MI3010
FENÓMENOS DE TRANSPORTE EN METALURGIA EