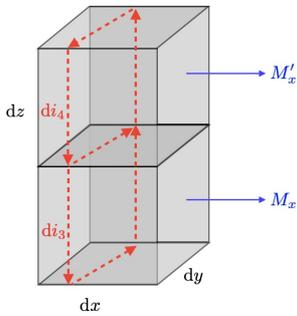
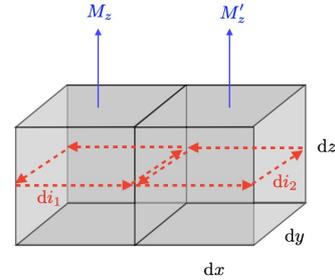


Figure 9.7: Magnetización dos prismas infinitesimales.

y en forma diferencial

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \nabla \wedge \vec{M}, \quad (9.18)$$

La anteriores se pueden escribir como

$$\oint (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 i, \quad \nabla \wedge (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}.$$

Si ahora introducimos el nuevo *campo vectorial* \vec{H} a través de la definición

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \quad \text{o sea} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (9.19)$$

notamos que éste satisface las relaciones

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i, \quad \nabla \wedge \vec{H} = \vec{j}. \quad (9.20)$$

La primera de la ecuación (9.20) es la *ley de Ampère por el campo* \vec{H} :

Definición 9.4.1 la circulación de \vec{H} extendida a una línea cerrada cualquiera es igual a la suma de las corrientes de conducción concatenadas por la línea.

En términos locales el rotor de \vec{H} es igual a la densidad de corriente de conducción.

Podemos ahora escribir las *ecuaciones de la magnetostática* en general utilizando los dos campos \vec{B} y \vec{H} :

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i, \quad \nabla \wedge \vec{H} = \vec{j}.$$

En estas ecuaciones han desaparecido las corrientes amperianas, pero para resolverlas necesitamos la información sobre \vec{M} . De hecho \vec{B} y \vec{H} están relacionados por la definición (9.19), por lo tanto necesitamos la ecuación de estado del medio magnetizado, o sea una relación explícita entre \vec{B} y \vec{H}

Por razones que comentaremos brevemente se prefiere poner en evidencia la relación entre \vec{M} y \vec{H} , tomando como relación característica del medio magnetizado la

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (9.21)$$

Como inmediata consecuencia tenemos

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \kappa_m \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (9.22)$$

y juntando las ecuaciones (9.21) y (9.22),

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu} \chi_m \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{\kappa_m} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\kappa_m - 1}{\kappa_m} \vec{B}. \quad (9.23)$$

Tenemos que especificar algo sobre los pasos que hemos seguido. Desde un punto de vista general la ecuación (9.20) no define completamente el vector \vec{H} , esto fija solamente la propiedad de su circulación. Pero en muchos casos interesantes, que veremos más adelante, las condiciones de simetría permiten obtener \vec{H} directamente a partir de la ecuación (9.20) sin preocuparse del medio

magnetizado. Esta es una circunstancia importante: conociendo las corrientes de conducción, las cuales son bajo nuestro control, podemos conocer \vec{H} y por lo tanto somos capaces de valorar el efecto sobre el medio a través de la ecuación (9.21) y de calcular el campo magnético total (o sea creado por todas las corrientes) a través de la ecuación (9.22). Podemos decir que \vec{H} juega el papel de variable independiente a la cual asociamos los efectos magnéticos sobre los medios.

El significado físico de la ecuación (9.20) se basa sobre la asunción que los momentos magnéticos en el medio magnetizado sean siempre proporcionales al campo que los genera y de hecho en la mayoría de los casos las relaciones (9.21) y (9.22) son relaciones lineales reales, con χ_m y κ_m constantes. No es así en los medio ferromagneticos, donde χ_m es una función no unívoca de \vec{H} y no se puede hablar de ecuación de estado en términos simple como la ecuación (9.21); la relación entre \vec{M} y \vec{H} o entre \vec{B} y \vec{H} se expresa a través del ciclo de histéresis (como veremos más adelante).

material	χ_m	κ_m	χ_m, κ_m	\vec{M} y \vec{H}	B y B_0
diamagnetico	< 0	< 1	constantes	\vec{M} opuesto a \vec{H}	$B < B_0$
paramagnetico	> 0	> 1	constantes	\vec{M} concorde a \vec{H}	$B > B_0$
ferromagnetico	$\gg 0$	$\gg 1$	funciones de H	\vec{M} depende de \vec{H}	$B \gg B_0$

Table 9.3: Resumen de las propiedades de los materiales magnéticos.

Unidades 9.4.1 La magnetización, definida como momento magnético por unidad de volumen, resulta también igual a una densidad lineal de corriente; consecutivamente su unidad de medida es A/m. La misma unidad es válida para el campo \vec{H} , llamado algunas veces *campo de magnetización*: de hecho vale la ecuación (9.21) y sabemos que la susceptibilidad magnética y la permeabilidad magnética son adimensionales. Acordamos que la permeabilidad magnética absoluta se mide en H/m (henry sobre metro)

Ejercicio 9.1 Un solenoide toroidal está relleno por un material que tiene permeabilidad magnética relativa κ_m . Calcular los campos \vec{B} y \vec{H} .

Solución. La simetría del problema sugiere que las líneas del campo magnético en el interior del solenoide sean circunferencias con centro en el eje del toroide y que el módulo del campo \vec{B} dependa solamente de la distancia r del eje. Si aplicamos la circulación del campo \vec{H} a una circunferencia de radio r tenemos

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 2\pi r H = Ni \implies \vec{H} = \frac{Ni}{2\pi r} \hat{u}_\phi. \quad (9.24)$$

Desde la última y desde la ecuación (9.22)

$$\vec{B} = \mu_0 \kappa_m \vec{H} = \frac{\mu_0 \kappa_m Ni}{2\pi r} \hat{u}_\phi. \quad (9.25)$$

El campo \vec{H} no depende del medio material, el campo magnético en vez sí. ■

Ejercicio 9.2 En el interior de un solenoide indefinido de radio R está puesto un material de forma cilíndrica de radio $r < R$, coaxial con el solenoide y con permeabilidad magnética relativa κ_m . Calcular los valores de \vec{H} , \vec{B} , \vec{M} y la densidad de corriente amperiana.

Solución. Todos los campos, por razones de simetría, son paralelos al eje del sistema. El campo \vec{H} se calcula utilizando la ecuación (9.20): primero, en un recorrido rectangular que concatena la corriente nih y luego con un segundo recorrido que no concatena las corrientes de conducción (n es el número de espiras por unidad de longitud). En los dos casos

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_1 h = nih \implies H_1 = ni$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_1 h - H_2 h = 0 \implies H_1 = H_2.$$

Por lo tanto, el campo \vec{H} tiene el mismo valor

$$\vec{H} = ni \hat{u}_z$$

en la zona vacía del solenoide y en el cilindro magnetizado. El campo \vec{B} es, en vez, distinto:

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 ni \hat{u}_z,$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \kappa_m ni \hat{u}_z = \kappa_m \vec{B}_1,$$

La magnetización es distinta que cero sólo en el cilindro y es

$$\vec{M} = \chi_m = \vec{H} = \chi_m ni \hat{u}_z,$$

la cual es uniforme y por lo tanto $\nabla \times \vec{M} = 0$ y $\vec{j}_m = 0$; no hay corrientes amperianas de volumen, sino que sólo de superficies

$$\vec{j}_{s,m} = \vec{M} \times \hat{u}_n = \chi_m ni \hat{u}_z \times \hat{u}_n \quad j_{s,m} = \chi_m ni.$$

Tiene la misma dirección que la corriente de conducción, contribuyendo a un aumento del campo magnético en el material si χ_m es positivo, mientras que tiene el sentido contrario si χ_m es negativo, disminuyendo el campo magnético en el material. Un método sencillo para magnetizar uniformemente un cilindro finito de hierro es colocarlo en el centro de un solenoide bastante largo. Si por ejemplo $ni = 10^3$ A/m consideramos estas tres posibilidades:

$$\chi_m = 10^{-4} \quad M = 0.1 \text{ A/m} \quad B_2 = 1.0001 B_1$$

$$\chi_m = -10^{-4} \quad M = 0.1 \text{ A/m} \quad B_2 = 0.9999 B_1$$

$$\chi_m = 10^2 \quad M = 10^5 \text{ A/m} \quad B_2 = 101 B_1$$

Se nota que el efecto es considerable en los materiales ferromagnéticos. ■

9.5 Discontinuidades en medio magnetizados

Hemos ya estudiado que el campo magnético es discontinuo si cruza una superficie donde son presentes corrientes de conducciones. Tenemos que esperar un efecto similar en el pasaje a través la superficie de separación entre dos medios magnetizados distintos: de hecho sobre las superficies están localizadas las corrientes amperianas, en general distintas entre ellas y por lo tanto la suma es distinta que cero.

Llamemos \vec{H}_1 y $\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1$ los campos en el primer medio y \hat{u}_n el versor de la normal a la superficie de separación en un punto P , los vectores \vec{H}_1 , \vec{B}_1 y \hat{u}_n forman un plano donde está también \vec{M}_1 . La densidad lineal de corriente amperiana $\vec{j}_{s,m}$ es ortogonal a este plano y la discontinuidad, debido a esta, es ortogonal a $\vec{j}_{s,m}$, como sabemos desde el capítulo anterior, y por lo tanto está en dicho plano: por lo tanto \vec{B}_1 , también si es discontinuo, sigue en el mismo plano.

Admitamos que \vec{H}_1 , \vec{B}_1 y \vec{H}_2 , \vec{B}_2 estén todos en el mismo plano que contiene la normal a la superficie de separación en el punto P . La aplicación de la ley de Gauss del campo \vec{B} a una caja cilíndrica infinitesimal con las bases en los dos medios y paralelas a las superficies, lleva a la relación

$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad \text{o sea} \quad B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2, \quad (9.26)$$

llamando θ_1 y θ_2 los ángulos que \vec{B}_1 y \vec{B}_2 forman con la normal. El campo magnético tiene la misma componente normal en los dos materiales (como es obvio ya que la discontinuidad del campo magnético puede ser sólo tangencial). Desde la $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ sigue

$$\kappa_{1,m} H_{1,n} = \kappa_{2,m} H_{2,n} : \quad (9.27)$$

la componente normal del campo \vec{H} es discontinua.

Apliquemos ahora la ley de Ampère a un rectángulo que está en el plano creado por los campos, con dos lados paralelos a las superficies de separación y los otros dos infinitesimales; se encuentra

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{t,1}h - H_{t,2}h = 0$$

porque no hay corrientes de conducción concatenadas y por lo tanto

$$H_{t,1} = H_{t,2} \quad \text{o sea} \quad H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2. \quad (9.28)$$

Los ángulos son los mismos considerados anteriormente. Por lo tanto podemos decir que la componente tangencial de \vec{H} es continua, mientras que aquella de \vec{B} es discontinua según la relación

$$\frac{\vec{B}_{1,t}}{\kappa_{1,m}} = \frac{\vec{B}_{2,t}}{\kappa_{2,m}}. \quad (9.29)$$

Combinando las relaciones, se encuentra

$$\frac{B_2}{B_1} = \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\kappa_{2,m}}{\kappa_{1,m}}\right)^2 \sin^2 \theta_1},$$

$$\frac{H_2}{H_1} = \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \left(\frac{\kappa_{1,m}}{\kappa_{2,m}}\right)^2 \cos^2 \theta_1}.$$

Finalmente, haciendo la razón entre las ecuaciones (9.26) y (9.28), obtenemos

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\kappa_{1,m}}{\kappa_{2,m}}, \quad (9.30)$$

llamada *ley de refracción de las líneas de campo magnético* en el cruce de un medio a otro; si $\kappa_{2,m} > \kappa_{1,m}$ entonces $\theta_2 > \theta_1$: las líneas se alejan de la normal.

La desviación es notable cuando se pasa del vacío a un medio ferromagnético con $\kappa_{2,m}/\kappa_{1,m} \sim 10^2 - 10^4$: θ_2 es casi igual a 90° y \vec{B}_2 es casi paralelo a la superficie de separación, creando lo que se llama *escudo magnético*.

Los resultados sobre las discontinuidades de los campos \vec{B} y \vec{H} permite de establecer una definición operativa del campo \vec{B} macroscópico y del campo \vec{H} macroscópico en el interior de una cavidad. Si practicamos una cavidad plana ortogonal a las líneas de \vec{B} , desde la ecuación (9.26) sabemos que \vec{B} tiene el mismo valor en el medio y también en la cavidad y por lo tanto es suficiente medir \vec{B} en esta cavidad para conocer el valor en el medio. Si se practica una cavidad sutil paralela a las líneas de fuerzas de \vec{B} , es \vec{H} según la ecuación (9.28) a tener el mismo valor en el medio y en la cavidad: por lo tanto es suficiente medir \vec{B} en la cavidad y dividirla por μ_0 para tener el valor \vec{H} en la cavidad y en el medio.

Ejercicio 9.3 Calcular el campo magnético \vec{B} dentro de un cilindro uniformemente magnetizado y utilizar el resultado para determinar el campo magnético dentro de una cavidad cilíndrica paralela a las líneas de \vec{B} en un medio indefinido uniformemente magnetizado.

Solución. Utilicemos el cálculo realizado en el párrafo 8.2 para un solenoide recto de longitud de radio R . El campo B en un punto del eje viene dado por la ecuación (8.20) en el que ahora sustituimos M en lugar de ni :

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{\vec{M}}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi_2).$$

En particular, en el centro $\phi_1 = \phi_2' = \phi_0$ y

$$\vec{B}_O = \mu_0 \vec{M} \cos \phi_0;$$

en el centro de una cara terminal del cilindro, donde $\phi_2' = \pi/2$

$$\vec{B}_{O'} = \mu_0 \frac{\vec{M}}{2} \cos \phi_1. \quad (9.31)$$

Si $R/d \ll 1$, podemos aproximar los cosenos con las expresiones

$$\begin{aligned} \cos \phi_0 &= 1 - \frac{1}{2} \phi_0^2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{d/2} \right)^2 = 1 - 2 \frac{R^2}{d^2}, \\ \cos \phi_1 &= 1 - \frac{1}{2} \phi_1^2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{d} \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{d^2}, \end{aligned}$$

Los valores del campo magnético en los puntos O y O' son

$$\vec{B}_O = \mu_0 \vec{M} \left(1 - 2 \frac{R^2}{d^2} \right), \quad \vec{B}_{O'} = \mu_0 \frac{\vec{M}}{2} \left(1 - \frac{R^2}{d^2} \right). \quad (9.32)$$

Si $R^2/d^2 \simeq 0$, como en un imán muy largo,

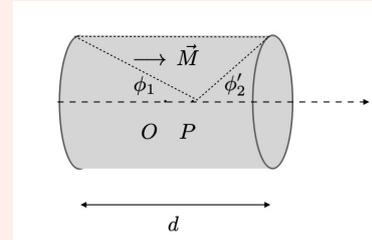
$$\vec{B}_O = \mu_0 \vec{M}, \quad \vec{B}_{O'} = \mu_0 \frac{\vec{M}}{2}.$$

Observamos que la presencia de los polos, que obviamente siempre están presentes en un imán real de longitud finita, provoca una disminución del campo, es decir, tiene un efecto *desmagnetizador*. Tomemos ahora un medio indefinido uniformemente magnetizado en el que hacemos una larga y delgada cavidad cilíndrica con la forma del imán que acabamos de considerar. De acuerdo con el principio de superposición, el campo \vec{B} en el medio es igual al campo \vec{B}_c en la cavidad más el campo \vec{B}_O del material cilíndrico:

$$\vec{B} = \vec{B}_c + \vec{B}_O \implies \vec{B}_c = \vec{B} - \vec{B}_O,$$

o sea

$$\vec{B}_c = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) - \mu_0 \vec{M} \left(1 - 2 \frac{R^2}{d^2} \right) = \mu_0 \left(\vec{H} + 2 \frac{R^2}{d^2} \vec{M} \right) = \mu_0 \left(1 + 2 \chi_m \frac{R^2}{d^2} \right) \vec{H}.$$



Cuando el segundo término en paréntesis, debido a la presencia de las bases de radio R , es despreciable, $\vec{B}_c = \mu_0 \vec{H}$ y se justifica la definición operativa de \vec{H} en el medio. Cuantitativamente tiene que ser

$$2\chi_m \frac{R^2}{d^2} \ll 1 \implies \frac{R^2}{d^2} \ll \frac{1}{2\chi_m} \quad (9.33)$$

De otro lado, las aproximaciones que llevan a las (9.32) son válidas para pequeños ángulos; por ejemplo, con $\phi_0 3^\circ$ resulta $R/d = 2.5 \cdot 10^{-2}$ y $R/d = 6.3 \cdot 10^{-4}$. Valores de este orden de magnitud satisfacen siempre la desigualdad para los materiales diamagnéticos y paramagnéticos, donde $|\chi_m| \ll 1$. En un medio ferromagnético, aunque admitiendo que se pueden usar las mismas fórmulas, los valores de χ_m son tan grandes que obliga a tener ángulos muy pequeños: con $\chi_m \sim 10^3$ necesitaríamos un $\phi_0 \sim 1^\circ$ para tener una desigualdad igual a $R^2/d^2 < 10^{-4}$, por lo tanto la cavidad tiene que ser muy sutil. ■

9.6 Comparación electrostática y magnetostática

Hemos ya notado analogías entre dieléctricos polarizados y materiales magnetizados. La razón es que, también si los fenómenos físicos son distintos, las ecuaciones que describen los fenómenos tienen la misma estructura y por lo tanto las soluciones son matemáticamente iguales. Para efectuar la comparación vamos a escribir las ecuaciones para la electrostática y la magnetostática en medios indefinidos y en ausencia de cargas libres ($\rho = 0$) y de corrientes de conducción ($\vec{j} = 0$):

$$\begin{array}{ll} \nabla \wedge \vec{E} = 0 & \nabla \wedge \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} & \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M}. \end{array}$$

Estas relaciones ponen en evidencia las correspondencias formales

$$\vec{E} \iff \vec{H}, \quad \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} \iff \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \iff \vec{M}. \quad (9.34)$$

Una verificación inmediata la podemos hacer resumiendo los resultados sobre las discontinuidades

$$\text{Componentes tangenciales continuas} \quad E_{1,t} = E_{2,t} \quad \text{y} \quad H_{1,t} = H_{2,t}$$

$$\text{componentes normales discontinuas} \quad \kappa_1 E_{1,n} = \kappa_2 E_{2,n} \quad \text{y} \quad \kappa_{1,m} H_{1,n} = \kappa_{2,m} H_{2,n}$$

$$\text{components normales continuas} \quad D_{1,n} = D_{2,n} \quad \text{y} \quad B_{1,n} = B_{2,n}$$

$$\text{componentes tangenciales discontinuas} \quad \frac{D_{1,t}}{\kappa_1} = \frac{D_{2,t}}{\kappa_2} \quad \text{y} \quad \frac{B_{1,t}}{\kappa_{1,m}} = \frac{B_{2,t}}{\kappa_{2,m}}$$

9.7 Materiales ferromagnéticos

Hemos ya hablado del hecho que las propiedades de los materiales ferromagnéticos son muy distintas de aquellas de los otros materiales y más complejas de tratar, también desde un punto de vista fenomenológico, porque las relaciones que unen \vec{B} y \vec{M} con el campo \vec{H} no son ni lineales ni tampoco unívocas. De otro lado es en los materiales ferromagnéticos que los efectos son altos y tienen interés tecnológicos, por lo tanto el estudio de estos materiales no sólo tiene un interés conceptual sino que es muy útil en términos prácticos.

Hemos dicho que en la naturaleza existen materiales como la magnetite $\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ (o, su fórmula química $\text{Fe}^{2+}\text{Fe}_2^{3+}\text{O}_4$), los cuales, bajo la acción de un campo magnético, se transforman en fuentes de campos magnéticos permanentes. Experimentando con campos magnéticos conocidos se observa que la magnetización es elevada también con campos, y por lo tanto con corrientes de conducción, no particularmente elevados, además estos efectos, que a temperatura ambiente están presentes en los elementos como hierro, níquel y cobalto, se obtienen también con aleaciones donde está presente por lo menos uno de estos elementos.

Las propiedades magnéticas de las aleaciones varían notablemente con la composición química y dependen también de como se han preparado, por lo tanto es indispensable un trabajo preciso para evitar efectos indeseados.

En fin, por algunos materiales con alta permeabilidad magnética ($\sim 10^4$) las propiedades magnéticas pueden cambiar radicalmente bajo sollicitaciones mecánicas. Todos estos factores inducen a pensar que los fenómenos atómicos que están a la base de ferromagnetismo dependen fuertemente de la estructura cristalina y de sus modificaciones causadas por agentes térmicos y mecánicos.

Para encontrar las relaciones entre \vec{B} y \vec{H} utilizamos un solenoide toroidal. El campo \vec{H} viene variado cambiando la intensidad de corriente en las espiras y el campo \vec{B} en el medio viene medido con sonda de Hall en una cavidad ortogonal a las líneas de campo. Por cada valor de H se mide B y se obtiene el valor de la magnetización $M = B/\mu_0 - H$. Este experimento proporciona directamente la función $B(H)$ e indirectamente $M(H)$.

Supongamos que inicialmente el material se encuentra en un *estado virgen*, o sea no ha sido nunca puesto a una magnetización, y que sean nulos todos los campos. Dejando aumentar H los valores de B y de M se disponen a lo largo de una curva a , llamada *curva de primera magnetización*; cuando H supera el valor límite H_m la magnetización se queda constante al valor M_{sat} y el campo magnético crece linealmente con H , más lentamente que antes. De hecho, por $M = M_{sat} = \text{constante}$ la ecuación (9.19) $B = \mu_0(H + M_{sat})$ es una línea recta con pendiente μ_0 , o sea muy pequeña. Se dice que por $H > H_m$ el material llegó a la saturación y el valor M_{sat} se llama *magnetización de saturación*: más allá de H_m el campo \vec{B} crece sólo por efecto del aumento de la corriente de conducción, porque la contribución del medio ha llegado a su valor máximo posible.

Porque la curva a no es una recta, las cantidades

$$\mu = \frac{B}{H}, \quad \kappa_m = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \chi_m = \kappa_m - 1$$

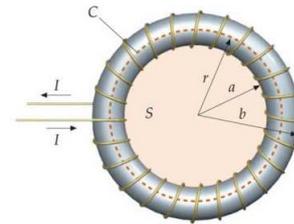


Figure 9.8: Toroide solenooidal.

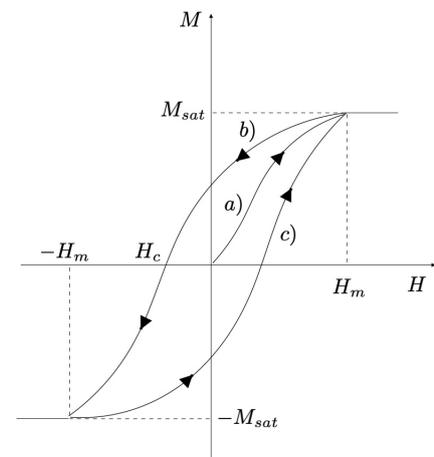


Figure 9.9: Ciclo de histéresis.

no son constantes, sino que funciones de H . Se define también permeabilidad diferencial

$$\mu_d = \frac{dB}{dH}, \quad \text{o} \quad \kappa_{m,d} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH};$$

la primera coincide con la pendiente de la curva (localmente). Tenemos un aumento del valor inicial no nulo por $H = 0$ hasta un máximo en correspondencia de un punto de inflexión y luego una disminución hasta el valor μ_0 (ó 1).

Si después de haber llegado al valor H_m dejemos decrecer H , los valores de B y de M se colocan a lo largo de una curva b la cual se mantiene más alta de la curva de primera magnetización e interseca el eje de las ordenadas ($H = 0$) con el valor B_r o M_r , conectados a través de $B_r = \mu_0 M_r$: se habla de *magnetización residual* y de campo magnético residual, a expresar el hecho fundamental que el material está magnetizado también en ausencia de corriente; se transformó en *imán permanente*.

Para anular la magnetización necesitamos invertir el sentido de la corriente y disminuir H hasta llegar al valor H_c , llamado *campo coercitivo*, en correspondencia del cual $M = 0$ y $B = \mu_0 H_c$. Disminuyendo más aún H se observa que más allá del valor $-H_m$ la curva es lineal, como lo era para $H > H_m$, con la misma pendiente: el material ha llegado a la magnetización de saturación, pero con el sentido contrario.

Finalmente si se lleva H al valor H_m se circula en la curva c hasta unirse a la curva a . La curva completa cerrada se llama *ciclo de histéresis* del material. Si H varía entre $-H_m$ y H_m o mayor se obtiene siempre el mismo ciclo; si se reduce el intervalo se obtienen ciclos más pequeños con los vértices sobre la curva de primera magnetización. Siguiendo siempre con ciclos más pequeños se puede llevar el material a su estado virgen, este proceso se llama *desmagnetización*.

El ciclo de histéresis representa el diagrama de estado del material ferromagnético; pero en un estado (H, B) puede coincidir un punto del ciclo solamente si viene efectuado el procedimiento descrito. Si en un particular instante del proceso H se lleva a cero y luego se lleva a su valor, el nuevo estado (H, B) está en un punto interno al ciclo: operando de manera oportuna todos los puntos internos son obtenibles y el ciclo delimita una región donde todos los estados del sistemas son posibles. Por un valor de H pueden corresponder infinitos valores de B entre las curvas b y c , situación que se llega diciendo que la *magnetización de un material ferromagnético depende de la historia del material, aparte del valor H* .

La forma del ciclo depende fuertemente de la composición del material. Tomando como parámetros característicos los valores de la magnetización residual y del campo coercitivo, tenemos los *materiales duros*, por los cuales el ciclo de histéresis es largo: estos son ideales para construir imanes permanentes, porque M_r es grande y casi igual a M_{sat} y también porque es muy difícil desmagnetizarlos. La situación opuesta se refiere a *materiales blandos*, con un ciclo muy estrecho: porque H_c es pequeño, es fácil magnetizarlos y desmagnetizarlos; además la permeabilidad magnética es casi constante en un amplio rango de valores de H .

Otra propiedad fundamental de los materiales ferromagnéticos es que por cada uno de ellos existe una *temperatura crítica* T_c , llamada de Curie, por encima de la cual el material se comporta como paramagnético, con susceptibilidad que sigue la ley

$$\frac{\chi_m(T - T_c)}{\rho} = C = \text{constante}, \quad (9.35)$$

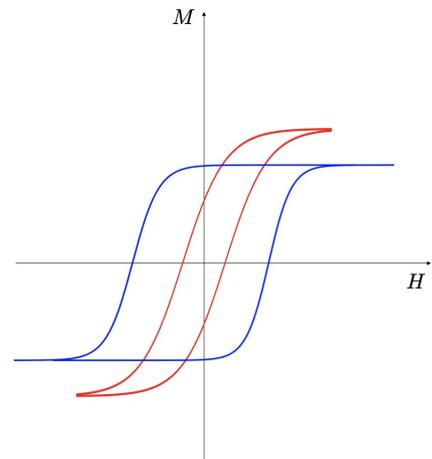


Figure 9.10: Ciclo de histéresis para materiales duros (azul) y blandos (rojo).

conocida como la *segunda ley de Curie*; ρ es la densidad del material y C una constante, llamada de Curie. La temperatura de Curie para el hierro es $T_c = 1043\text{K}=770^\circ\text{C}$.

	$\kappa_m(H=0)$	$\kappa_{m,d}(\text{max})$	$H_c(\text{A/m})$	$\mu_0 M_{\text{sat}}(\text{T})$
Hierro puro (99.95%)	10^4	$2 \cdot 10^5$	4	2.16
Hierro-silicio (0.5%)	280	$3 \cdot 10^3$	72	2.14
Hierro-silicio (6.5%)	1390	$6.7 \cdot 10^4$	16	1.81
Hierro-nichel (45%)	$3.5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	5.6	1.60
Hierro-nichel (65%)	$3 \cdot 10^4$	10^6	0.8	1.40
Hierro-nichel (78%)	$8 \cdot 10^3$	10^5	4.0	1.08

Table 9.4: Valores de H_c y M_{sat}

Los valores de H_m (por los cuales se llega a la saturación) son en general modestos, inferiores a 10^3 A/m y se nota en la tabla 9.7 que $\mu_0 M_{\text{sat}} \gg \mu_0 H_m$: la contribución del medio es predominante. Se nota además que no es conveniente operar más allá de H_m : un pequeño aumento de B necesita un enorme aumento de las corrientes de conducción, con un gasto en potencia; de hecho, raramente un material ferromagnético se utiliza más allá de la saturación.

La precaución en el uso de $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ para medios ferromagnéticos debería ser ahora más clara: el valor de la susceptibilidad χ_m depende del estado (H, B) en el que se encuentra el material, y por lo tanto no hay una simple proporcionalidad entre M y H . Formalmente, se puede mantener la escritura $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, pero con un valor diferente del coeficiente en cada estado: por ejemplo, en el solenoide toroidal mencionado anteriormente, si para un valor dado i de la corriente existe un valor de B , entonces al valor $2i$ no le corresponde un doble campo magnético, como ocurre en el vacío o en un medio magnético común, sino que hay que conocer el nuevo valor de χ_m para calcular B . Sólo en el caso de materiales con un ciclo de histéresis estrecho como el de la figura 9.10 (materiales blandos), se puede suponer que χ_m es constante en un determinado rango de H .

9.8 Circuitos magnéticos

El dispositivo con el cual hemos determinado el ciclo de histéresis (figura 9.8) es el ejemplo más simple de *circuito magnético*. La relación entre la corriente que pasa en las N espiras del solenoide, campo \vec{H} y campo \vec{B} son

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = Ni, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}; \quad (9.36)$$

μ es la permeabilidad magnética del toroide de material ferromagnético donde están enrolladas las espiras. Si μ es suficientemente alta las líneas de \vec{B} y \vec{H} son prácticamente todas en el medio y decimos que a través la superficie externa del toroide no hay flujo del campo magnético \vec{B} . Porque \vec{B} es solenoidal, sigue que el flujo de \vec{B} es constante a través cualquier sección del material

$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = B\Sigma = \text{constante}.$$

La expresión $B\Sigma$ es válida si se puede considerar B constante en la sección o si se toma el valor medio del campo \vec{B} en la sección. Consecuencia del confinamiento del campo magnético es que no es esencial enrollar las espiras en todo el material sino que es suficiente concentrarlas en una región limitada.

Juntemos ahora las relaciones escritas, suponiendo \vec{H} paralelo a $d\vec{s}$ y acordémonos que Φ es constante:

$$Ni = \oint H ds = \oint \frac{B}{\mu} ds = \Phi \oint \frac{ds}{\mu \Sigma}.$$

Si definimos *fuerza magnetomotriz* (f.m.m.) y *reluctancia del circuito* respectivamente las cantidades

$$\mathcal{F} = \oint H ds = Ni, \quad (9.37)$$

$$\mathcal{R} = \oint \frac{ds}{\mu \Sigma}, \quad (9.38)$$

obtenemos la *ley de Hopkinson*

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi, \quad (9.39)$$

la cual es la ley fundamental para el cálculo de los circuitos magnéticos. Su utilización se puede esquematizar en la siguiente manera: conocida la geometría del circuito y la permeabilidad magnética del medio, desde el valor de la corriente que circula en las espiras se obtiene el flujo y por lo tanto el valor (medio) del campo magnético en todo el circuito o, lo contrario, se puede calcular la corriente necesaria para producir un determinado campo magnético. Naturalmente el valor de la permeabilidad debería de ser aquello correspondiente al estado (H, B) del material, deducido por el ciclo de histéresis: pero en la ecuación (9.39) o H o B son desconocidos y la ley viene usada exactamente para calcular uno conociendo el otro. Por lo tanto esta relación se puede usar solamente para los materiales con ciclo de histéresis estrecho y limitando a la región donde la relación entre H y B es lineal; o, por cálculos aproximados, se puede usar un valor medio de μ .

Confrontemos lo obtenido con un circuito eléctrico donde pasa corriente:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} & \mathcal{F} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} & \vec{B} = \mu \vec{H} \\ i = \int \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma & \Phi = \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \\ R = \oint \frac{ds}{\sigma \Sigma} & \mathcal{R} = \oint \frac{ds}{\mu \Sigma} \\ \mathcal{E} = Ri & \mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi. \end{array}$$

Observamos que las expresiones son iguales si se cambian

$$E, H \quad j, B \quad \sigma, \mu \quad i, \Phi \quad R, \mathcal{R} \quad \mathcal{E}, \mathcal{F}.$$

La analogía es solamente formal: en un circuito eléctrico la corriente se corresponde a un movimiento de cargas, mientras que en un circuito magnético no existe ningún movimiento. La f.e.m. \mathcal{E} proporciona la energía necesaria para mantener el movimiento de cargas, la cual se disipa en la resistencia R ; mientras que \mathcal{F} y \mathcal{R} no corresponden a elementos físicos donde se absorbe o se disipa energía. Todavía la analogía es útil porque nos permite utilizar herramientas utilizadas para los circuitos eléctricos también a circuitos magnéticos.

Por ejemplo, si en el circuito magnético existe una interrupción en aire (llamada *entrehierro*), de longitud s_2 pequeña con respecto a la longitud s_1 del tramo de hierro y también con respecto a las dimensiones transversales del circuito, se puede omitir las deformaciones de la líneas de \vec{B} debido a la refracción y suponer que el circuito posee siempre la misma sección. La riluctancia total es la suma de las dos riluctancias en serie:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \frac{s_1}{\mu \Sigma} + \frac{s_2}{\mu_0 \Sigma} = \frac{s_1 + \kappa_m s_2}{\mu \Sigma},$$

y se nota que el pequeño tramo s_2 contribuye más a la riluctancia cuanto más grande sea κ_m . Se puede tener $\kappa_m s_2 > s_1$: el tramo a permeabilidad menor es el más importante, como en un circuito eléctrico el conductor a conductancia menor, o sea a resistencia mayor, es dominante en una conexión en serie.

Unidades 9.8.1 La fuerza magnetomotriz se mide en ampere mientras que la reluctancia \mathcal{R}/Φ se mide en $\text{A/Wb} = \text{H}^{-1}$.

Ejercicio 9.4 Una bobina de $N = 200$ espiras donde pasa corriente $i = 5 \text{ A}$ se enrolla en un anillo toroidal con $\kappa_m = 60$ de longitud media $L = 50 \text{ cm}$ y sección $\Sigma = 5 \text{ cm}^2$. Calcular el valor del campo magnético y repetir el cálculo si en el circuito hay un entrehierro de espesor $h = 5 \text{ mm}$.

Solución. Según las ecuaciones (9.37), (9.38) y (9.39) tenemos

$$\mathcal{F} = Ni = 10^3 \text{ A}, \quad \mathcal{R} = \frac{L}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = 1.33 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1}, \quad \Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = 7.54 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}.$$

El campo magnético vale $B = \Phi/\Sigma = 0.151 \text{ T}$. En presencia de un entrehierro, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' &= \frac{L-h}{\mu \Sigma} + \frac{h}{\mu_0 \Sigma} = \frac{L + (\kappa_m - 1)h}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = \mathcal{R} + \frac{(\kappa_m - 1)h}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = \\ &= 1.33 \cdot 10^7 + 0.78 \cdot 10^7 = 2.11 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1}, \end{aligned}$$

y el campo magnético es

$$\Phi' = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}'} = 4.74 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} \implies B' = \frac{\Phi'}{\Sigma} = 0.095 \text{ T}.$$

Se nota que 0.5 cm de aire sobre una longitud de 50 cm (efecto de 1% producen una reluctancia comparable a la del hierro y una reducción del campo magnético al 63% del valor sin entrehierro ($B' = 0.63B$). El campo magnético es el mismo en el hierro y en el aire, en vez el campo \vec{H} cambia

$$H_1 = \frac{B'}{\mu_0 \kappa_m} = 1.26 \cdot 10^3 \text{ A/m}, \quad H_2 = \frac{B'}{\mu_0} = \kappa_m H_1 = 7.56 \cdot 10^6 \text{ A/m}.$$

Se verifica también (entre las aproximaciones de cálculo) $H_1(L-h) + H_2h = Ni$.

Si la permeabilidad del material fuera mayor, por ejemplo, en un orden de magnitud, en el caso sin interferente, la reluctancia disminuiría en un factor 10 y el campo magnético aumentaría en un factor 10, con la misma fuerza magnetomotriz. En cambio, en el caso con un entrehierro, la reluctancia disminuye poco, porque la contribución del entrehierro es prácticamente constante, y el campo magnético aumenta poco, llegando a 0.216 T. En el límite, para un κ_m muy grande, mientras B aumenta proporcionalmente, B' tiende al valor $\mu_0 Ni/h$ independientemente de κ_m ; por lo tanto, no es muy útil utilizar materiales con κ_m muy grande. ■

Ejercicio 9.5 En el circuito magnético en figura $N = 200$, $s_1 = 30 \text{ cm}$, $s_2 = 20 \text{ cm}$, $s = 10 \text{ cm}$, $h = 3 \text{ mm}$, la sección del hierro es $\Sigma = 5 \text{ cm}^2$, la permeabilidad relativa es $\kappa_m = 250$. Calcular la intensidad de corriente i en la bobina si el campo magnético en el entrehierro es $B = 5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$.

Solución. El flujo de \vec{B} a través cualquiera sección del tramo $QRST$ tiene que ser

$$\Phi_2 = B\Sigma = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}.$$

Este tramo está en paralelo con el tramo QT y, por lo tanto, $\mathcal{R}_1\Phi_1 = \mathcal{R}_2\Phi_2$ con

$$\mathcal{R}_1 = \frac{s}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = 6.37 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{2s_2 + s - h}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} + \frac{h}{\mu_0 \Sigma} = 7.94 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}.$$

Sigue $\Phi_1 = \mathcal{R}_2\Phi_2/\mathcal{R}_1 = 3.12 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ y el flujo total vale $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 3.37 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$. La reluctancia del tramo $TVPQ$ es

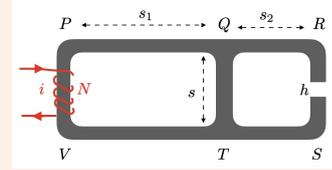
$$\mathcal{R}_3 = \frac{2s_1 + s}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = 4.46 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

y la reluctancia total del circuito es

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_3 + \frac{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = 5.05 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}.$$

La f.m.m. necesaria es

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi = 1.70 \cdot 10^3 \text{ A} \implies i = \frac{\mathcal{F}}{N} = 8.5 \text{ A}.$$



9.9 Electroimán. íman permanente

El circuito magnético más sencillo es el anillo toroidal con un material ferromagnético. Si el valor de μ es suficientemente elevado las líneas de \vec{B} y \vec{H} están prácticamente todas en el interior del material, por lo tanto no existe flujo de \vec{B} en el exterior y las espiras se pueden concentrar en una región del material. Estas consideraciones siguen válidas si en el circuito existe una interrupción de longitud h pequeña con respecto a la longitud total s del circuito. El sistema así descrito se llama *electroimán*, o sea un dispositivo que, alimentado por uno o más inductores, produce un campo magnético en una región de espacio accesible. Desde la constancia de $\Phi(B)$ sigue que en el atravesar la región hierro-aire \vec{B} es continuo y \vec{H} discontinuo según la relación

$$B = \mu H = \mu_0 H_0.$$

La ley de Ampère aplicada a una línea en el interior del circuito e incluye el inductor de alimentación proporciona

$$H(s-h) + H_0 h = Ni.$$

Poniéndola a sistema con la ley de Ampère y eliminando H_0 obtenemos

$$B = -\mu_0 \frac{s-h}{h} H + \mu_0 \frac{Ni}{h}. \quad (9.40)$$

En el hierro tienen que valer contemporáneamente dos relaciones entre H y B , aquella que se corresponde al ciclo de histéresis y la ecuación (9.40) obtenida desde la ley de Ampère y dependiente de las características geométricas y del inductor. En el plano (H, B) del ciclo de histéresis la

(9.40) es una recta a pendiente negativa, $-\mu_0(s-h)/h$, donde aparecen solamente los parámetros geométricos; sus intersecciones son

$$H^* = \frac{Ni}{s-h}, \quad B^* = \mu_0 \frac{Ni}{h}.$$

Fijada la geometría, y por lo tanto la pendiente, al variar de la corriente la recta se desplaza paralelamente a esta, siendo fijado por el máximo valor de Ni , la cual también depende de la máxima temperatura tolerable del inductor, en la cual se disipa energía por efecto Joule. Los posibles puntos de funcionamiento están determinados por las intersecciones de la recta con el ciclo de histéresis; por una corriente son posibles todas las soluciones entre c y b , véase figura 9.11 según como se llegó al valor i de la corriente.

Por ejemplo, si empezamos con hierro en el estado virgen y corriente nula, con el aumentar de la corriente la solución está dada por la intersección de la recta con la curva de primera magnetización: por una corriente i_a supongamos que sea a . Aumentamos aún más la corriente hasta que la intersección coincide con el punto S_1 , donde empieza la saturación, y luego volvemos a llevar la corriente a su valor i_a : esta vez el punto de funcionamiento es b . Si llevamos la corriente a cero, invertimos el sentido, llegamos a la intersección S_2 y volvemos atrás hasta i_a , el punto de funcionamiento será c . Así actuando, el punto de funcionamiento coincide siempre con un punto del ciclo, pero con distintos procedimientos de variación de corriente se puede obtener cualquier otro punto interno, o sea entre c y b .

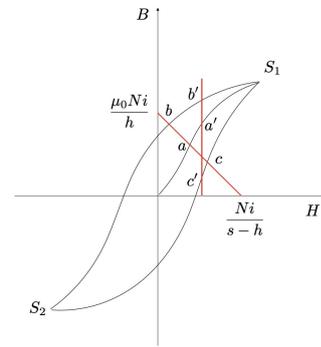


Figure 9.11: Ciclo de histéresis por el campo \vec{H} .

Es interesante hablar sobre el efecto del entrehierro. Consideramos inicialmente la ausencia del entrehierro, $h = 0$. La ecuación (9.40) es una recta ecuación $H = Ni/s$ paralela al eje B , la cual intercepta el ciclo de histéresis verticalmente, en las cuales están las soluciones. La presencia del entrehierro hace girar la recta en sentido antihorario, proporcionalmente al tamaño de h (respetando la condición $h \ll s$). En la figura 9.11 los puntos a y b bajan con respecto a los puntos a' y b' , mientras que sale c con respecto a c' , entonces se puede tener un campo magnético menor o mayor con respecto al caso sin entrehierro.

Observamos otra consecuencia de la forma del ciclo de histéresis, la cual no se tendría con una relación unívoca entre B y H y pasante por el centro: son posibles estados de funcionamiento con vectores \vec{H} y \vec{B} opuestos (puntos en el segundo y cuarto cuadrante). Esto porque, una vez magnetizado, el hierro conserva la propia magnetización y es necesaria una acción contraria, algunas veces muy intensa, para llevar a cero e invertir la magnetización: en las fases del proceso se realizan situaciones con \vec{H} en un sentido y \vec{B} y \vec{M} en el otro o \vec{B} y \vec{H} en un sentido y \vec{M} en el otro, o sea situaciones donde la susceptibilidad toma valores negativos. Tenemos que decir que los puntos de funcionamiento usuales son aquellos \vec{H} y \vec{B} del mismo valor, con corrientes bastante elevadas; los otros estados se obtienen si se efectúa una transición entre \vec{B} y $-\vec{B}$, pero no se utilizan comúnmente por la simple razón que se quiere obtener el máximo valor de \vec{B} .

Ímanes permanentes

Volvemos ahora al electroimán C y suponemos, después de haberlo llevado a la saturación, de reducir a cero la corriente. El hierro se queda magnetizado y el campo magnético residuo es tanto más alto cuanto más cuadrado es el ciclo de histéresis (y pequeño el espesor del entrehierro); porque en tal caso es generalmente grande el campo coercitivo, es difícil desmagnetizar el hierro.

Poniendo $i = 0$ en la ecuación (9.40) se tiene

$$\vec{B} = -\mu_0 \frac{s-h}{h} \vec{H}.$$

De otra parte, esta relación nos permite de encontrar gráficamente el valor de \vec{B} con el método de la intersección con el ciclo de histéresis, de otra parte nos muestra que en el interior del imán permanente \vec{B} y \vec{H} son opuestos. De hecho, dado que en el entrehierro \vec{B} y \vec{H} son concordes, solamente así es posible satisfacer la ecuación (9.20) con $i = 0$. Si no estuviera el entrehierro el campo magnético tendría el valor residuo B_r y el campo H sería cero. Es la presencia del entrehierro que hace \vec{H} distinto que cero y discontinuo en el cruce hierro-aire.



10. Inducción electromagnética

10.1 Campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo

Las propiedades locales de los campos eléctricos y magnéticos constantes en el tiempo, vistos durante el curso de electromagnetismo, están establecidas en el vacío por las cuatro ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \wedge \vec{E} = 0, \quad (10.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (10.2)$$

donde las fuentes están representadas por la densidad de carga $\rho(x, y, z)$ y por la densidad de corriente $\vec{j}(x, y, z)$, las dos constantes en el tiempo. La condición de estacionariedad está evidenciada en las ecuaciones precedentes por el hecho que no aparecen las derivadas con respecto al tiempo.

Sabemos que el campo eléctrico \vec{E} es conservativo y está generado por las cargas eléctricas fijas; mientras que el campo magnético \vec{B} no es conservativo y está generado por cargas eléctricas en movimiento estacionario. Aparte esta particularidad, o sea que las fuentes de los campos son siempre cargas eléctricas, no existe en un dado sistema de referencia ninguna conexión entre fenómenos eléctricos y magnéticos estáticos y las relativas ecuaciones se pueden resolver separadamente.

Experimentos conducidos por Faraday en Inglaterra e independientemente por Henry en los Estados Unidos pusieron en evidencia una distinta conexión entre electricidad y magnetismo: un campo magnético variable en tiempo genera un campo eléctrico no conservativo, el cual en algunos aparados puede generar una fuerza electromotriz y una corriente en un circuito cerrado; un fenómeno análogo se obtiene cuando se tiene un movimiento relativo entre un circuito y un campo magnético constante. Consecutivamente Maxwell demostró que para que las ecuaciones por los fenómenos variables fuesen compatibles con la ley de conservación de la carga, había que postular que un campo eléctrico variable en tiempo originase un campo magnético.

Maxwell llegó así a una forma más general de las ecuaciones que gobiernan los fenómenos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo. Las ecuaciones (10.1) - (10.2) son el caso límite por los fenómenos estáticos. La característica fundamental es que el campo eléctrico y un campo magnético variables no pueden existir separadamente, y se tiene que hablar de *campo electromagnético*; además las ecuaciones de Maxwell dan como solución un campo electromagnético que

se propaga con una velocidad que es igual a la de la luz: la última viene identificada como un fenómeno electromagnético rápidamente variable.

En este capítulo estudiaremos los fenómenos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo y formularemos las ecuaciones de Maxwell en la manera más general.

Acordemos algunos conceptos y propiedades que utilizaremos.

La *fuerza electromotriz* (f.e.m.) está definida como la integral del campo eléctrico \vec{E} en una línea cerrada, o sea la circulación de \vec{E} :

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\mathbf{s}$$

y un valor no nulo implica que el campo eléctrico no es conservativo¹.

El flujo del campo magnético \vec{B} a través de una superficie Σ es

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma.$$

La superficie Σ tiene como contorno una línea cerrada s y son infinitas las superficies que se apoyan sobre s . Porque el campo \vec{B} es *solenoidal*, propiedad que no depende si los fenómenos son variables en el tiempo o no, el flujo a través de las infinitas superficies Σ con el mismo contorno s es el mismo: se habla por lo tanto de *flujo a través de una línea cerrada s o concatenada a la línea cerrada s* , dejando entendido que el flujo se puede calcular sobre cualquiera superficie delimitada por s . Elegido un sentido de recorrido en s , la orientación de la normal \vec{u}_n a Σ sigue la convención de la regla de la mano derecha (o del sacacorchos).

10.2 Ley de Faraday de la inducción electromagnética

Consideramos una espira A de hilo conductor conectada con un galvanómetro a cero central. Si se acerca un imán a la espira el índice del galvanómetro se desplaza hacia una dirección mientras que si se aleja el imán el índice se desplaza hacia la dirección opuesta; cuando el imán no se mueve en la espira no se observa ningún desplazamiento del índice del instrumento.

Los efectos son iguales si se mantiene el imán parado y se desplaza la espira. Si sustituimos el imán con una espira A' en la cual está un generador de corriente y desplazamos la espira A' con respecto a la espira A (o lo contrario) se observa el mismo efecto. Bajo estas observaciones podemos concluir que en una espira aparece una *corriente*, que llamaremos *inducida*, cada vez que haya un movimiento relativo entre la espira y un campo magnético \vec{B} , generado por un imán o por una espira donde circula corriente.

Para tener una corriente en un circuito es necesario que en el mismo haya una fuente de fuerza electromotriz, mejor dicho: desde el movimiento relativo entre una espira y un campo magnético se genera una f.e.m. \mathcal{E}_i inducida.

Consideramos ahora otro experimento, conducido por primera vez por Faraday, mostrado esquemáticamente en figura 10.2. Una espira conectada a un galvanómetro está puesta cerca de un solenoide de longitud finita con un núcleo de hierro. El solenoide está conectado a un generador y a un interruptor T con el cual se deja pasar o no la corriente en el circuito. La espira y el solenoide

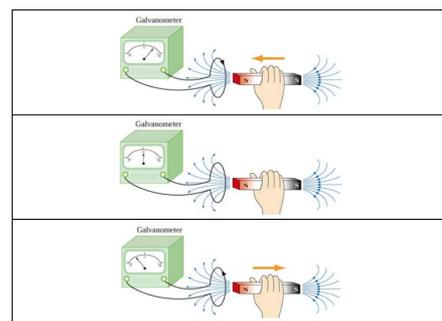


Figure 10.1: Inducción en un circuito con campo magnético variable.

¹como por ejemplo en el generador de Van de Graaf (proceso mecánico) y baterías y acumuladores (reacciones químicas)

no se mueven. En el instante cuando el interruptor se cierra el índice del galvanómetro se desplaza hacia una dirección y luego vuelve a cero, y se queda a cero cuando en el solenoide circula corriente. Cuando se abre el interruptor T el índice del galvanómetro se desplaza hacia la dirección opuesta al caso anterior y luego vuelve a zero. La conclusión de Faraday fue que se puede generar una f.e.m en un circuito mediante un campo magnético variable en el tiempo: esta se manifiesta solamente en los intervalos de tiempo cuando el campo magnético producido por el solenoide en los puntos de la espira, pasando desde cero al valor \vec{B} al cierre y desde \vec{B} a cero a la apertura, pero no aparece cuando la corriente y el campo magnético son constantes.

Desde el examen cualitativo de los casos descritos y en todas las otras situaciones en las cuales se manifiesta el fenómeno de la inducción, Faraday dedujo que *cada vez el flujo magnético $\Phi(\vec{B})$ concatenado con un circuito varía en el tiempo se genera en el circuito una f.e.m. inducida que es dada por el opuesto de la derivada del flujo con respecto al tiempo:*

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}. \quad (10.3)$$

La ecuación (10.3) se llama *ley de Faraday de la inducción electromagnética* (o también *ley de Faraday-Neumann* o de *Faraday-Henry*). Si R es la resistencia del circuito entonces en él circula una corriente

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}. \quad (10.4)$$

Tiene que estar claro que el efecto principal es aquello dado por la ecuación (10.3), mientras que la corriente es un efecto secundario. Si en un punto cualquiera del circuito ponemos un instrumento (sin alterar la geometría del circuito), se constata que el instrumento signa una diferencia de potencial (d.d.p.) igual a $V = -d\Phi/dt$. La f.e.m. inducida se comporta con un generator.

De hecho esto está confirmado experimentalmente: cuando un circuito de resistencia R y con un generator de f.e.m. \mathcal{E} , está bajo una variación de un flujo magnético concatenado, la corriente sigue la ley de Ohm:

$$i = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R} = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}}{R}$$

o sea: la f.e.m. inducida se suma a la f.e.m. del generator. Claramente, el efecto principal está dado por la ecuación 10.3, mientras que la corriente es un efecto secundario que depende no sólo de la variación de flujo del campo magnético sino que también de la resistencia del circuito.

Acordándonos ahora de la definición de la fuerza electromotriz y de flujo magnético podemos escribir la ecuación (10.3) como

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot ds = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma.$$

La variación $d\Phi/dt$ del flujo magnético concatenado con una línea cerrada s origina un campo eléctrico inducido \vec{E}_i , cuya circuitación en s es igual a $-d\Phi/dt$. Claramente este campo no es conservativo; de otro lado, como hemos puesto en evidencia en la sección 6.6, los campos eléctricos no conservativos son aquellos que permiten la corriente en un circuito a través de sus f.e.m. que representa el trabajo dado a la unidad de carga para cada giro completo en el circuito.

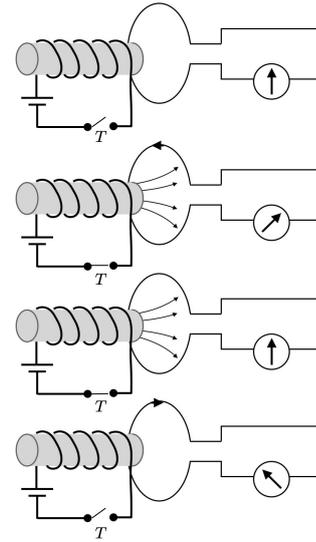


Figure 10.2: Inducción en un circuito con campo magnético: experimento de Faraday.

10.2.1 Ley de Lenz

El signo menos que aparece en la ecuación (10.3) es extremadamente importante y se pone en evidencia con un enunciado llamado *ley de Lenz*: el efecto de la f.e.m. inducida es siempre tal a oponerse a la causa que ha generado el fenómeno. Por ejemplo, si en un circuito cerrado circula una corriente inducida, ésta tiene sentido tal que el flujo del mismo campo magnético concatenado con el circuito se opone a la variación del flujo primario Φ : si éste aumenta $d\Phi/dt > 0$ la f.e.m. inducida es negativa y la corriente creada genera un autoflujo que se opone al aumento de Φ , así que el flujo total a través del circuito crece más lentamente; lo contrario, si Φ disminuye, o sea $d\Phi/dt < 0$, la f.e.m. inducida es positiva y la corriente inducida genera un autoflujo concorde a Φ , por lo tanto la disminución es más lenta.

Veremos más adelante que este comportamiento está acorde al *principio de conservación de la energía*.

Unidades 10.2.1 Hemos visto que el flujo magnético se mide en weber (Wb) y es igual a volt por segundo ($\text{Wb} = \text{Vs}$), por lo tanto ($\text{V} = \text{Wb/s}$). Notamos ahora que tal relación llega directamente de la ecuación (10.3) y obtenemos una nueva definición: en un circuito se tiene una variación de flujo de 1 Wb cuando esta variación provoca una f.e.m. inducida de 1 V en 1 s.

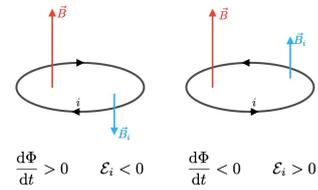


Figure 10.3: Ley de Lenz.

10.3 Origen física de la fuerza electromotriz inducida

La ley de Faraday pone en evidencia la relación entre el campo magnético y el campo eléctrico inducido

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u} d\Sigma \quad (10.5)$$

donde Σ es cualquier superficie que se apoya en un camino cerrado s y éste puede coincidir con un circuito conductor cerrado o cualquier línea geométrica cerrada.

Es importante repetir lo que se aprendió desde el experimento de Faraday: *la variación del flujo del campo magnético genera un campo eléctrico inducido* y esto es el efecto principal; si \vec{E}_i actúa en un circuito cerrado entonces tendremos una corriente inducida.

El símbolo de derivada parcial en la ecuación (10.5) indica explícitamente que es la variación temporal del flujo a crear el fenómeno. Empecemos ahora a examinar cómo se realiza una variación de flujo en el tiempo, listando todas las posibilidades, y luego buscando una clasificación y una explicación física.

1. Consideramos un circuito indeformable que cumple un movimiento rígido en una zona en la cual existe un campo magnético \vec{B} constante en el tiempo. Si el movimiento es solamente traslacional y el campo \vec{B} es uniforme, entonces no se tendrá variación de flujo; efectivamente todos los términos en la expresión del flujo son constantes: \vec{B} es constante y uniforme, la superficie Σ es constante y el ángulo entre \vec{B} y Σ no cambia en el tiempo. Si el \vec{B} no es uniforme el flujo a través del circuito cambia al variar de la posición del circuito, en éste nace una f.e.m. inducida. Una situación similar ocurre si el movimiento del circuito es rotatorio y el flujo a través del circuito cambia porque cambia la orientación del circuito con el campo magnético (sea el último uniforme o no uniforme). En el caso más general de movimiento rotacional-traslacional el flujo cambiará en el tiempo. Con lo cual, excluido el caso de movimiento traslacional en un campo uniforme, tendremos siempre una f.e.m. inducida en un circuito indeformable que se mueve en un campo magnético.

2. Una segunda posibilidad es que el circuito cambie de forma; en este caso tenemos un cambio de flujo porque la superficie cambia en el tiempo. Tendremos una f.e.m. inducida con campo uniforme o no uniforme.
3. El flujo puede cambiar en el tiempo si se desplaza la fuente del campo magnético.
4. Circuito y fuentes de campo magnético fijados: el flujo puede variar si se desliza un medio ferromagnético magnetizado, este movimiento cambiará la distribución geométrica de las líneas del campo \vec{B} .
5. Por último, en ausencia de cualquier movimiento relativo entre circuito y campo magnético y de variaciones locales de permeabilidad magnética, tendremos una variación de flujo si el campo magnético, uniforme o no uniforme, cambia en el tiempo debido a la variación en el tiempo de la intensidad de corriente que lo ha generado.

Las situaciones descritas pueden ser consideradas como puntos de referencias ya que hemos considerado sólo casos muy sencillos donde solamente una de las componentes del flujo (\vec{B} , Σ y el ángulo entre \vec{B} y \hat{u}_n) cambian en el tiempo. Si quisiéramos, podríamos considerar fenómenos donde todas las tres cantidades varían. De todas maneras es evidente que la inducción electro-magnética se puede relacionar a dos causas distintas: el *movimiento de un conductor* en un sistema de referencia en el cual las fuentes del campo magnético están quietas (puntos 1. y 2.) y la *variación del campo magnético* en un sistema de referencia en el cual el conductor está quieto (puntos 3., 4. y 5.).

Empezaremos desde la primera causa y vamos a demostrar que en el origen del fenómeno de inducción se encuentra la fuerza de Lorentz. Para ello, consideramos una espira conductora que se mueve con movimiento traslacional con velocidad \vec{v} en una región del espacio donde hay un campo magnético \vec{B} constante. Sobre los electrones de conducción, que se mueven con la espira a una velocidad \vec{v} , actúa la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

y por lo tanto podemos definir un campo electromotor

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{-e} = \vec{v} \wedge \vec{B}. \tag{10.6}$$

Bajo la acción de \vec{E}_i , las cargas entran en movimiento en la espira y por un movimiento infinitesimal $d\vec{s}$ en la espira se cumple un trabajo por unidad de carga

$$d\mathcal{E}_i = \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

y si integramos en toda la espira

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{s}. \tag{10.7}$$

En el tiempo dt , cada elemento de la espira se desplaza de $d\vec{r} = \vec{v} dt$, la (10.7) se puede escribir

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint d\vec{s} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{B} \tag{10.8}$$

donde hemos utilizado la propiedad del producto mixto

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2.$$

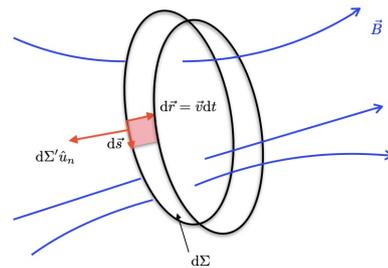


Figure 10.4: Espiral en movimiento

El vector $d\vec{s} \wedge d\vec{r}$ tiene módulo igual al área del paralelogramo con lados $d\vec{s}$ y $d\vec{r}$, descrito por $d\vec{s}$ en el tiempo dt , y podemos escribir $d\Sigma' \hat{u} = d\vec{s} \wedge d\vec{r}$, donde \hat{u} es el vector normal a la superficie Σ' , véase figura 10.4. Por lo tanto,

$$d\vec{s} \wedge d\vec{r} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \hat{u} d\Sigma' = d\Phi'$$

representa el flujo del campo magnético a través de la superficie Σ' .

En la translación infinitesimal de toda la espira se describe en total un área $d\Sigma$ a través de la cual hay un flujo

$$d\Phi_t = \int d\Phi' = \oint d\vec{s} \wedge d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u} d\Sigma'$$

Nótese que la integración está en toda la espira, es decir, sobre $d\vec{s}$, y que $d\Phi'$ es un infinitesimal de orden superior a $d\Phi_t$. Si ahora llamamos $\Phi_1(\vec{B})$ el flujo concatenado al circuito en la posición inicial y $\Phi_2(\vec{B})$ a aquel en la posición final, después de la translación infinitesimal se obtiene la relación

$$\Phi_2(\vec{B}) - \Phi_1(\vec{B}) + d\Phi_t(\vec{B}) = 0.$$

ésto porque, mirando la figura 10.4, la translación de la espira “crea” una superficie cerrada $d\Sigma$ que se puede pensar como la superficie lateral del sólido formado y el flujo total que sale de toda la superficie tiene que ser nulo ya que \vec{B} es solenoidal. La variación del flujo a través de la espira es

$$d\Phi(\vec{B}) = \Phi_2(\vec{B}) - \Phi_1(\vec{B}) = -d\Phi_t(\vec{B})$$

y por lo tanto

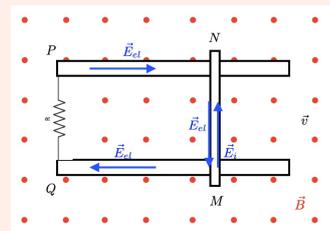
$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{d\Phi_t(\vec{B})}{dt} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

que está en acuerdo con la ley de Faraday.

Por lo tanto hemos demostrado que cuando un elemento de material conductor se mueve en un campo magnético, en su interior se crea una separación de cargas debida al campo electromotor, el cual ha sido originado por la fuerza de Lorentz. Si los elementos forman un circuito cerrado, entonces se tendrá una f.e.m. inducida \mathcal{E}_i distinta de cero y en el circuito circula una corriente inducida. La \mathcal{E}_i está dada por la ecuación (10.7), pero se verifica que es también igual a menos la derivada respecto al tiempo del flujo magnético concatenado con el circuito, según la ley de Faraday: en los casos considerados el fenómeno de inducción electro-magnética se reconduce a la fuerza de Lorentz.

Ejercicio 10.1 Un circuito rectangular está formado por dos conductores paralelos, cerrados a la izquierda por un conductor de resistencia R y a la derecha por una varilla conductora móvil de longitud b y resistencia r .

El circuito está situado en un campo magnético uniforme y constante \vec{B} , ortogonal al plano que contiene el circuito. Suponiendo que la varilla se mueve por translación con velocidad v en la dirección indicada en la figura, calcula la f.e.m. y la corriente inducida en el circuito.



Solución. El campo eléctrico inducido (10.6) actúa sobre los electrones de la varilla, cuya

tensión en los extremos de la varilla viene dada por la ecuación (2.4),

$$T = \int_M^N \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = -vBb;$$

de hecho \vec{v} y \vec{B} son ortogonales entre sí y $\vec{v} \times \vec{B}$ es paralelo y discordante a MN , cuya orientación está conectada a la de \vec{B} según la regla de la mano derecha. En los otros puntos del circuito, que son estacionarios $\vec{E}_i = 0$ y, por lo tanto, la f.e.m. del circuito vale

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_M^N \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = -vBb. \quad (10.9)$$

Llamada x la distancia $PN = QM$, el flujo del campo magnético a través del circuito vale

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = Bbx$$

y según la ecuación (10.3)

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bb \frac{dx}{dt} = -Bbv.$$

que es la ecuación (10.9). La f.e.m. inducida en el circuito es directamente proporcional a la velocidad con la que se mueve la varilla; si la varilla se mantiene en movimiento con velocidad constante, la f.e.m. inducida es constante. La corriente inducida, según la ecuación (10.4), es

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{r+R} = -\frac{vBb}{r+R},$$

si consideramos que la resistencia de los dos conductores paralelos sea despreciable. El signo menos indica que la dirección es de N a M : esta corriente genera un campo magnético opuesto a \vec{B} , contrarrestando así la variación del flujo (ley de Lenz).

En la práctica el movimiento de la varilla en el campo magnético ha creado un *generador de f.e.m.* \mathcal{E}_i . El campo electromotor lleva los electrones hacia el punto N y los polos del generador son M (polo positivo) y N (polo negativo); además, esta separación de cargas produce un campo electrostático \vec{E}_{el} , por lo tanto, el campo en el circuito vale

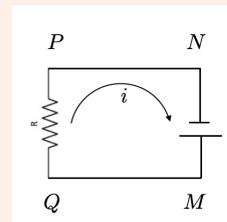
$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_i + \vec{E}_{el} = \vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}_{el} \quad \text{entre } M \text{ y } N \text{ en la varilla} \\ \vec{E} &= \vec{E}_{el} \quad \text{en todo el circuito restante donde } E_i = 0 \end{aligned}$$

La d.d.p. que se mide entre M y N a circuito cerrado es

$$V_M - V_N = \mathcal{E}_i - ri$$

Cuando, con la barra en movimiento, se abre el circuito, la corriente se anula y la d.d.p. medida entre M y N es la f.e.m. \mathcal{E}_i del generador. En esta situación, existe un estado de equilibrio con un campo eléctrico nulo en el interior de la varilla, ya que el campo electrostático debido a la separación de las cargas es igual y opuesto a E_i :

$$\vec{E} = \vec{E}_{el} + \vec{v} \times \vec{B} = 0, \quad \vec{E}_{el} = -\vec{v} \times \vec{B}.$$



Pasamos ahora a la segunda causa de inducción, quiere decir a la variación del campo magnético visto por un circuito fijo. En este caso la fuerza de Lorentz es nula ya que la velocidad de los electrones es igual a cero (el circuito no se mueve). De todas maneras la fuerza sobre una carga es dada generalmente por

$$\vec{F} = -e \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

la presencia de una f.e.m. inducida se explica con la presencia de un campo eléctrico \vec{E} : quiere decir que tenemos que asumir que en una región donde el campo magnético \vec{B} cambia en el tiempo se genera un \vec{E} .

Para encontrar la relación entre los campos empezamos desde la expresión

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u} d\Sigma.$$

Aplicamos a la integral de línea del campo eléctrico el teorema de Stokes:

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \nabla \wedge \vec{E} \cdot \hat{u} d\Sigma = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{u} d\Sigma.$$

La igualdad entre las dos integrales superficiales tiene que ser válida para cualquier superficie Σ , por lo tanto encontramos

$$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.10)$$

que expresa la relación entre la variación en el tiempo del campo magnético y el campo eléctrico inducido.

Finalmente, tenemos que el campo eléctrico desde el cual calculamos la f.e.m. inducida puede ser debido a un movimiento del campo magnético o a la variación temporal del campo magnético: este segundo fenómeno es algo completamente nuevo, que se añade a las propiedades de los campos estudiadas hasta ahora.

La ecuación (10.10), la cual expresa cuantitativamente la relación local entre campo magnético variable y campo eléctrico, es *una de las cuatro ecuaciones de Maxwell en la forma más general*. Esa ecuación es válida en cualquier medio y en particular en el vacío, en ausencia de conductores.

En los párrafos anteriores hemos expresado el campo magnético \vec{B} como el rotor del potencial vector \vec{A} , $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$; si insertamos la última en la ecuación (10.10) tenemos

$$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{A} = - \nabla \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \implies \vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

En general el campo \vec{E} puede ser debido también a cargas en reposo y su expresión en función del potencial escalar y del potencial vector se escribe

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V. \quad (10.11)$$

Formalmente la ecuación (10.11) es aún compatible con la ecuación (10.10) porque el rotor de un gradiente es idénticamente nulo.

Concluyendo, queremos evidenciar el aspecto relativista de algunas propiedades que hemos visto hasta ahora. Experimentalmente resulta que se mide la misma fuerza electromotriz en el sistema de referencia en el cual el circuito se mueve con una velocidad \vec{v} con respecto a la fuente (en reposo) de \vec{B} y en el sistema de referencia en el cual el circuito es en reposo y la fuente se

mueve con velocidad $-\vec{v}$; en el primero el efecto está atribuido a la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ que actúa sobre las cargas en movimiento, en el segundo a la fuerza eléctrica $q\vec{E}$ que actúa sobre las cargas en reposo, con \vec{E} dado por la ecuación (10.11). Esta imposibilidad de establecer un estado de movimiento absoluto es uno de los conceptos fundamental de la teoría de la relatividad, y los fenómenos recién descritos constituyen una importante confirmación.

De tal contesto queda distinto sólo el caso de ausencia de cualquier movimiento relativo, donde la variación de corriente en un circuito en reposo produce la variación de flujo en otro circuito en reposo. Sabemos que la ley de Faraday (10.3) conserva su validez y que el campo eléctrico local está aún dado por la ecuación (10.11): eso quiere decir en particular que desde la sola medida de \mathcal{E} no se puede establecer si la variación de \vec{B} en el tiempo vista por un circuito en reposo está debida al movimiento de una fuente de campo magnético constante o por una fuente en reposo con campo variable.

10.4 Aplicaciones de la ley de Faraday

En esta párrafo hablaremos de algunas aplicaciones de la ley de Faraday, concentrando nuestra atención sobre los proceso energéticos que se verifican en los fenómenos de inducción electromagnética.

Generadores

A tal propósito consideremos un circuito rectangular mostrado en el ejercicio 10.1. Porque la varilla se mueve con velocidad \vec{v} en el circuito aparece una f.e.m. inducida $\mathcal{E}_i = -vBb$ y circula corriente $i = \mathcal{E}_i/(r+R)$. Ahora, si en el circuito circula corriente i , sobre la barra actúa una fuerza magnética

$$\vec{F} = i\overrightarrow{NM} \wedge \vec{B} = -\frac{B^2b^2}{r+R}\vec{v},$$

que tiene sentido opuesto al movimiento de la barra y modulo proporcional a la velocidad (en la anterior hay que acordar que el sentido de \overrightarrow{NM} coincide con el sentido de la corriente, por lo tanto hay que considerarlo positivo). La presencia del campo magnético por un lado origina la corriente, de otro origina una fuerza resistente de tipo viscoso, comúnmente llamada *resistencia de fricción electromagnético*.

Para ganar esta resistencia de fricción tenemos que aplicar una fuerza externa, igual y opuesta a \vec{F} , gastando una potencia

$$P = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} = \frac{B^2b^2v^2}{r+R} = (r+R)i^2 = \mathcal{E}_i i.$$

La potencia mecánica utilizada para mantener el movimiento se encuentra integralmente bajo forma de potencia eléctrica gastada sobre las resistencias del circuito. El sistema puede ser considerado como un generador donde la potencia fornida $\mathcal{E}_i i$ llega de un acción mecánica externa; r es la resistencia interna del generador y R la resistencia externa.

Si en la ecuación (10.3) no estuviera el signo menos, o sea si la corriente inducida circulase en el sentido tal que la fuerza magnética no fuera opuesta al movimiento, sería suficiente poner en movimiento la barra, por ejemplo con un impulso, y sucesivamente el movimiento sería mantenido por la misma fuerza \vec{F} . Tendríamos así un generador que da potencia eléctrica sin recibir una cantidad equivalente de potencia bajo otra forma, en contradicción con el principio de conservación de la energía (en la practica tendríamos un generador de corriente perpetuo!). Notamos aquí el *significado energético del signo menos de la ecuación (10.3)*, o sea de la ley de Lenz.

Ejercicio 10.2 Generador de corriente sinusoidal. Una espira rectangular, de lados $MN = PQ = s$ y $NP = QM = s'$, gira con velocidad angular ω alrededor de un eje vertical pasante por el centro de masa, paralelo al lado MN . En la espira actúa un campo magnético \vec{B} uniforme y constante, horizontal; llamando θ el ángulo entre \vec{B} y la normal a superficie: $\theta = 0$ implica que \hat{u}_n es paralelo y concorde a \vec{B} . Calcular la f.e.m. inducida.

Solución. En los lados MN y PQ , el vector $\vec{v} \times \vec{B}$ es paralelo y concorde al sentido del recorrido del lado por lo tanto

$$\vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{PQ} = svB \sin \theta,$$

mientras que en los otros lados

$$\vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{NP} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{QM} = 0$$

en cuanto $\vec{v} \times \vec{B}$ es ortogonal al lado. Por lo tanto

$$\mathcal{E}_i = 2svB \sin \theta.$$

Porque $v = \omega s'/2$, $s s' = \Sigma$ (area de la espira) y $\theta = \omega t$, tenemos

$$\mathcal{E}_i = \omega \Sigma B \sin(\omega t), \quad (10.12)$$

expresión de la f.e.m. inducida en la espira debido a la rotación uniforme en el campo magnético. El mismo resultado se obtiene también con la ecuación (10.3)

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = B \Sigma \cos \theta = B \Sigma \cos(\omega t) \implies \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \Sigma B \sin(\omega t).$$

La ecuación (10.12), aplicable también a un espira plana de forma cualquiera, muestra que la f.e.m. varía sinusoidalmente, con un valor máximo

$$\mathcal{E}_{\max} = \omega B \Sigma. \quad (10.13)$$

Si la espira se conecta en serie a un circuito con resistencia total R , entonces tendremos una corriente

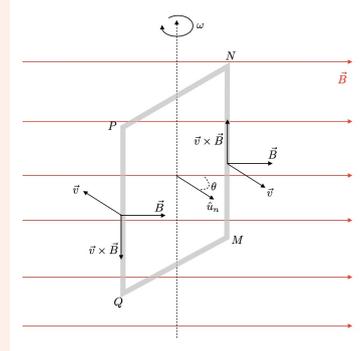
$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\omega B \Sigma}{R} \sin(\omega t)$$

y se gasta una potencia eléctrica

$$P = \mathcal{E}_i i = R i^2 = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R} = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{R} \sin^2(\omega t). \quad (10.14)$$

Porque en la espira circula una corriente i , ésta posee también un momento magnético $m = i \Sigma$, por lo tanto, para mantenerla en rotación contra el momento mecánico de las fuerzas magnéticas que tiende a orientar \vec{m} a \vec{B} , es necesario proporcionar una potencia mecánica

$$P = M \omega = (m B \sin \theta) \omega = i \omega B \Sigma \sin(\omega t) = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{R} \sin^2(\omega t)$$



igual a la ecuación (10.14).

Hay que tener en cuenta que esta energía siempre debe ser suministrada al sistema. De hecho, en el primer semiperiodo ($0 \leq \theta \leq \pi$, $\sin \theta \geq 0$) la corriente inducida circula en el sentido de marcha prefijado y el momento magnético \vec{m} forma el ángulo θ con \vec{B} : aumentando θ con el tiempo, es necesario suministrar trabajo para la rotación que desalinea \vec{m} y \vec{B} . En el segundo semiperiodo ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$, $\sin \theta \leq 0$) la corriente cambia de dirección y \vec{m} forma con \vec{B} un ángulo $\theta - \pi$, todavía menor que π y creciente; en consecuencia el trabajo debe ser suministrado como antes. A los efectos prácticos, interesa más su valor medio a lo largo de un periodo que los valores instantáneos de la potencia, teniendo en cuenta que la utilización se produce normalmente durante tiempos muy superiores al periodo T de rotación. Acordando que la media en un periodo de la función $\sin^2 \theta = \pi/2$, tenemos

$$P_m = \frac{\mathcal{E}_i}{2R}; \quad (10.15)$$

la potencia media en un periodo es igual a la mitad del valor máximo de la potencia instantánea. La potencia (10.15) coincide con aquella que proporcionaría un generador de corriente continua para dejar circular la corriente i en la resistencia R .

Para dar un ejemplo numérico, consideramos una bobina de $N = 20$ espiras circulares de radio $r = 19.9$ cm, que gira con frecuencia $\nu = 50$ Hz en un campo $B = 0.4$ T. La f.e.m. máxima y la f.e.m. eficaz son

$$\mathcal{E}_{\max} = \omega B \Sigma = 2\pi\nu B N \pi r^2 = 312.6 \text{ V}, \quad \mathcal{E}_{\text{eff}} = \mathcal{E}_{\max} / \sqrt{2} = 221 \text{ V}.$$

La f.e.m. y una corriente sinusoidal son casos particulares de cantidades alternas. ■

Motores

El proceso descrito de transformación de energía mecánica en energía eléctrica puede ser invertidos obteniendo movimiento de cuerpos utilizando energía eléctrica dada por un generador.

En el dispositivo en figura 10.5 sustituimos la resistencia R con generador que haga circular corriente en el sentido indicado en figura. Ahora la situación es opuesta, en la barra circula corriente eléctrica y sobre las cargas en movimiento, y por lo tanto sobre la barra, actúa una fuerza $\vec{F}_i = iBb\hat{u}_x$ hacia la derecha; consecutivamente el flujo del campo magnético concatenado con el circuito cambia en el tiempo y se genera una f.e.m. inducida la cual hace disminuir la corriente en el circuito y por lo tanto frena la barra en movimiento.

Llamada \mathcal{E}_0 la f.e.m. del generador, la ley de Ohm del circuito es

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = Ri \implies i = \frac{\mathcal{E}_0 - vBb}{R}, \quad (10.16)$$

si con R indicamos la resistencia total del circuito; admitimos que la corriente (pero no la f.e.m. \mathcal{E}_0) cambie con el movimiento.

Supongamos además que a la barra se aplique una fuerza resistente constante \vec{F}_0 opuesta a la velocidad, por ejemplo la barra a través de una cuerda y una polea que levanta un peso (en \vec{F}_0 puede ser añadida una eventual fuerza de fricción). La ley del movimiento es

$$F = F_1 - F_0 = iBb - F_0 = ma = m \frac{dv}{dt}$$

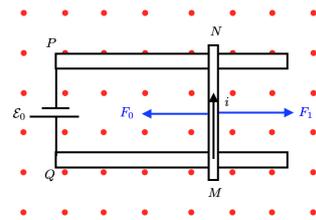


Figure 10.5: Motores con corriente inducida.

substituyendo la expresión por la corriente i encontrada anteriormente, se obtiene una ecuación diferencial del movimiento de la barra con masa m

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0 - vBb}{mR} Bb - \frac{F_0}{m}.$$

Si por $t = 0$ la barra está en reposo, la solución es

$$v(t) = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{Bb} - \frac{RF_0}{B^2b^2} \right) \left(1 - e^{-B^2b^2t/mR} \right).$$

En régimen, por tiempos grandes con respecto a la constante de tiempo $\tau = mR/B^2b^2$, el movimiento de la barra es uniforme y la fuerza aplicada es nula. Los valores de régimen son

$$\begin{aligned} v_\infty &= \frac{\mathcal{E}_0}{Bb} - \frac{RF_0}{B^2b^2} \\ i_\infty &= \frac{\mathcal{E}_0 - v_\infty Bb}{R} = \frac{F_0}{Bb} \\ \mathcal{E}_{0\infty} &= -v_\infty Bb = - \left(\mathcal{E}_0 - \frac{RF_0}{Bb} \right). \end{aligned}$$

La potencia dada por el generador es

$$P_\infty = \mathcal{E}_{0\infty} i_\infty = (Ri_\infty - \mathcal{E}_{i\infty}) i_\infty = Ri_\infty^2 - \mathcal{E}_{i\infty} i_\infty = Ri_\infty^2 + F_0 v_\infty. \quad (10.17)$$

El primer término corresponde a la potencia gastada en la resistencia, el segundo a la potencia mecánica necesaria para vencer la fuerza F_0 .

El sistema examinado se porta como un *motor* donde una parte de la energía dada por el generador de corriente se transforma en cinética.

10.5 Corrientes de Foucault

Hemos visto que un campo magnético \vec{B} variable en el tiempo genera un campo magnético según la ecuación (10.10): la estructura de la relación nos dice que si las líneas de \vec{B} están en una dirección entonces las líneas de \vec{E} están en el plano ortogonal a esta dirección y concatenando con aquella de \vec{B} , véase figura 10.6. Cuando el campo magnético varía en el interior de un conductor metálico el campo eléctrico inducido origina una corriente concatenada a las líneas de \vec{B} , las cuales pueden ser muy intensas si la resistividad del material es pequeña. El fenómeno lleva a un calentamiento del conductor y esto se aprovecha por ejemplo en los hornos a inducción en los cuales se funden los metales bajo la acción de campos magnéticos variables en el tiempo a muy alta frecuencia. Si se quieren reducir las corrientes inducidas entonces se podrá laminar la masa del conductor en hojas paralelas a las líneas de \vec{B} y separadas por capas de material aislante, así que las corrientes tienen que cruzar estas capas.

Técnicamente estas corrientes se llaman *corrientes parásitas* o de *Foucault*. éstas aparecen también cuando una masa metálica se mueve en un campo magnético constante y se deben a la fuerza de Lorentz sobre los electrones. Según la ley de Lenz el efecto ralentiza el movimiento en campo magnético (fricción electromagnética) y es exactamente por esta razón que se utiliza tal fenómeno.

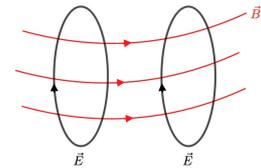


Figure 10.6: Corrente de Foucault.

Una demostración sencilla puede ser de utilizar una pequeña placa metálica colgada a una barra que oscila, como en figura 10.7. La placa metálica por lo tanto entra y sale de una región con un campo magnético constante y ortogonal a la placa. La placa viene frenada cuando entra en la zona con el campo magnético (variación del flujo de \vec{B}), no lo está cuando se encuentra en el campo magnético y vuelve a ser frenada cuando sale. Lo que ocurre es que la variación del flujo del campo magnético crean corrientes que se oponen a las variaciones mismas (la ley de Lenz). Si se practican cortes en la placa se reduce el efecto frenado, esto porque se interrumpe la circulación de las corrientes inducidas.

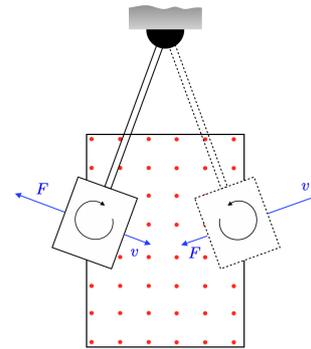


Figure 10.7: \vec{E} y \vec{B} en corrientes de Foucault.

El *freno electromagnético* se utiliza en muchas metropolitanas: se activa un electro-imán puesto bajo un vagón cerca de las vías férreas, esto genera corrientes de Foucault en las vías con las cuales frenan el vagón. El sistema es muy ventajoso porque la acción de frenada se puede ajustar variando la intensidad de la corriente que excita el electro-imán.

Ley de Felici. Medidas del campo magnético

Hemos visto que cuando una espira de resistencia R se mueve en un campo magnético \vec{B} , en ella se crea una corriente inducida

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

En el intervalo de tiempo desde t_1 a t_2 en la espira fluye una carga q dada por

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}. \quad (10.18)$$

El valor de la carga no depende de la ley temporal con la cual varía el flujo, sino sólo del valor inicial y final. La ecuación 10.18, conocida como la ley de Felici, es muy importante en la práctica porque proporciona un método sencillo para medir la intensidad del campo magnético.

Ejercicio 10.3 Disco de Palmieri. Una bobina plana formada por $N = 3000$ espiras de área $\Sigma = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ y resistencia total $R = 10^3 \Omega$. El montaje mecánico es tal que el eje de rotación se orienta en cualquiera dirección. Pongamos la bobina en un plano horizontal y le damos una vuelta de 180° . La variación del flujo se debe a la componente normal B_r del campo magnético de la tierra y la carga que se pone en movimiento es

$$Q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{2N\Sigma B_r}{R} = 0.24 B_r.$$

Si por ejemplo en el lugar $B_r = 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ T}$, $q = 9.6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. Poniendo la bobina verticalmente y a lo largo del paralelo terrestre, con una rotación de 180° se mide $q = 0.24 B_\theta$ y se mide la componente tangencial del campo magnético terrestre.

10.6 Autoinducción

En el párrafo 8.5, hemos puesto en evidencia como el campo magnético generado por la corriente que fluye en un circuito origina un flujo magnético a través del circuito mismo, llamado *autoflujo* el

cual es proporcional a la corriente i a través del coeficiente de autoinducción L . El coeficiente L depende de la forma geométrica del circuito y de la permeabilidad magnética del medio donde se encuentra el circuito.

El concepto de autoflujo tiene mucha importancia cuando la corriente en el circuito no es constante en el tiempo o cuando se varía la forma del circuito (o la variación de las dos). En ambos casos el flujo concatenado con el circuito cambia en el tiempo y en el circuito aparece una f.e.m. inducida la cual con sus efectos se opone a la variación que lo ha generado. La f.e.m., llamada de autoinducción, se calcula insertando la definición de autoflujo $\Phi = Li$ en la definición de f.e.m. inducida

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li). \quad (10.19)$$

En los casos prácticos más comunes el coeficiente de autoinducción es constante y la anterior es

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}. \quad (10.20)$$

La anterior da la definición del coeficiente L de cualquier circuito, rígido, en un medio cualquiera. Hay que suponer que la variación de corriente no sea muy rápida para que la corriente tenga el mismo valor en todo el circuito.

El coeficiente de autoinducción de un circuito viene normalmente llamado *inductancia*. Un circuito con inductancia no nula se llama *inductivo*; cuando la inductancia se puede pensar concentrada en un tramo particular del circuito, por ejemplo porque el hilo conductor está enrollado para formar un solenoide, se dibuja aquel particular conductor con el nombre de *inductor* y se utiliza el símbolo mostrado en figura 10.9.

La unidad de medida de la inductancia es el *henry*, definido en la sección 8.5.1; los valores de L son normalmente pequeños a menos que el inductor tenga un núcleo de material ferromagnético. De hecho, en los circuitos donde la permeabilidad magnética es cerca a la unidad los efectos son despreciable (como hemos hecho hasta ahora).

La presencia de un inductor en un circuito impide a la corriente de aumentar o disminuir instantáneamente, porque según la ecuación (10.20), la variación genera una f.e.m. que se opone a la variación misma. Examinemos el problema en el circuito más simple llamado *circuito RL en serie* formado por un generador de f.e.m. \mathcal{E} y resistencia interna despreciable, por un inductor con inductancia L y por un resistor R .

Las variaciones de corriente son causadas inicialmente por la abertura y cierre del interruptor T . Porque estas variaciones originan la f.e.m. (10.20), la ley de Ohm por el circuito es

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = Ri \implies \mathcal{E} = L\frac{di}{dt} + Ri, \quad (10.21)$$

e integrando tenemos

$$\mathcal{E} - Ri = Ae^{-Rt/L}, \quad (10.22)$$

donde A es una constante de integración la cual se determina según las condiciones iniciales.

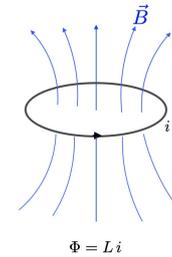


Figure 10.8: Autoflujo de una espira.



Figure 10.9: Inductor.

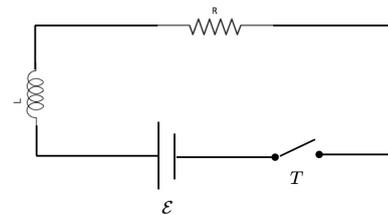


Figure 10.10: Circuito RL.

Cierre del circuito

Cuando a $t = 0$ se cierra el interruptor, la corriente, que era nula, tiene que ser nula porque es imposible una variación instantánea, por lo tanto la constante de integración es $A = \mathcal{E}$ y la corriente es

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad (10.23)$$

donde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo del circuito. El valor a regimen de la corriente es $i_\infty = \mathcal{E}/R$ corresponde a la ley de Ohm por corrientes constantes. En la practica el valor a regimen se llega en tiempo que es controlado por la constante de tiempo τ : mayor es la inductancia, más tiempo es necesario para llegar al valor de regimen.

La f.e.m. de autoinducción es

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = -\mathcal{E} e^{-t/\tau}.$$

En cada instante la diferencia entre el valor a regimen y el valor efectivo es

$$i_\infty - i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} = -\frac{\mathcal{E}_L}{R} = i_L$$

y por lo tanto $i(t) = i_\infty - i_L$: durante la fase transitoria se manifiesta otra corriente aparte aquella medible con la ley de Ohm aplicada al resistor, llamada *extracorrente de cierre*.

Si $R = 100 \Omega$, con $L = 10^{-6} \text{ H}$ tenemos un $\tau = 10^{-8} \text{ s}$, con $L = 10^{-3} \text{ H}$ tenemos un $\tau = 10^{-5} \text{ s}$: el regimen de corriente constante llega muy rápido con los valores de L de un circuito normal. Si cerráramos un circuito con un electroiman, que puede tener $L \sim 1 \text{ H}$ y $R = 1 \Omega$, la constante de tiempo sería del orden del segundo.

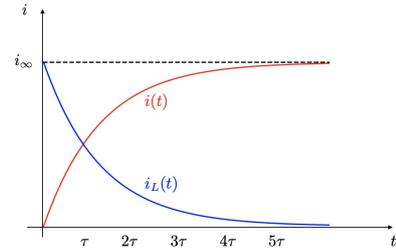


Figure 10.11: Corriente en el circuito RL en rojo; en azul es la extracorrente de cierre, en negro el valor de la corriente en regimen.

Abertura del circuito

Cuando se abre el circuito al tiempo $t = 0$ la corriente tiene que tener su valor de regimen $i_\infty = \mathcal{E}/R$. Supongamos que abriendo el interruptor la resistencia pase desde R al valor R' mucho mayor que R . La constante de integración es

$$A = \mathcal{E} - R' i_\infty = \mathcal{E} - R' \frac{\mathcal{E}}{R} = \mathcal{E} \left(1 - \frac{R'}{R}\right).$$

La expresión de la corriente, puesto $\tau' = L/R'$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R'} \left(1 - e^{-t/\tau'}\right) + \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau'} \simeq \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau'} = i_\infty e^{-t/\tau'}.$$

La igualdad aproximada vale si $R' \gg R$ y si el tiempo t es bastante breve. La corriente va a cero con constante de tiempo τ' , tan menor cuanto mayor es R' .

La f.e.m. de autoinducción vale

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = \frac{R'}{R} \mathcal{E} e^{-t/\tau'}$$

y es particularmente alta a la abertura: por $t = 0$, $\mathcal{E}_L = R' \mathcal{E}/R \gg \mathcal{E}$; la corriente correspondiente es $i_L = \mathcal{E}_L/R' = i(t)$ y de hecho la única f.e.m. es la \mathcal{E}_L . Esta corriente, distinta que cero se llama *extracorrente de abertura*. La f.e.m. se manifiesta cuando se abre el interruptor, como una d.d.p. entre los contactos del interruptor, la cual origina una chispa se el dielectrico es el aire. R' puede ser pensada como la resistencia de la chispa. Para evitar estos fenómenos que pueden ser destructivos para los interruptores a grandes escalas como aquellos de las distribuciones hídricas, se ponen estos en una solución de aceites.

10.7 Energía magnética

La presencia de una f.e.m. en un circuito implica, por definición, un trabajo sobre las cargas que constituyen la corriente, positivo o negativo según el signo de la f.e.m. (positiva o negativa respectivamente).

Consideramos el circuito RL usado anteriormente y escribimos la ley de Ohm en la forma

$$\mathcal{E} = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

La potencia erogada por el generador cuando la corriente toma el valor i es

$$\mathcal{E} i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} \quad (10.24)$$

y el trabajo en el tiempo dt vale

$$\mathcal{E} i dt = Ri^2 dt + Li di. \quad (10.25)$$

La ecuación (10.25) expresa el balance energético del circuito. El primer término, equivalente a $\mathcal{E} dq$, es el trabajo cumplido por el generador, según la definición de f.e.m. de un generador. El término $Ri^2 dt$ representa el trabajo gastado para dejar circular la corriente en el circuito y transformado en calor (efecto Joule), el término $Li di$ es el trabajo gastado contra la f.e.m. de autoinducción $\mathcal{E}_i = -L di/dt$ para aumentar la corriente desde i a $i + di$.

Los valores de los tres términos en la ecuación (10.24) están mostrados en figura 10.12 con $i(t)$ dada por la ecuación (10.23). Fijado un cualquier valor de t , la área debajo de cada curva entre cero y t proporciona el trabajo correspondiente. Cuando la corriente ha llegado al valor de régimen, el generador continua a dar la potencia

$$\mathcal{E} i_\infty = Ri_\infty^2$$

necesaria para mantener la corriente constante en el circuito.

En el intervalo de tiempo en el cual la corriente pasa de cero al valor i (que en particular puede ser lo de régimen) el generador aparte del trabajo correspondiente por el efecto Joule tiene que gastar el trabajo:

$$W = \int_0^i Li di = \frac{1}{2} Li^2,$$

el cual no depende de la manera con la cual ocurre la variación de corriente, sino que solamente de los valores iniciales y finales. Podemos por lo tanto definir la *energía intrínseca de la corriente*:

$$U_L = \frac{1}{2} Li^2, \quad (10.26)$$

cuya variación proporciona el trabajo del generador contra la f.e.m. de autoinducción durante la correspondiente variación de corriente.

En el transito desde cero a i_∞ , $U_L = Li^2/2$; si se abre el circuito la corriente llega a cero según la ley $i = (\mathcal{E}/R)e^{-Rt/L}$ y en la resistencia se gasta trabajo

$$\int_0^\infty i^2 R dt = R \frac{\mathcal{E}^2}{R^2} \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt = \frac{1}{2} L \frac{\mathcal{E}^2}{R^2} = \frac{1}{2} Li_\infty^2.$$

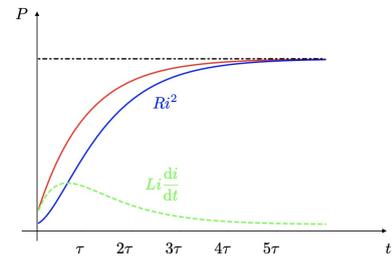


Figure 10.12: Potencia en el circuito RL : en rojo la potencia del generador, en azul de la resistencia y en verde de la inductancia.

Durante la disminución el trabajo para dejar circular la corriente está fornido por la energía intrínseca: la energía almacenada en la inductancia se encuentra al final disipada bajo forma de calor en la resistencia.

La expresión (10.26) de la energía intrínseca sugiere que ésta esté conectada a la corriente y por lo tanto localizable en el circuito donde fluye la corriente. De otro lado esta energía ha sido obtenida a través del trabajo contra la f.e.m. autoinducida, conectada a la variación del flujo magnético, que en este caso ha sido debido a la variación del campo magnético; al final de la variación, cuando la corriente es constante, en el espacio donde está el circuito existe un campo magnético que no existía antes. Viceversa, cuando se apaga, es la f.e.m. autoinducida que da energía manteniendo la corriente y al final el campo magnético ha desaparecido. Estas condiciones hacen pensar de conectar la energía (10.26) al campo magnético, localizándola en el espacio donde existe el campo magnético: la *energía intrínseca* de la corriente aparece como *energía magnética*, en el mismo sentido de como hemos definido una energía electrostática conectada al campo \vec{E} , sección 4.3.

Para comprobar que la ecuación (10.26) está distribuida con una densidad que depende del valor local del campo magnético, consideramos un solenoide lineal indefinido largo d ; el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud es

$$L = \mu_0 n^2 \Sigma d$$

donde Σ es la sección del solenoide lineal. De otro lado el campo magnético generado por este solenoide es $B = \mu_0 n i$, por lo tanto la energía intrínseca (o magnética) es

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 \Sigma d) i^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \Sigma d = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tau$$

donde τ es el volumen del solenoide. La densidad de energía magnética por unidad de volumen es

$$u_m = \frac{U_L}{\tau} = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Considerando la estructura de esta expresión, la cual depende solamente del valor del campo magnético y de la permeabilidad del medio (el vacío), estamos inducido a pensar que el resultado valga siempre, en el vacío, cualquier sea el campo magnético y la fuente que lo genera. Acordándonos que en el vacío $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, decimos que en una región donde existe un campo magnético está presente una energía distribuida con densidad

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} B H, \quad (10.27)$$

que llamamos densidad de energía magnética. En un volumen $d\tau$ alrededor del punto P donde el campo magnético vale \vec{B} está presente una energía magnética

$$dU_m = u_m d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

y la energía magnética se obtiene integrando en todo el espacio donde \vec{B} es distinto que cero:

$$U_m = \int_{\tau} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau. \quad (10.28)$$

La formulación de la ecuación (10.28) es de hecho la más general.

Ejercicio 10.4 Un cable coaxial está formado por dos superficies coaxiales cilíndricas de radios R_1 y R_2 . Una corriente i fluye en una dirección en el conductor interior y en la dirección opuesta en el conductor exterior. Calcular la inductancia y la energía magnética por unidad de longitud del cable.

Solución. Las líneas de campo \vec{B} son circunferencias de radio r contenidas en un plano ortogonal al eje del sistema. El campo magnético es distinto de cero sólo entre los cable coaxiales y vale

$$B = \frac{\mu i}{2\pi r}, \quad R_1 \leq r \leq R_2.$$

Consideremos el rectángulo infinitesimal largo a y de altura dr , de área $d\Sigma = a dr$, ortogonal a la líneas de \vec{B} . El flujo a través de este rectángulo es

$$d\Phi = B d\Sigma = B a dr = \frac{\mu_0 i a dr}{2\pi r}.$$

Integrando desde R_1 y R_2 , tenemos

$$\Phi = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

y por unidad de longitud ($a = 1$)

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad U_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i^2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (10.29)$$

Podemos ahora examinar el problema de la energía magnética cuando tenemos un material magnético. Por simplicidad consideramos un circuito magnético toroidal con N espiras, con sección pequeña con respecto al diámetro del anillo, para considerar \vec{B} constante en la sección. Dejando pasar la corriente desde el valor cero al valor i el flujo concatenado con las N espiras cambia y nace la f.e.m.

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (N\Sigma B) = -N\Sigma \frac{dB}{dt}.$$

En un instante genérico la ley del circuito es

$$\mathcal{E} = Ri - \mathcal{E}_i = Ri + N\Sigma \frac{dB}{dt}$$

y el trabajo gastado es

$$\mathcal{E} idt = Ri^2 dt + N\Sigma idB.$$

La variación de la energía magnética es

$$dU_m = N\Sigma idB = HdB 2\pi r \Sigma,$$

acordando que $H = Ni/2\pi r$. Por lo tanto la variación de energía magnética por unidad de volumen

$$du_m = HdB.$$

En los medios lineales tenemos $\vec{B} = \mu \vec{H}$ con μ independiente de \vec{H} y por lo tanto

$$u_m = \int_0^B HdB \implies u_m = \frac{1}{2} HB \quad (10.30)$$

la cual es la misma expresión de la ecuación (10.27) (aparte el uso de μ).

Cuando el material es ferromagnético la relación entre \vec{B} y \vec{H} no es analítica sino que está representada por el ciclo de histéresis y la integral ecuación (10.30) no lleva a un resultado único.

Con riferimento a la figura 10.13 consideramos la variación de H desde cero hasta H_{\max} el cual conlleva un desplazamiento del punto representativo del estado del sistema desde el punto P hasta Q ; en este proceso el generador da trabajo

$$u_{PQ} = \int_P^Q H dB = \text{area del triángulo curvilíneo PQR};$$

u_{PQ} es positivo porque H es positivo y, porque B crece, también dB es positivo. Si luego se lleva H a cero desde H_{\max} el sistema pasa de Q a S y el trabajo vale

$$u_{QS} = \int_Q^S H dB = \text{area del triángulo curvilíneo RQS};$$

que es negativo porque dB es negativo ya que B decrece. En total y por unidad de volumen en el semiciclo el generador gasta más de cuanto recibe y la pérdida es

$$u_{PQS} = u_{PQ} + u_{QS} = \text{area del triángulo curvilíneo PQS}.$$

Completando el ciclo, el trabajo gastado y no recuperado por unidad de volumen del material es

$$W_\tau = \oint H dB,$$

que es igual a la area de la curva del ciclo de histéresis: W_τ está absorbido por el material y transformado en calor.

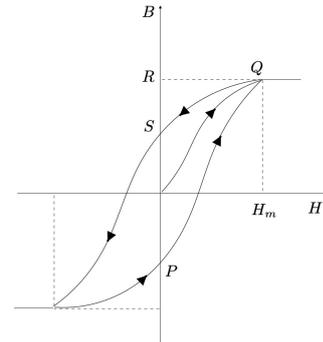


Figure 10.13: Energía magnética para materiales ferromagnéticos

10.8 Presión magnética

Habíamos calculado la fuerza entre las armaduras de un condensador cargado conectado a un generador que mantiene constante la d.d.p. entre ellas. Escribiendo el balance energético del proceso hemos demostrado que la componente de la fuerza entre las placas se calculaba como

$$F_x = \left(\frac{\partial U_e}{\partial x} \right)_{V=\text{const}}.$$

En la práctica varía la capacidad del sistema y la constancia de la d.d.p. conlleva un desplazamiento de cargas con un sucesivo trabajo del condensador; la variación de la energía total, suma de la energía interna del generador y de la energía electrostática, resulta igual y opuesta a la variación de la energía electrostática $dU = -dU_e$.

Consideramos ahora un circuito que contiene un generador y donde pasa corriente i y haya una deformación del circuito y la inductancia cambie de L a $L + dL$; supongamos que el generador consiga mantener constante la corriente, trabajando contra la f.e.m. inducida que aparece en el circuito debido a la deformación,

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}(Li) = -i\frac{dL}{dt}.$$

En el circuito también cambia la energía magnética de

$$dU_m = \frac{1}{2} i^2 dL$$

y el generador cumple trabajo

$$dW_{\text{gen}} = -\mathcal{E}_i i dt = i^2 dL = 2dU_m,$$

a través de un gasto de su propia energía interna $dW_{\text{gen}} = -dU_{\text{gen}}$.

La variación de la energía total, suma de la energía interna del generador y de la energía magnética, es

$$dU = dU_{\text{gen}} + dU_m = -dW_{\text{gen}} + dU_m = -dU_m,$$

opuesta a la variación de la energía magnética. Sigue que

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i=\text{const}} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial x} \right)_{i=\text{const}}. \quad (10.31)$$

Si la variación de la inductancia es positiva y por lo tanto la energía magnética aumenta, la energía total disminuye y el sistema cumple trabajo: él tiende a evolucionar espontáneamente hacia estados donde la energía magnética es máxima.

Presión magnética

Las espiras de un solenoide lineal están sometidas a una fuerza radial r dirigida hacia el exterior. La fuerza magnética ejercida sobre una espira por las otras es siempre inversa: la fuerza elemental sobre cada sección de la espira se dirige siempre hacia el exterior. Realicemos el cálculo aplicando la ecuación (10.31); la energía magnética contenida en un tramo de solenoide largo d y con sección $\Sigma = \pi r^2$ se obtiene desde la ecuación (10.28):

$$U_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi r^2 d,$$

asumiendo que B sea uniforme. La fuerza vale

$$F = \left(\frac{dU_m}{dr} \right)_{i=\text{const}} = \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r d.$$

Si $S = 2\pi r d$ es la superficie lateral del tramo de solenoide largo d y vemos que sobre tal superficie actúa una presión

$$p = \frac{F}{S} = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (10.32)$$

la cual coincide con la densidad de energía magnética en el solenoide. En el caso específico $B = \mu_0 n i = \mu_0 j_\ell$, con j_ℓ la densidad lineal de corriente, y por lo tanto

$$p = \frac{1}{2} \mu_0 (n i)^2 = \frac{1}{2} \mu_0 j_\ell^2.$$

Si el solenoide tiene un núcleo de material con permeabilidad magnética $\mu = \mu_0 \kappa_m$, la energía magnética y la fuerza son, a paridad de corriente, κ_m veces aquella del vacío. Por ejemplo, en un solenoide capaz de producir un $B = 1$ T, la presión vale $p \simeq 4 \cdot 10^5$ Pa, o sea 4 veces la presión atmosférica; sobre una área de 1 m^2 esto equivale a la fuerza peso de una masa de 40 toneladas (4 Kg/cm^2).

Fuerza sobre un material magnetizado

Una barra de material con permeabilidad magnética relativa $\kappa_m = 1 + \chi_m$ se inserta parcialmente, por un tramo x al interior del solenoide lineal de largo d , que tiene la misma sección de la barra. Para los cálculos, admitimos que la inductancia tenga la expresión (8.33). Por lo tanto, teniendo en consideración que en el tramo x está el material y que en el tramo $d - x$ el vacío:

$$L = \mu n^2 \Sigma x + \mu_0 n^2 \Sigma (d - x).$$

La energía magnética es

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \Sigma [d + (\kappa_m - 1)x] i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \Sigma (d + \chi_m x) i^2. \quad (10.33)$$

Según la expresión (10.31), la fuerza vale

$$F = \left(\frac{dU_m}{dx} \right)_{i=const} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \Sigma \chi_m x i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \Sigma \chi_m H^2. \quad (10.34)$$

Si la susceptibilidad magnética χ_m es positiva (materiales paramagnéticos y ferromagnéticos) la energía magnética aumenta con x , la fuerza es positiva y la barra viene atraída dentro el solenoide, hacia el estado de máxima energía magnética cuando $x = d$. Si χ_m es negativa (materiales diamagnéticos), la barra es empujada hacia el exterior. La fuerza no depende de la posición, en el aproximación de solenoide indefinido. Se observe que la fuerza (10.34) coincide con aquella encontrada para los dieléctricos, $F = \epsilon_0 \chi_e \Sigma E^2 / 2$.

Ejercicio 10.5 Un circuito magnético consta de una sección en forma de U , sobre la que se enrollan N espiras donde fluye una corriente i , y un anclaje del mismo material ferromagnético que el material a forma de U , separado de ella por una pequeña distancia x . Llamemos Σ a la sección del circuito magnético y $s + 2x$ a la longitud total del circuito magnético. Calcular la fuerza con la que el ancla es atraída por el imán a U .

Solución. Para calcular el campo magnético seguimos el método expuesto en el párrafo 9.8. El teorema de Ampère para el campo \vec{H} da

$$2xH_0 + sH = Ni$$

mientras que la relación entre \vec{B} y \vec{H} es

$$B = \mu_0 H_0 = \mu H = \mu_0 \kappa_m H$$

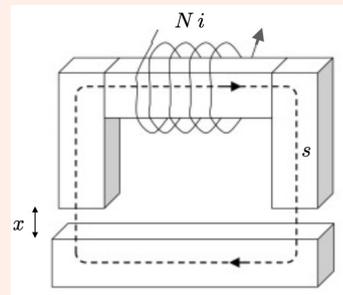
ya que el campo magnético es el mismo en todo el circuito mientras que H cambia. Por lo tanto,

$$2x \frac{B}{\mu_0} + s \frac{B}{\mu_0 \kappa_m} = Ni \implies B = \frac{\mu_0 \kappa_m Ni}{2\kappa_m x + s}.$$

La densidad de energía magnética en el entrehierro y en el medio son respectivamente

$$u_0 = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\kappa_m^2 (Ni)^2}{(2\kappa_m x + s)^2},$$

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\kappa_m (Ni)^2}{(2\kappa_m x + s)^2}$$



y la energía magnética total del circuito es

$$U_m = u_0 + 2x\Sigma + u_m s\Sigma = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\kappa_m (Ni)^2 \Sigma}{(2\kappa_m x + s)},$$

La fuerza sobre el ancla es

$$F = \frac{dU_m}{dx} = \frac{\mu_0 \kappa_m^2 (Ni)^2 \Sigma}{(2\kappa_m x + s)^2} = -2\sigma \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

donde se utilizó la expresión del campo magnético encontrada anteriormente. Dividiendo por el área 2Σ de las superficies enfrentadas se obtiene la expresión (10.32) para la presión magnética, que por tanto también es válida en estos casos. El signo negativo se debe a que la energía magnética disminuye al aumentar de x y muestra que la fuerza es atractiva. Si el ancla está unida a un muelle, que tiende a alejarla del imán, reducir la corriente a cero puede hacer que predomine la fuerza elástica y que el ancla se desprenda, mientras que aumentar la corriente hace que predomine la fuerza magnética y que el ancla se adhiera al imán. De este modo se realiza un movimiento controlado electromagnéticamente que puede utilizarse para abrir y cerrar un interruptor, para sistemas de acoplamiento o soporte y otras aplicaciones diversas. ■

10.9 Inducción mutua

Hemos ya hablado del coeficiente de mutua inducción entre dos circuitos

$$M = \frac{\Phi_{1,2}}{i_1} = \frac{\Phi_{2,1}}{i_2};$$

la demostración de la igualdad de los dos coeficientes $M_{1,2} = M_{2,1}$ hubo efectuado utilizando el potencial vector, ahora la demostraremos utilizando el balance energético.

Dos circuitos para los cuales $M \neq 0$ se dicen *acoplados*: estos están caracterizados completamente por sus resistencia, sus inductancia y por el coeficiente de inducción mutua, llamado también inductancia mutua; ésta última depende de la forma de los circuitos y de sus posiciones relativas (y del material).

La variación de corriente en el primer circuito genera una variación de flujo concatenado en el segundo con una creación de f.e.m. inducida (en el segundo) y viceversa. Suponiendo que M sea constante (circuitos fijados y permeabilidad constante), se obtiene por las f.e.m. inducidas en un circuitos

$$\mathcal{E}'_1 = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}, \quad \mathcal{E}'_2 = -\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Además hay que sumar las f.e.m. de autoinducción por cada circuito

$$\mathcal{E}''_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt}, \quad \mathcal{E}''_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Tenemos por lo tanto un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= R_1 i_1, \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= R_2 i_2, \end{aligned}$$

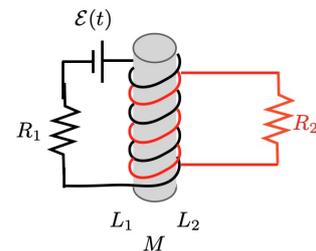


Figure 10.14: Mutua inducción entre dos circuitos.

También para circuitos acoplado se define una energía magnética de manera análoga a cuanto visto para el circuito RL .

Supongamos de tener dos circuitos véase figura 10.15, con $i_1 = i_2 = 0$ y llevamos la corriente i_1 al valor de regimen manteniendo $i_2 = 0$; para que esto ocurre el generador tiene que gastar una energía $U_1 = L_1 i_1^2 / 2$. Sucesivamente se lleva la corriente i_2 al valore de regimen dejando constante i_1 : el generador del segundo circuito gasta una energía $U_2 = L_2 i_2^2 / 2$ y el generador del primer circuito tiene que gastar energía

$$U_{2,1} = - \int \mathcal{E}'_1 i_1 dt = M_{2,1} i_1 i_2.$$

debiendo trabajar contra la f.e.m. de inducción mutua.

En total el trabajo gastado por los generadores es

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{2,1} i_1 i_2.$$

Si cambiamos el orden, o sea llevamos antes i_2 a regimen con $i_1 = 0$ y luego i_1 a regimen con i_2 constante el trabajo gastado es

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{1,2} i_1 i_2.$$

Porque el estado inicial y el estado final son iguales en ambos casos, igual tiene que ser la variación de energía magnética y por lo tanto $M_{1,2} = M_{2,1} = M$. Por lo tanto la energía magnética de dos circuitos acoplados es

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

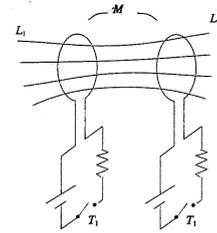


Figure 10.15: Mutua induc-tancia entre dos circuitos.

10.10 Corriente de desplazamiento. Ley de Ampère-Maxwell.

El campo magnético en el vacío satisface a la ley de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u} d\Sigma \tag{10.35}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{10.36}$$

respectivamente en forma integral y en forma diferencial. En la ecuación (10.35), la superficie Σ a través de la cual se calcula el flujo de la densidad de corriente es cualquier superficie que tiene como contorno el camino s que concatena la corriente i , y en la cual se calcula la integral de línea de \vec{B} .

Se ha demostrado que la (10.36) está en acuerdo con la conservación de la carga eléctrica solamente en el caso estacionario. Por ejemplo, calculando la divergencia tenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

es igual a cero porque el producto mixto $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0$. Y efectivamente $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ es la forma diferencial de la conservación de la carga eléctrica en los proceso que no cambian en el tiempo. En el caso general, si la carga cambia en el tiempo, tendremos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{10.37}$$

y la última no tiene divergencia nula.

La *no-validez* de la ley de Ampère en condiciones no estacionarias se puede constatar en el proceso de carga de un condensador. A la hora de estudiar los circuitos se ha admitido, utilizando la ley de Ohm en todo el circuito, que en todo el circuito circula una corriente eléctrica, sin tener en consideración que entre las armaduras del condensador está presente un medio aislador y no puede haber una corriente de conducción. En realidad, en una armadura del condensador se verifica una variación de carga dq/dt , que corresponde a la corriente entrante en la armadura y en la otra armadura hay una variación, igual en módulo y opuesta en signo $-dq/dt$, que corresponde a la corriente que sale. A través de una superficie que considera las dos armaduras tenemos un flujo total de carga nulo, como si hubiese continuidad en el circuito, y eso ha sido suficiente para resolver el circuito *RC*.

Si ahora consideramos una superficie cerrada que contiene sólo una de las armaduras, no importa cual de ellas, el flujo \vec{j} no es nulo porque existe una carga entrante (o que sale), pero en el espacio entre las armaduras del condensador no hay ningún pasaje de cargas, véase figura 10.16.

La integral de línea de \vec{B} en la línea s (contorno de Σ_1) es distinta de cero, pero en Σ_1 tenemos

$$\int_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = i = \frac{dq}{dt}$$

y en la superficie Σ_2 , que sigue apoyándose en s , pero no encuentra el hilo, tenemos

$$\int_{\Sigma_2} \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0.$$

Por lo tanto, en este caso, el vector densidad de corriente no es solenoidal, como debería de ser según las (10.35) y (10.36).

Para resolver este problema, Maxwell pensó en extender el significado de la densidad de corriente, razonando de esta manera. Expresamos la derivada de la densidad de carga utilizando la ley de Gauss:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

la (10.37) se escribe

$$\nabla \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\vec{j} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

El vector

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

se llama densidad de corriente total. Modificando la ley de Ampère, utilizando \vec{j}_{tot} , tenemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \left(\vec{j} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \mu_0 (i + i_s) \quad (10.38)$$

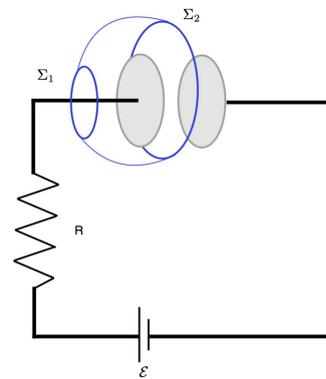


Figure 10.16: Circuito

que se llamará **Ley de Ampère-Maxwell**, y localmente

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_s).$$

Las cantidades i_s y \vec{j}_s serán:

$$\begin{aligned} \vec{j}_s &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ i_s &= \int \vec{j}_s \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t} \end{aligned}$$

se llaman respectivamente densidad de corriente y corriente de desplazamiento en el vacío. Claramente no tenemos que confundirnos con el nombre pues \vec{j}_s no corresponde a ningún desplazamiento real de cargas.

La ley de Ampère-Maxwell por lo tanto atribuye los mismos efectos magnéticos de una corriente de conducción a las variaciones temporales del campo eléctrico.

Como veremos, la confirmación más significativa del razonamiento de Maxwell llega de las ondas electromagnéticas; estas derivan exactamente del hecho que la variación temporal de un campo genera otro campo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &\rightarrow \vec{E} && \text{Ley de Faraday} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &\rightarrow \vec{B} && \text{Ley de Ampère-Maxwell} \end{aligned}$$

Los campos \vec{E} y \vec{B} producidos son también ellos variables y en condiciones apropiadas se genera una propagación.

Ejercicio 10.6 Un condensador plano con armaduras circulares de radio R está conectado a un generador que establece un campo eléctrico $E = E_0 \sin \omega t$. Calcular el campo magnético \vec{B} en el interior del condensador en función de la distancia r del eje y la f.e.m. inducida en un solenoide toroidal de radio medio r coaxial a las armaduras.

Solución. Consideramos una circunferencia de radio $r < R$ al interior del condensador, con centro en el eje del sistema; a lo largo de esta la circuitación de \vec{B} es $2\pi r B$, en cuanto por razones de simetría las líneas de \vec{B} son circunferencias como la dada. En un cierto instante el campo \vec{E} es uniforme en el plano de la circunferencia y la ley 10.38 se escribe

$$2\pi r B = \epsilon_0 \mu_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \pi r^2 \frac{\partial E}{\partial t}.$$

La expresión de \vec{B} , utilizando también $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$, es

$$B(r) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 r \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{r \omega E_0}{2c^2} \cos \omega t; \quad (10.39)$$

el módulo del campo magnético varía linealmente con el radio, para $0 < r < R$, como ocurre en el interior del hilo donde pasa corriente. De hecho, la ecuación (10.39) es idéntica a la ecuación 8.32 con $j = \epsilon_0 \partial E / \partial t = j_s$.

La f.e.m. inducida en las N espiras del solenoide toroidal, admitiendo que la dimensión radial

de la sección Σ' sea pequeña con respecto a r , es

$$\mathcal{E}_i = -N\Sigma' \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{N\Sigma' r \omega^2 E_0}{2c^2} \sin \omega t.$$

Desde un punto de vista de cantidad, el efecto directo de la corriente de desplazamiento es muy difícil de ponerlo en evidencia. El aporte de ésta a la circulación de \vec{B} es

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

donde $1/c^2 = 1.1 \cdot 10^{-17} s^2/m^2$, por lo tanto solamente una variación del campo eléctrico muy rápida podría contrabalancear a este coeficiente.

Lo que hemos hecho hasta ahora no considera la presencia de materiales. Si el espacio está relleno por un medio dieléctrico, conviene utilizar el vector de inducción dieléctrico \vec{D} , donde su divergencia es $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, con ρ la densidad de carga. Por lo tanto la densidad de carga total será

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} + \vec{j}_s.$$

En el vacío tenemos $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ y encontramos todas las relaciones anteriores.

Si en la densidad de corriente total \vec{j}_{tot} se tiene que incluir también la corriente amperiana $\vec{j}_{amp} = \nabla \wedge \vec{M}$, el término que contiene la magnetización se hace desaparecer utilizando el vector $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ y la ley de Ampère-Maxwell se escribe

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

10.11 Las ecuaciones de Maxwell

En el vacío, con cargas ρ y corrientes de conducción \vec{j} , las ecuaciones de Maxwell se escriben como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (10.40)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (10.41)$$

Con respecto a las ecuaciones (10.1) y (10.2) ahora tenemos los fenómenos dependientes del tiempo.

La primera ecuación establece el enlace entre carga eléctrica y campo eléctrico: la estructura es la misma por campos estáticos que variables; la segunda ecuación muestra que también un campo magnético variable es fuente de un campo eléctrico. La tercera ecuación afirma que el campo magnético es siempre solenoidal y por lo tanto no existen cargas magnéticas y en fin la cuarta ecuación individua como fuentes del campo magnético las corrientes de inducción y las variaciones del campo eléctrico.

Aplicando ahora la divergencia a la cuarta ecuación encontramos y utilizando la primera, obtenemos la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

expresión dinámica de la conservación de la carga.

La fuerza sobre una carga q es la *fuerza de Lorentz*

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

y el movimiento de la carga obedece a la *ley de Newton*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

escrita en forma relativísticamente correcta; por velocidades pequeñas $d\vec{p}/dt = m\vec{a}$, con m la masa de la carga q .

A los campos \vec{E} y \vec{B} está asociada la *densidad de energía electromagnética*

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0},$$

expresión que sigue válida también por campos variables en el tiempo.

Todas las propiedades generales que se han visto hasta ahora, incluyendo los campos estáticos, están en las ecuaciones (10.40) y (10.41).

En los medios materiales la presencia de campos \vec{E} y \vec{B} provoca la formación de cargas de polarización y de corrientes de magnetización, cuyas densidades se pueden expresar utilizando los vectores \vec{P} y \vec{M} . Estas densidades modifican los valores de ρ y \vec{j} en las ecuaciones de Maxwell a través de los vector:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

y las ecuaciones de Maxwell, si los medios están en reposo, serán

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (10.42)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (10.43)$$

donde aparecen solamente las cargas libres y las corrientes de conducciones. A éstas se tendrá que añadir las relaciones explícitas entre los campos

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \kappa_m \vec{H}.$$

Por completar, una situación particularmente significativa se tiene en el espacio vacío sin cargas y corrientes, donde las ecuaciones de Maxwell toman forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (10.44)$$

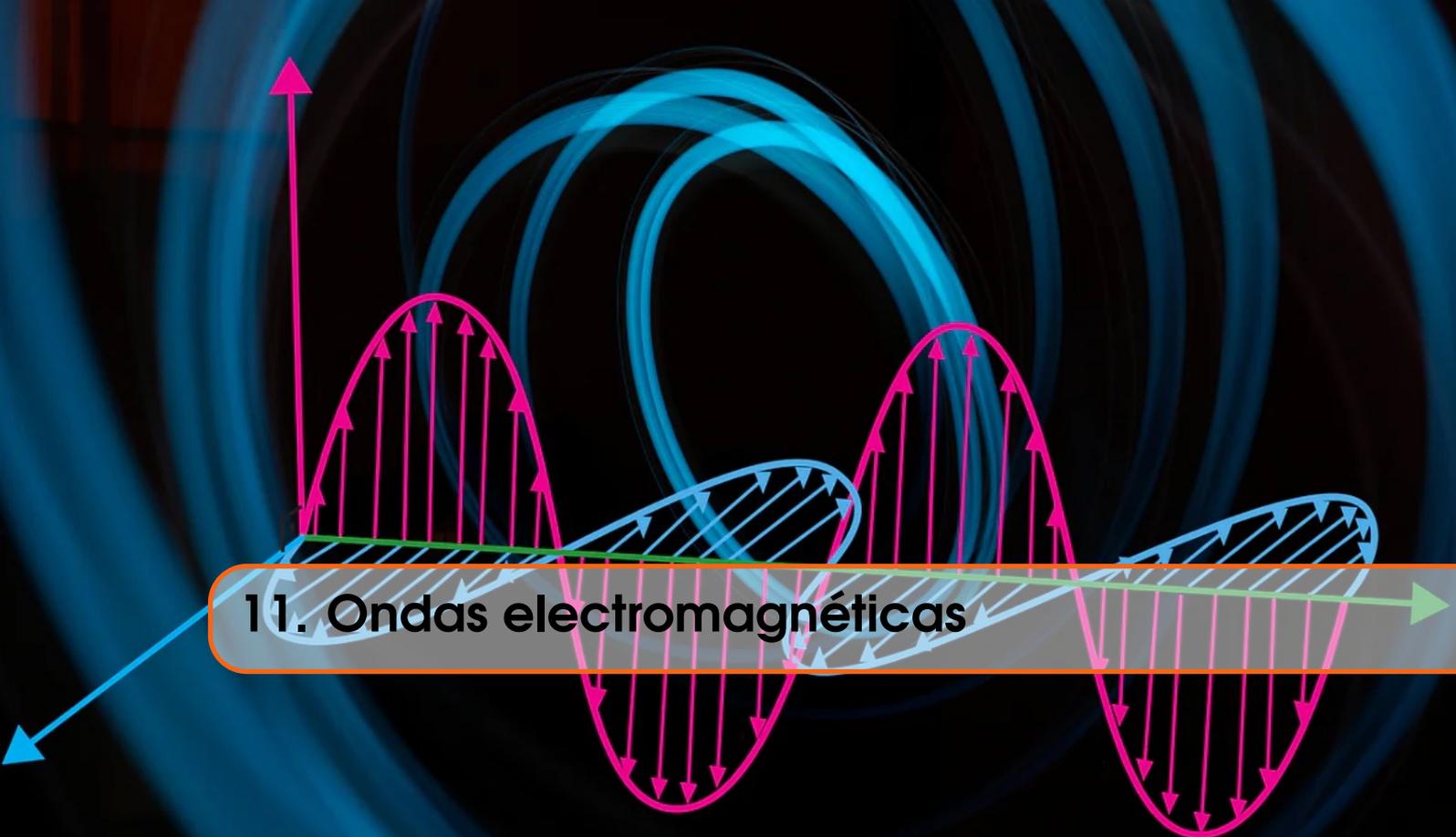
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (10.45)$$

La estructura de estas ecuaciones es simétrica con respecto a los dos campos y se nota que, a parte la solución banal $\vec{E} = \vec{B} = 0$, es posible otra solución con campos variables en el tiempo y en el espacio, situación que como veremos lleva a la propagación del campo electromagnético.

La teoría de Maxwell, publicada en su forma completa en el 1873, constituye uno de los resultados científicos más importante de la física clásica. Con ella se completa la teoría de los fenómenos eléctricos y magnéticos y sus unificación conceptual: esos fenómenos, que en el caso general no pueden existir separadamente, son los aspectos de una *única interacción fundamental*, conectada a la existencia de la carga eléctrica.

Las ecuaciones de Maxwell no son solamente el punto final de un proceso cognitivo empezado cien años antes. La previsión de la existencia de las ondas electromagnéticas, verificada experimentalmente por Hertz en el 1888 (a través de un experimento, el dipolo hertziano, capaz de producir y recibir ondas radio, en su honor la frecuencia de las ondas se mide en Hertz [Hz]), y por la coincidencia con su velocidad y la velocidad de la luz, permitió explicar la naturaleza de la luz y abrir un campo fundamental de investigación y aplicaciones.

Otro aspecto que queremos notar es la conexión de la teoría de Maxwell con la teoría de la relatividad especial enunciada por Einstein en el 1905. Según el principio de la relatividad todas las leyes de la Física, y no solamente aquella de la mecánica, deben de tener la misma expresión en todos los *sistemas de referencia inerciales*; además la ley de transformación de las coordenadas espaciales y del tiempo entre dos sistemas inerciales es la de Lorentz: entonces las leyes de la Física deben de ser invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Sabemos que esto no ocurre a las leyes de la mecánica newtoniana ya que éstas son invariantes bajo transformaciones galileianas las cuales son el límite por $v \ll c$ de las transformaciones de Lorentz. En vez, las ecuaciones de Maxwell son relativísticamente invariantes; esto se había ya notado antes del 1905, o sea que se había encontrado formalmente las transformaciones que dejaban invariantes a las ecuaciones, pero no se había comprendido el significado. Intuitivamente no es sorprendente que una teoría la cual explica correctamente los campos que se propagan con la velocidad de la luz estén en acuerdo con la teoría de la relatividad.



11. Ondas electromagnéticas

11.1 Ondas electromagnéticas planas

Queremos ahora demostrar como en las ecuaciones de Maxwell estén contenidos fenómenos ondulatorios y definir las ondas electromagnéticas en el caso más sencillo, que es aquello de una *onda plana*.

A tal propósito, consideramos un medio indefinido y homogéneo con constante dieléctrica ϵ y permeabilidad magnética μ , en el cual no existen cargas libres y corrientes de conducción por lo tanto $\rho = 0$ y $\vec{j} = 0$. En estas hipótesis las ecuaciones de Maxwell tienen la forma: En vez de

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \text{a),} & \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \text{b),} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{c),} & \quad \nabla \times \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{d),}\end{aligned}$$

encontrar la solución general, nos limitaremos a encontrar una solución particular donde el campo eléctrico y el campo magnético dependan, en un sistema de referencia cartesiano, solo del tiempo y de la coordenada x , tomando el mismo valor en los puntos en un plano ortogonal al eje x (solución de onda plana). Bajo nuestras hipótesis todas las derivadas con respecto a y y z son nulas, y por lo tanto tendremos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \implies \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \implies \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0\end{aligned}$$

El rotor del campo eléctrico es

$$\begin{aligned}(\nabla \times \vec{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \implies \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ (\nabla \times \vec{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \implies \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ (\nabla \times \vec{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \implies \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}\end{aligned}$$

El rotor del campo magnético es

$$\begin{aligned}(\nabla \times \vec{B})_x &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} \implies \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\(\nabla \times \vec{B})_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} \implies \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\(\nabla \times \vec{B})_z &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \epsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t} \implies \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_y}{\partial x}\end{aligned}$$

Las relaciones

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

nos permiten deducir que la componente $E_x(x, t)$ del campo eléctrico es constante. Tal campo podría ser creado por una distribución de cargas estacionarias; pero porque hemos excluido desde el principio que no estuvieran cargas (ni tampoco corrientes) y estamos interesados a campos variables en el tiempo, concluimos que $E_x(x, t) = 0$. Las mismas consideraciones se aplican a las relaciones

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

las cuales nos dan como solución $B_x(x, t) = 0$.

Esto es un primer resultado muy interesante: si conseguimos demostrar que las otras componentes satisfacen a la ecuación de las ondas, estas ondas serán necesariamente transversales ya que los campos están en el plano y, z .

Por ello, resumimos las relaciones encontradas

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial B_y}{\partial t} & \text{(a)} & \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_y}{\partial x} & \text{(b)} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} & \text{(c)} & \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} & \text{(d)}.\end{aligned} \tag{11.1}$$

Estas relaciones muestran una correlación entre E_y y B_z y entre E_z y B_y , o sea entre componentes mutuamente ortogonales. Si derivamos la ecuación (11.1)(a) con respecto a x y (11.1)(b) con respecto a t :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x}.$$

Las dos derivadas mixta de B_y son iguales y podemos escribir

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

En la misma manera, si derivamos la ecuación (11.1)(a) con respecto a t y (11.1)(b) con respecto a x obtenemos

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}.$$

Por las ecuaciones (11.1)(c) y (11.1)(d) obtenemos

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}.$$

Cada una de las componentes del campo eléctrico \vec{E} y del campo magnético \vec{B} satisface a la ecuación diferencial de las ondas planas, o sea

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (\xi = E_y, E_z, B_y, B_z). \quad (11.2)$$

Los campos \vec{E} y \vec{B} se propagan en la dirección x como ondas planas con velocidad

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\kappa_e \kappa_m}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa_e \kappa_m}},$$

donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

es la velocidad de la luz de la perturbación electromagnética en el vacío ($\kappa_e = \kappa_m = 1$).

Por lo tanto las ecuaciones de Maxwell dan como solución particular campos eléctricos y magnéticos que se propagan con las características de ondas planas transversales y con velocidad que asume un valor determinado en el vacío y en un medio dielectrico depende de las características eléctricas y magnéticas del material, resultado siempre menor que en el vacío. Porque c coincide con el valor medido de la velocidad de la luz en el vacío, Maxwell llegó a hipotetizar que la luz sea ella misma una *onda compuesta por un campo eléctrico y por un campo magnético*.

Ahora deducimos las relaciones entre \vec{E} y \vec{B} en cada instante y en cada punto. Acordamos que bajo la hipótesis que la propagación sea en el eje x las soluciones de las ecuaciones (11.2) son

$$E_y = E_y(x - vt), \quad E_z = E_z(x - vt), \quad B_y = B_y(x - vt), \quad B_z = B_z(x - vt),$$

o en formula vectorial

$$\vec{E} = E_y(x - vt)\hat{u}_y + E_z(x - vt)\hat{u}_z, \quad \vec{B} = B_y(x - vt)\hat{u}_y + B_z(x - vt)\hat{u}_z$$

Llamado $u = x - vt$ el argumento de las funciones, por lo tanto $\partial u / \partial x = 1$ y $\partial u / \partial t = -v$, entonces tendremos desde la ecuación (11.1)(a):

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u},$$

e integrando

$$B_y = \int \frac{\partial B_y}{\partial t} dt = \int \frac{\partial E_z}{\partial u} dt = -\frac{1}{v} \int \frac{\partial E_z}{\partial u} du = -\frac{E_z}{v} + \text{constante}.$$

Pongamos a cero la constante de integración, la cual describe una situación estacionaria a la cual no estamos interesados; en definitiva tenemos por las dos componente de \vec{B}

$$B_y(x - vt) = -\frac{1}{v} E_z(x - vt),$$

$$B_z(x - vt) = \frac{1}{v} E_y(x - vt).$$

Las componentes del campo \vec{B} dependen de la componentes del campo \vec{E} y los dos vectores se podrán escribir en la forma

$$\vec{E} = E_y(x - vt)\hat{u}_y + E_z(x - vt)\hat{u}_z,$$

$$v\vec{B} = -E_z(x - vt)\hat{u}_y + E_y(x - vt)\hat{u}_z,$$

desde las cuales podemos deducir todas las relaciones entre \vec{E} y \vec{B} en una onda electromagnética plana. Desde la segunda se obtiene la relación entre los módulos, válida en cada instante

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2} (E_z^2 + E_y^2) = \frac{E^2}{v^2}$$

$$\implies B = \frac{E}{v}, \quad E = vB, \quad \frac{E}{B} = v. \quad (11.3)$$

Desde el producto escalar se obtiene

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = \frac{1}{v} (-E_y E_z + E_z E_y)$$

$$\implies \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 : \quad (11.4)$$

los dos vectores son siempre ortogonales entre ellos mismos. En vez el producto vectorial vale

$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & -\frac{E_y}{v} & \frac{E_z}{v} \end{vmatrix} = \frac{1}{v} (E_y^2 + E_z^2) \hat{u}_x$$

$$\implies \vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{v} \hat{u}_x = v B^2 \hat{u}_x = E B \hat{u}_x; \quad (11.5)$$

este último da la dirección y el sentido de propagación, siendo paralelo y concorde con el eje x .

Resumiendo las propiedades encontradas por la propagación de una onda electromagnética plana, o sea de un campo eléctrico y de un campo magnético, en un medio homogéneo e isotropo sin corrientes y cargas libres:

- \vec{E} y \vec{B} se propagan con la misma velocidad v , que en el vacío es $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$;
- los módulos de los campos están conectados por la relación de proporcionalidad $B = E/v$, en el vacío $B = E/c$;
- \vec{E} y \vec{B} están ortogonales entre sí y los dos a la dirección de propagación: en caso específico las ondas electromagnéticas son ondas transversales y por estas es importante el concepto de polarización;
- el sentido del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ define la dirección de propagación, mientras que el módulo es proporcional al cuadrado del módulo de \vec{E} o de \vec{B} .

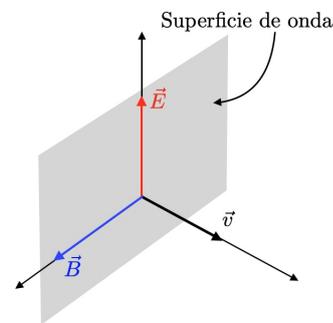
Estas propiedades por los campos tienen validez en cualquier sistema de coordenadas, por las propiedades de los vectores (aún si nosotros hemos hecho el cálculo en coordenadas cartesianas).

Entonces podemos decir que en un fenómeno variable, como la propagación, los campos \vec{E} y \vec{B} son inseparables: la presencia de uno conlleva la presencia del otro; y es por esta razón que se habla de *campo electromagnético*.

Por la mayoría de los medios ordinarios las susceptibilidad magnética es $|\kappa_m - 1| < 10^{-5}$, por lo tanto podemos poner $\kappa_m = 1$ y definir

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\kappa_e}$$

que es la razón entre la velocidad de una onda electromagnética en el vacío y en un medio donde las ondas se pueden propagar (o sea transparente a las ondas electromagnéticas). En el estudio de la propagación de la luz n toma el nombre de *índice de refracción absoluto del medio*; y se puede medir independientemente de la relación que lo conecta a κ_e .



11.2 Polarización de las ondas electromagnéticas planas

Las fuentes electromagnéticas de mayor interés emiten paquetes de ondas armónicas de duración finita. Si la duración Δt del paquete es tal que la banda de las frecuencias $\Delta\nu = 1/\Delta t$ que la constituyen es muy pequeña en comparación a la frecuencia media ν , entonces podemos tratar el paquete de ondas como una onda armónica de longitud λ y frecuencia ν definidas.

Para hablar de polarización tenemos que hacer una distinción entre ondas longitudinales y ondas transversales:

- Una onda plana se dice longitudinal cuando no existen otras direcciones importantes que no sea la dirección de propagación de la onda (en el caso visto hasta ahora, sería la dirección x). Un ejemplo de onda plana longitudinal es una barra de metal, golpeándola lateralmente con un martillo, se crean ondas que se propagan en la dirección del choque. En fin, una onda se dice longitudinal cuando la cantidad que se propaga yace en la misma dirección de propagación.
- Una onda plana se dice transversal cuando existen otras direcciones importantes durante la propagación de la misma onda. Un ejemplo es una cuerda, dándole un impulso inicial se crea una perturbación que se propaga en la cuerda, visualizada como una giba que se desplaza de una extremidad a otra. En fin, una onda se dice transversal cuando la cantidad que se propaga yace en un plano que es ortogonal a la dirección de propagación.

Como hemos visto anteriormente las ondas electromagnéticas son ondas transversales. En cualquiera onda transversal, fijados arbitrariamente los ejes y y z , la función de onda $\xi(x, t)$ (hemos elegido el eje x como dirección de propagación) se puede representar como un vector $\vec{\xi}$, las cuyas componentes son $\xi_y(x, t)$ y $\xi_z(x, t)$. El vector $\vec{\xi}$ puede tener en un particular instante en los puntos del eje x cualquiera dirección ortogonal a x , quiere decir: fijado un punto, en él con el pasar del tiempo el vector de onda puede tener cualquiera dirección ortogonal a x . En este caso de dependencia completamente casual de la dirección de $\vec{\xi}$ por parte de x y t la onda se dice no polarizada. En vez, cuando la variación de $\vec{\xi}$ en el plano y, z en función de x y de t puede expresarse con una ley particular entonces hablaremos de onda polarizada.

Volvemos ahora a las ondas electromagnéticas. Hemos visto que por una onda plana el campo eléctrico y el campo magnético se escriben como

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_y(x - vt)\hat{u}_y + E_z(x - vt)\hat{u}_z \\ \vec{B} &= -\frac{1}{v}E_z(x - vt)\hat{u}_y + \frac{1}{v}E_y(x - vt)\hat{u}_z\end{aligned}$$

siendo x la dirección de propagación y v la velocidad de propagación. Hemos además encontrado las relaciones:

$$\begin{aligned}\frac{E}{B} &= v & (11.6) \\ \vec{E} \cdot \vec{B} &= 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{B} \\ \vec{E} \times \vec{B} &= \frac{E^2}{v^2}\hat{u}_x \quad \rightarrow \quad (\vec{E} \perp \vec{B}) \perp x\end{aligned}$$

(cantidades sin la flecha son los módulos de los vectores).

Por lo tanto, ya que el campo eléctrico y el campo magnético son ortogonales es suficiente estudiar el comportamiento de un solo campo, y elegimos el campo \vec{E} .

Describimos una onda armónica plana a través de las ecuaciones

$$E_y(x, t) = E_{0y} \sin(kx - \omega t) \quad , \quad E_z(x, t) = E_{0z} \sin(kx - \omega t + \delta) \quad (11.7)$$

donde ω es la pulsación, k es el vector de onda y valen las relaciones

$$\omega = kv = 2\pi\nu \quad , \quad \lambda\nu = v \quad , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (11.8)$$

donde λ es la longitud de onda y ν es la frecuencia. La cantidad δ es un desfase entre las componentes y según el valor de δ tendremos distintas polarizaciones

A. Polarización lineal: $\delta = 0, \delta = \pi$.

Las ecuaciones (11.7) tendrán expresiones

$$\begin{aligned} E_y(x,t) &= E_{0y} \sin(kx - \omega t) \quad , \\ E_z(x,t) &= \pm E_{0z} \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

y la razón entre ellas será constante

$$\frac{E_y}{E_z} = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0z}} = \tan \theta = \text{const.}$$

El campo \vec{E} yace siempre en plano de polarización pasante por el eje x el cual forma un ángulo θ con el plano x, y , véase figura 11.1. En este plano, el campo oscila con amplitud E_0 y las componentes E_{0y} y E_{0z} tendrán:

$$E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2} \quad \rightarrow \quad E_{0y} = E_0 \cos \theta \quad , \quad E_{0z} = E_0 \sin \theta$$

Por lo tanto, cuando el vector de onda, en este caso \vec{E} , tiene dirección fijada, se dice que la onda está polarizada linealmente y la dirección fija de la onda es la dirección de polarización y el plano fijo donde yace el vector \vec{E} se llama plano de polarización.

B. Polarización elíptica: $\delta = \pi/2, \delta = 3\pi/2$.

Las ecuaciones (11.7) serán:

$$\begin{aligned} E_y(x,t) &= E_{0y} \sin(kx - \omega t) \quad , \\ E_z(x,t) &= \pm E_{0z} \cos(kx - \omega t) \quad . \end{aligned}$$

En una coordenada x_0 , las componentes de las onda E_y y E_z satisfacen, en cualquier instante a la relación

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_z^2}{E_{0z}^2} = 1$$

la cual es la ecuación de una elipse en el plano y, z . El módulo del campo eléctrico vale $E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2}$ y varía entre los valores E_{0y} y E_{0z} ; la dirección de \vec{E} cambia en el eje x y describe un giro completo en una longitud de onda λ . En el plano y, z el campo eléctrico \vec{E} describe una elipse con semi-ejes E_{0y} y E_{0z} , véase figura 11.2.

C. Polarización circular.

Las ecuaciones de la onda son

$$\begin{aligned} E_y(x,t) &= E_0 \sin(kx - \omega t) \\ E_z(x,t) &= \pm E_0 \cos(kx - \omega t) \quad . \end{aligned}$$

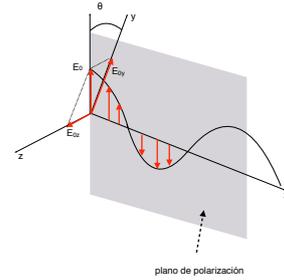


Figure 11.1: Polarización lineal

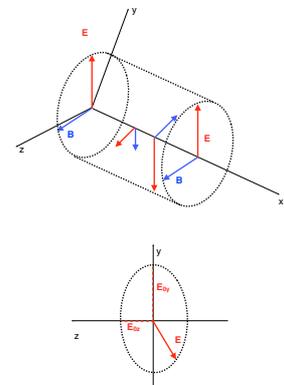


Figure 11.2: Polarización elíptica

El campo eléctrico tiene amplitud constante E_0 ; en función de x y t su variabilidad es analoga a la descrita por la polarización elíptica, con la elipse que degenera en una circunferencia.

D. Onda electromagnética no polarizada.

Si la diferencia de fase varía en manera casual entonces no se puede establecer una ley de variación por la dirección de \vec{E} : el estado de polarización, también si podemos definirlo en cada instante y en cada posición, no se puede definir en media en el tiempo. Esto porque en general la medida del estado de polarización de una onda en una posición se ha hecho en un intervalo de tiempo que, por cuanto corto lo deseamos, será siempre mucho mayor, de los tiempos de variación de δ , el resultado es que en media la onda aparece no polarizada. Ondas electromagnéticas no polarizadas son aquellas que constituyen la luz solar o la luz emitida por una bombilla a incandescencia.

En conclusión podemos decir que la polarización de una onda electromagnética nace desde la superposición de dos ondas *coherentes* que se propagan yaciendo en dos planos ortogonales, si definimos como coherentes dos ondas por las cuales la diferencia de fase se queda constante en el tiempo.

Unidades 11.2.1 Considerando las ecuaciones (11.8), notamos que la longitud de onda λ tiene unidades de metro m, la frecuencia es

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{\text{m/s}}{\text{m}} = \frac{1}{\text{s}} = \frac{1}{T}$$

donde T es el periodo. La pulsación ω también tiene la misma unidad de medida de la frecuencia. El vector de onda k tiene unidad de medida rad/m, donde rad corresponde al radián. Se define el hertz (o hercio) como

$$\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}.$$

Múltiplos típicos del Hz son:

$$\text{kHz} = 10^3 \text{ Hz} \quad \text{kiloherz}, \quad \text{MHz} = 10^6 \text{ Hz} \quad \text{megahertz}, \quad \text{GHz} = 10^9 \text{ Hz} \quad \text{gigahertz}.$$

La memoria RAM o la VRAM y la unidad de procesamiento gráfico operan normalmente a frecuencias del MHz, las cuales corresponden a las frecuencias radio. El Sistema de Posicionamiento Global (GPS; en inglés, Global Positioning System) y las redes de Wi-Fi, que es una tecnología que permite la interconexión inalámbrica de dispositivos electrónicos, operan a frecuencias del GHz, las cuales corresponden a las frecuencias de microondas. En figura 11.3 reportamos el diagrama del espectro electromagnético.

Ejercicio 11.1 Una onda electromagnética plana de frecuencia $\nu = 7.5 \cdot 10^{14}$ Hz se propaga en el vacío a lo largo del eje x . La onda es polarizada linealmente con el campo \vec{E} que forma un ángulo $\theta = 30^\circ$ con el plano $x - y$ y con amplitud $E_0 = 10^3$ V/m. Escribir la ecuación de la onda y calcular la amplitud del campo \vec{B} .

Solución. Los parámetros de la onda se obtienen utilizando las ecuaciones (11.8):

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.57 \cdot 10^7 \text{ rad/m}, \quad \omega = 2\pi\nu = 4.71 \cdot 10^{15} \text{ rad/m}.$$

Según la figura (11.3) se trata de una radiación visible que corresponde al color violeta (extremos

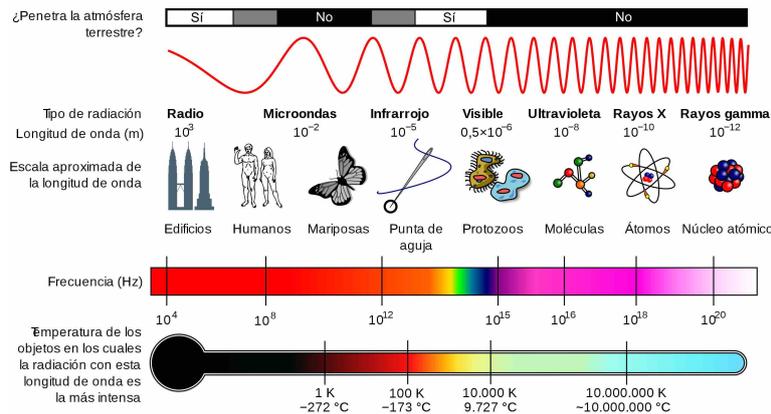


Figure 11.3: Diagrama del espectro electromagnético, mostrando el tipo, longitud de onda con ejemplos, frecuencia y temperatura de emisión de cuerpo negro.

inferior de las longitudes de onda visibles). Las amplitudes de las componentes del campo eléctrico son

$$E_{0y} = E_0 \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$E_{0z} = E_0 \sin \theta = \frac{1}{2} 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

y por lo tanto

$$E_y = \frac{\sqrt{3}}{2} 10^3 \sin(1.57 \cdot 10^7 x - 4.71 \cdot 10^{15} t) \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$E_z = \frac{1}{2} 10^3 \sin(1.57 \cdot 10^7 x - 4.71 \cdot 10^{15} t) \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

(11.9)

Desde las ecuaciones (11.3) tenemos las amplitudes del campo magnético

$$B_{0y} = \frac{E_{0z}}{c} = 1.67 \cdot 10^{-6} \text{ T}, B_{0z} = \frac{E_{0y}}{c} = 2.89 \cdot 10^{-6} \text{ T} \implies B_0 = 3.34 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

Ejercicio 11.2 Una onda electromagnética plana polarizada elípticamente, que se propaga en el vacío a lo largo de la x , tiene los dos semiejes de valor $E_{0y} = \sqrt{3}E_0$, $E_{0z} = \sqrt{2}E_0$, con $E_0 = 10^3 \text{ V/m}$. La frecuencia es $\nu = 4.3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Escribir la ecuación de la onda.

Solución. Los parámetros son $\lambda = 0.7 \cdot 10^{-6}$ (luz de color rojo), $k = 0.9 \cdot 10^7 \text{ rad/m}$, $\omega = 2.7 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$. Desde las ecuaciones (11.5), dejando inexpressado si $\delta = \pi/2$ ó $\delta = 3\pi/2$,

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t) = 1.73 \cdot 10^3 \sin(0.9 \cdot 10^7 x - 2.7 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m},$$

$$E_z = \pm \sqrt{2} E_0 \cos(kx - \omega t) = \pm 1.41 \cdot 10^3 \cos(0.9 \cdot 10^7 x - 2.7 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m}.$$

Con el signo positivos la elipse está descrita en sentido horario, mirando a lo largo de la dirección

de propagación. La ecuación de la elipse es

$$\left(\frac{E_y}{1.73 \cdot 10^3}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{1.41 \cdot 10^3}\right)^2 = 1.$$

El campo magnético asociado, utilizando las ecuaciones (11.3), es:

$$B_y = \mp \frac{\sqrt{2}E_0}{c} \cos(kx - \omega t) = \mp 4.71 \cdot 10^{-6} \cos(kx - \omega t) \text{ T}$$

$$B_z = \frac{\sqrt{3}E_0}{c} \sin(kx - \omega t) = 5.77 \cdot 10^{-6} \cos(kx - \omega t) \text{ T}$$

11.3 Energía de una onda electromagnética. Vector de Poynting

La presencia de un campo eléctrico \vec{E} y de un campo magnético \vec{B} en una región, comporta la presencia de una cantidad de energía distribuida en el espacio con densidad u .

En un medio homogéneo las densidades son

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu}$$

y la densidad instantánea de energía electromagnética es

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{B^2}{2\mu}.$$

Por una onda electromagnética plana hemos encontrado las relaciones entre los módulos del campo \vec{E} y del campo \vec{B} : $E = vB$ donde v es la velocidad de propagación de la onda y es $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, por lo tanto podemos escribir

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{E^2}{2\mu v^2} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = u_e$$

por lo tanto

$$u = 2u_e = \epsilon E^2.$$

Definición 11.3.1 La energía electromagnética resulta por mitad debida al campo eléctrico y por la otra mitad al campo magnético.

El resultado es válido en general, también para ondas no planas.

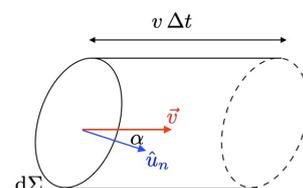
Consideramos ahora un elemento de superficie $d\Sigma$ cuyo versor normal \hat{u}_n forma un ángulo α con la dirección de propagación definida por v , o sea por el vector \vec{k} .

En el tiempo dt a través de la superficie $d\Sigma$ pasa toda la energía contenida en el volumen del prisma elemental de base $d\Sigma$ y altura $v dt$, quiere decir:

$$dU = u d\tau = u d\Sigma \cos \alpha v dt = \epsilon E^2 v \cos \alpha d\Sigma dt.$$

La potencia (energía por unidad de tiempo) total que cruza $d\Sigma$ será

$$dP = \epsilon E^2 v \cos \alpha d\Sigma.$$



Esta relación permite definir el vector

$$\vec{S} = \varepsilon E^2 \vec{v} \quad (11.10)$$

y tiene la propiedad que su flujo a través de la superficie $d\Sigma$ proporciona la potencia instantánea a través $d\Sigma$:

$$dP = \vec{S} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \varepsilon E^2 v \cos \alpha d\Sigma = \varepsilon E^2 v d\Sigma_0 = S d\Sigma_0$$

donde $d\Sigma_0 = \cos \alpha d\Sigma$ es la superficie infinitesimal ortogonal a \vec{v} .

La definición (11.10) se puede también escribir como

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \quad (11.11)$$

donde hemos utilizado la relación encontrada anteriormente por las ondas electromagnéticas

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{v} \hat{u}_x = v B^2 \hat{u}_x = E B \hat{u}_x.$$

Desde la ecuación (11.11) podemos re-escribir la potencia

$$dP = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma.$$

Integrando la última en una superficie Σ , la potencia instantánea a través de Σ está dada por el flujo de \vec{S} :

$$P = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

La (11.11) se llama **vector de Poynting** y tiene dirección y sentido iguales a las de la velocidad de propagación y su modulo representa la energía electromagnética que por unidad de tiempo cruza la unidad de superficie ortogonal a la dirección de propagación. El vector de Poynting tiene unidades Weber/m².

Aplicamos ahora estos resultados validos para cualquier onda electromagnética plana a una onda plana armónica polarizada linealmente, representada en el plano de polarización por

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t).$$

El vector de Poynting será

$$S = \varepsilon E^2 v = \varepsilon E_0^2 v \sin^2(kx - \omega t).$$

En la practica, fijada una cierta superficie ortogonal a x , es importante calcular el flujo medio y no el flujo instantáneo. Esto es debido a que la pulsación de las ondas electromagnéticas es en general muy grande (por la luz visible $\omega \approx 10^{15}$ rad/s) y los instrumentos son capaces de determinar solamente el valor medio de la energía recibida porque no pueden medir variaciones tan rápidas.

El valor medio del vector the Poynting es

$$\langle S \rangle = \varepsilon v \langle E^2 \rangle = \varepsilon v \frac{1}{t} \int_0^t E_0^2 v \sin^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2.$$

El valor no depende de ninguna fase inicial δ_0 ya que esta se suma a $kx - \omega t$ (por el calculo de la integral tenemos que acordarnos el calculo del valor eficaz de una cantidad sinusoidal y la definición de intensidad).

Además la intensidad transportada por una onda electromagnética plana armónica polarizada linealmente vale, véase figura 11.4

$$I = \langle S \rangle = \epsilon v \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2. \quad (11.12)$$

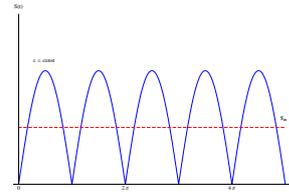


Figure 11.4: Intensidad transportada por una onda electromagnética

El campo eléctrico de una onda plana polarizada se puede pensar como la suma vectorial de dos campos eléctricos desfasados, ortogonales entre ellos y a la dirección de propagación, o sea:

$$E_y(x, t) = E_{0y} \sin(kx - \omega t), \quad E_z(x, t) = E_{0z} \sin(kx - \omega t - \delta),$$

por lo tanto podemos aplicar la (11.12) a cada componente y tenemos

$$I_y = \frac{1}{2} \epsilon v E_{0y}^2, \quad I_z = \frac{1}{2} \epsilon v E_{0z}^2$$

y la intensidad total, igual a la suma de las intensidades de cada componente, será

$$I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \epsilon v (E_{0y}^2 + E_{0z}^2) \quad (11.13)$$

que es independiente del desfase δ entre las componentes y por lo tanto del estado de polarización (lineal, elíptico o circular).

Si la onda no tiene polarización, quiere decir si el campo eléctrico tiene dirección que cambia casualmente, en media las componentes E_y y E_z son iguales; la (11.13) sigue siendo válida con tal que se consideren los valores medios de los cuadrados de las amplitudes.

Desde las ecuaciones precedentes podemos escribir:

$$\epsilon v = \epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{1}{Z} = \frac{n}{Z_0}$$

donde Z se llama impedancia característica del medio y n es el índice de refracción del medio. En el vacío la impedancia característica es

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$$

aquí $\Omega = \text{Ohm}$.

Ejercicio 11.3 Deducir la intensidad de las ondas electromagnéticas plana consideradas en los ejemplos 11.1 y 11.2. Encontrar también la intensidad de una onda electromagnética plana polarizada circularmente y no polarizada. Se considere $n = 1$.

Solución. Apliquemos a los casos la definición $I = S_m = \epsilon v (E^2)_m$.

A. Onda plana polarizada linealmente.

Sabemos que

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 = \frac{E_0^2}{2Z_0}.$$

Luego,

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v [(E_0 \cos \theta)^2 + (E_0 \sin \theta)^2] = I \cos^2 \theta + I \sin^2 \theta$$

y las componentes serán

$$I_y = I \cos^2 \theta, \quad I_z = I \sin^2 \theta.$$

B. Onda plana polarizada elípticamente.

En este caso tenemos

$$I = S_m = \varepsilon v (E^2)_m = \varepsilon v (E_y^2 + E_z^2)_m = \varepsilon v [E_{0y}^2 \sin^2(kx - \omega t) + E_{0z}^2 \cos^2(kx - \omega t)]_m.$$

La intensidad de la onda es

$$I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \varepsilon v E_{0y}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon v E_{0z}^2 = \frac{E_{0y}^2}{2Z_0} + \frac{E_{0z}^2}{2Z_0}.$$

C. Onda plana polarizada circularmente.

El resultado es igual al caso **B** poniendo $E_{0y} = E_{0z} = E_0$:

$$I = \frac{E_0^2}{Z_0}, \quad I_y = I_z = \frac{I}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 = \frac{E_0^2}{2Z_0}.$$

C. Onda plana polarizada circularmente.

Hemos dicho que en media las componentes E_y y E_z tienen que ser iguales entre ellas e iguales a $E/\sqrt{2}$, o sea tiene que valer la igualdad

$$(E_y^2)_m = (E_z^2)_m = \frac{1}{2} (E^2)_m,$$

y por lo tanto

$$I_y = I_z = \frac{I}{2}, \quad I = \varepsilon v (E^2)_m = \frac{1}{2} \varepsilon v (E_0^2)_m = \frac{(E_0^2)_m}{2Z_0}.$$

Está así verificada la validez de la ecuación (11.13) en los varios casos posibles. ■

11.4 Cantidad de movimiento de una onda electromagnética plana

Presión de radiación

Para demostrar que las ondas electromagnéticas transportan cantidad de movimiento aparte de energía, vamos a considerar una superficie plana Σ ortogonal a la dirección de propagación (eje x), véase figura 11.5.

Esta vez, vamos a suponer que en la superficie del material hay una carga eléctrica distribuida con una densidad superficial σ . La fuerza de Lorentz por unidad de superficie, ejercitada por los dos campos de la onda, es:

$$\vec{F} = \sigma (\vec{E} + \vec{v}_\sigma \times \vec{B})$$

donde v_σ es la velocidad que se comunica a las cargas por la fuerza eléctrica. La unidad de superficie absorbe por lo tanto la potencia:

$$\vec{F}_\sigma \cdot \vec{v}_\sigma = \sigma \vec{E} \cdot \vec{v}_\sigma + \sigma \vec{v}_\sigma \times \vec{B} \cdot \vec{v}_\sigma = \sigma v_\sigma E.$$

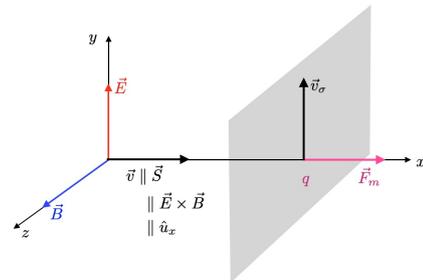


Figure 11.5: Onda incidente a la superficie Σ .

El término con \vec{B} desaparece ya que en el producto mixto hay dos vectores iguales y por lo tanto \vec{B} no contribuye a la potencia absorbida. ésta es siempre positiva ya que $\sigma \vec{E}$ y \vec{v}_σ son en cada instante paralelos y concordes.

En media la energía absorbida por unidad de tiempo y unidad de superficie, quiere decir la intensidad que cede la onda, es

$$I = \sigma \langle v_\sigma E \rangle.$$

No hay ningún efecto mecánico global en la superficie debido a esta absorción, esto porque el campo eléctrico es siempre paralelo a la superficie y así es la fuerza eléctrica. Por otro lado, la fuerza magnética da origen a un efecto mecánico, también si no hay absorción de energía debido a B , ya que la fuerza magnética es ortogonal a v_σ . Pero la fuerza magnética es ortogonal a la superficie Σ , donde están v_σ y \vec{B} , y es también concorde al producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ (o sea el versor \hat{u}_x), no importa el signo de σ . Pasando directamente a los valores medios, encontramos una fuerza magnética por unidad de superficie:

$$\vec{F}_m = \sigma \langle \vec{v}_\sigma \times \vec{B} \rangle_m = \sigma \langle v_\sigma B \rangle_m \hat{u}_x = \frac{\sigma}{c} \langle v_\sigma E \rangle_m \hat{u}_x = \frac{I}{c} \hat{u}_x$$

donde hemos utilizado las relaciones de las ondas electromagnética $E/B = v$, siendo v la velocidad de propagación de la onda electromagnética en el medio (aquí hemos considerado el caso en vacío, por lo tanto $v = c$).

Esta fuerza media por unidad de superficie corresponde a una presión media, llamada **presión de radiación**, que ejerce la onda electromagnética en la superficie Σ :

$$P_{\text{rad}} = \frac{I}{c}. \quad (11.14)$$

Por otro lado, $\vec{F}_m \Delta t$ es el impulso por unidad de superficie debido a la onda y por lo tanto tenemos que admitir que la onda cede por unidad de tiempo y por unidad de superficie la cantidad de movimiento \vec{F}_m . En conclusión, si la onda cede a Σ la energía I , entonces cederá también la cantidad de movimiento I/c .

Los resultados encontrados son válidos si la superficie es totalmente absorbente, quiere decir absorbe toda la energía que la *golpea*. Como veremos, una superficie en parte absorbe y en parte refleja la energía electromagnética incidente. La absorción completa es un caso límite. Otro caso límite es una superficie completamente reflectante, que no absorbe energía. En este último caso, la onda incidente después de la reflexión se propaga según la dirección $-\hat{u}_x$, la cantidad de movimiento cambia de sentido y el impulso comunicado a Σ es el doble a lo de la absorción completa. La presión de radiación será:

$$P_{\text{rad}} = \frac{2I}{c}. \quad (11.15)$$

Como último caso, supongamos que la dirección de propagación de la onda plana incidente forme un ángulo θ con la normal a la superficie Σ . En comparación a los dos casos anteriores, ahora tenemos dos diferencias:

1. la componente de la cantidad de movimiento de la onda que participa a la interacción con la superficie es la componente normal y esto lleva a un factor multiplicativo $\cos \theta$;

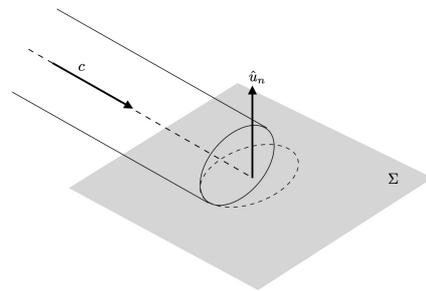


Figure 11.6: Onda incidente que forma un ángulo θ con la superficie Σ . En rojo, la área proyectada en la superficie Σ

2. a paridad de sección de la onda incidente, la area golpeada es mayor y por lo tanto la presión menor, siempre de un factor $\cos \theta$.

Por lo tanto tenemos:

$$P_{\text{rad}} = \frac{I}{c} \cos \theta$$

$$P_{\text{rad}} = \frac{2I}{c} \cos \theta$$

respectivamente absorción y reflexión completa, véase figure 11.6.

Ejercicio 11.4 Sobre una superficie plana inciden muchas ondas, distribuidas isotropicamente en el interval $0 \leq \theta \leq \pi/2$, siendo θ el ángulo entre dirección de incidencia y normal a la superficie. Calcular la presión de radiación en los dos casos de superficie completamente absorbente y completamente reflectante.

Solución. Calculemos el valor medio de la presión en el ángulo sólido visto por la superficie plana, que es mitad del ángulo total:

$$(P_{\text{rad}})_m = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} k \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} k \cos^2 \theta 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{k}{3}. \quad (11.16)$$

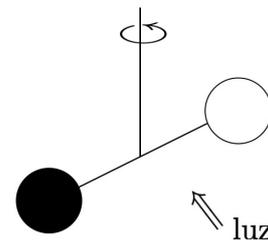
Por lo tanto, siendo k o I/c o $2I/c$.

absorción completa $(P_{\text{rad}})_m = \frac{I}{3c}$,

reflección completa $(P_{\text{rad}})_m = \frac{2I}{3c}$, ■

La acción de la presión de radiación se pone en evidencia con una balanza de torsión: se fijan en los extremos de la varilla un disco reflectante, por ejemplo, formado por un espejo, y un disco absorbente, que puede ser de una lámina metálica recubierta de negro de carbón. Iluminando el sistema con una onda de luz de intensidad suficiente, observamos una rotación de la balanza en el sentido indicado en figura, que demuestra que la presión sobre el espejo es mayor que sobre el disco negro, como dicen las ecuaciones (11.14) y (11.15).

El instrumento está puesto en un contenedor de vidrio donde se practica un alto vacío. Si hubiera aire u otro gas, se observaría una rotación en sentido contrario. De hecho, el disco negro, que absorbe energía, se calienta y cede calor al gas que lo rodea haciendo que la velocidad media cuadrática de las moléculas aumente localmente: estas moléculas, a través de las colisiones, ejercen una presión sobre el disco negro que es mayor que la ejercida sobre el disco especular, en el cual la absorción de energía por la onda es casi despreciable. Este efecto enmascara por completo el efecto contrario debido a la presión de la radiación.



Resumen sobre energía y cantidad de movimiento de una onda electromagnética

Resumimos y ampliamos los resultados obtenidos hasta ahora, considerando por simplicidad la propagación en el vacío.

Una onda electromagnética plana transporta una cierta cantidad de energía U , que está distribuida con la densidad instantánea u a través de $u = 2u_e = \epsilon E^2$. En la practica es útil calcular un valor medio y utilizamos la intensidad I , la cual es la energía de la onda a través una superficie ortogonal a la propagación por unidad de tiempo y unidad de superficie.

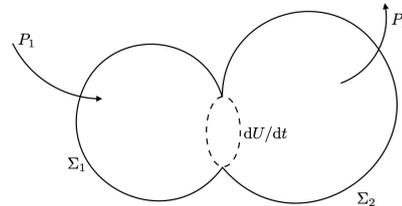
A la energía transportada por la onda está indisolublemente atado un transporte de cantidad de movimiento y podemos escribir

cant. de mov. de una onda de energía U	$\vec{p} = \frac{U}{c} \hat{u}_x$
cant. de mov. por unidad de volumen (instantánea)	$\vec{p}_\tau = \frac{u}{c} \hat{u}_x$
cant. de mov. media por unidad superficie y de tiempo	$\vec{p}_I = \frac{I}{c} \hat{u}_x$

Hemos visto que la potencia transportada por una onda electromagnética se puede expresar a través del flujo del vector de Poynting:

$$P = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \hat{u}_n d\Sigma. \tag{11.17}$$

Ahora imaginamos una superficie Σ cerrada que delimita un volumen τ , véase figura 11.7. Supongamos que a través de Σ_1 entra una potencia P_1 y que a través de Σ_2 salga una potencia P_2 , con P_1 distinto que P_2 . La diferencia $P_1 - P_2$ se corresponde a la potencia cedida al volumen τ :



$$P_1 - P_2 = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} u d\tau.$$

Cada termino se puede calcular utilizando la (11.17):

Figure 11.7: Volumen τ contenido en Σ .

$$P_1 = - \int_{\Sigma_1} \vec{S} \cdot \vec{u}_n d\Sigma_1, \quad P_2 = \int_{\Sigma_2} \vec{S} \cdot \vec{u}_n d\Sigma_2$$

$$\rightarrow P_1 - P_2 = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \vec{u}_n d\Sigma.$$

Aplicando el teorema de la divergencia, encontramos:

$$\int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{S} d\tau = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} u d\tau = - \int_{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau.$$

Por lo tanto localmente tenemos

$$\nabla \cdot \vec{S} = - \frac{\partial u}{\partial t}$$

quiere decir que la divergencia del vector de Poynting es igual al opuesto de la variación temporal de la densidad de energía. Un flujo de energía electromagnética a través de una superficie cerrada se corresponde a una disminución o a un aumento de la energía distribuida dentro la superficie.

Se puede demostrar que si en el volumen τ hay cargas eléctricas, las cuales bajo la acción del campo \vec{E} se genera una corriente de densidad \vec{j} , el balance energético completo es

$$\nabla \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} = - \frac{\partial u}{\partial t}$$

por un lado tenemos la variación de energía, por otro tenemos la energía dada por las ondas y la energía gastada para mantener las cargas en movimiento.

Añadimos, sólo por conocimiento, que las ondas electromagnéticas transportan también un momento angular y que hay que considerarlo en eventuales aplicaciones de la relativa ley de conservación.

11.5 Ondas electromagnéticas planas, esféricas, cilíndricas

Una onda electromagnética plana que se propaga en una dirección cualquiera se puede representar como

$$E = E_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t);$$

\vec{r} es el radio vector que une el punto O con el punto P del frente de onda y \vec{k} es el vector de propagación, de módulo $k = 2\pi/\lambda$ y dirección y sentido coincidentes con aquellos de propagación.

En un sistema de coordenadas cartesianas tenemos

$$E(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t),$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}.$$

En un medio indefinido homogéneo e isótropo las ecuaciones de Maxwell proporcionan también ondas esféricas, con función

$$E = \frac{E_0}{r} \sin(kr - \omega t),$$

donde E_0 equivale numéricamente a la amplitud del campo eléctrico para $r = 1$ m. El campo eléctrico y el campo magnético se propagan con velocidad v a lo largo de los radio vector r que salen del punto O donde se encuentra la fuente idealmente puntual. Dado un plano perpendicular a un determinado radio \vec{r} , \vec{E} y \vec{B} pertenecen a este plano (la onda es transversal) y en cada instante se siguen aplicando las relaciones

$$E = Bv, \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{v} \hat{u}_r.$$

El vector de Poynting está siempre definido por

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \tag{11.18}$$

y la intensidad

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v \frac{E_0^2}{r^2} = \frac{n}{2Z_0} \frac{E_0^2}{r^2},$$

inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r de la fuente.

Una fuente rectilínea larga y delgada puede dar lugar a una onda cilíndrica para la cual las relaciones

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t), \quad I = \frac{1}{2} \epsilon v \frac{E_0^2}{r} = \frac{n}{2Z_0} \frac{E_0^2}{r}, \tag{11.19}$$

con E_0 amplitud del campo eléctrico para $r = 1$ m y r distancia del eje en el que se encuentra la fuente. Si se limita el frente de onda esférico o cilíndrico y se coloca a una gran distancia de la fuente, se obtiene un frente de onda plano y la amplitud de la onda es aproximadamente constante a lo largo de una distancia no demasiado larga. Recordemos que las direcciones a lo largo de las cuales se propagan las ondas identifican una serie de rayos, ortogonales en cada punto a los frentes de onda

N Radiación solar. Origen de la energía solar

El sol es una fuente muy intensa de ondas electromagnéticas. El origen de esta emisión no se tratará en este libro; mientras tanto, digamos que en la superficie terrestre, la intensidad de la radiación solar es aproximadamente $I = 1.4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$. Dado el gran valor de la distancia sol-tierra ($r \simeq 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$) consideramos localmente planas las ondas emitidas por el sol y calculamos las amplitudes de los campos \vec{E} y \vec{B} en la superficie terrestre:

$$E_0 = \sqrt{2Z_0 I} = \sqrt{2 \cdot 377 \cdot 1.4 \cdot 10^3} = 1.03 \cdot 10^3 \text{ V/m},$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 3.43 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

La presión de radiación solar sobre un objeto, según las ecuaciones 11.14 y 11.15, vale

$$P_{rad} = \frac{I}{c} = 4.67 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}, \quad P_{rad} = \frac{2I}{c} = 9.34 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}, \quad (11.20)$$

para un cuerpo absorbente y uno reflectante respectivamente. Estos valores son unos 11 órdenes de magnitud inferiores a los de la presión atmosférica. Si imaginamos que la intensidad medida en la superficie terrestre se distribuye uniformemente sobre una superficie esférica de radio $r = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, tenemos una estimación de la potencia de la fuente solar, también conocida como luminosidad del sol:

$$P_{sol} = I 4\pi r^2 = 3.96 \cdot 10^{26} \text{ W}. \quad (11.21)$$

La fuente de la energía solar son los procesos de fusión de núcleos que tienen lugar dentro del sol. Se piensa que el proceso principal es la fusión de cuatro núcleos de hidrógeno en un núcleo de helio mediante una cadena de reacciones sucesivas. La diferencia de masa entre los estados inicial y final es

$$\Delta m = 4m_H - m_{He} = 4 \cdot 1.6726 \cdot 10^{-27} - 6.6420 \cdot 10^{-27} = 0.0484 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (11.22)$$

y a esto corresponde la energía liberada

$$\Delta U = \Delta m c^2 = 4.356 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 27.3 \text{ MeV} \quad (11.23)$$

La temperatura en el núcleo del sol, formado principalmente por hidrógeno, es de aproximadamente $1.5 \cdot 10^7 \text{ K}$: la energía del movimiento de agitación térmica de los núcleos de hidrógeno es tal que son capaces de superar la repulsión eléctrica y acercarse tanto entre sí que se ven afectados por la fuerza nuclear atractiva, causada por la fusión de dos núcleos. La energía liberada por la fusión aparece en forma de energía cinética de las partículas que se emiten durante las reacciones (incluidos los neutrinos) y la energía electromagnética; en su mayor parte es reabsorbida por el medio circundante. La combinación de todos los procesos permite una situación de equilibrio dinámico, con un flujo de energía desde el interior hacia la superficie del sol, que se encuentra a unos $6 \cdot 10^3 \text{ K}$, una temperatura demasiado baja para que se produzcan procesos de fusión. La radiación que recibimos es emitida por los átomos de las capas superficiales, que son excitados por colisiones térmicas. Una estimación del número de fusiones por segundo necesarias para generar la potencia emitida es

$$n_f = \frac{P_{sol}}{\Delta U} = \frac{3.96 \cdot 10^{26}}{4.36 \cdot 10^{-12}} = 9.1 \cdot 10^{37} \text{ fusiones/s}$$

y en un segundo se consume una masa de hidrógeno

$$M_H = 4m_H n_f = 6.1 \cdot 10^{11} \text{ kg/s},$$

es decir, en un año $1.9 \cdot 10^{19} \text{ kg}$. La masa del sol es de $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$: para consumir la mitad, es decir, $1 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, se necesitan $\simeq 5 \cdot 10^{10}$ años. Hemos mencionado la emisión de neutrinos. Éstos consiguen atravesar la masa solar y la medición de su flujo en la Tierra, mediante experimentos muy refinados, permite verificar los supuestos del modelo solar actualmente aceptado.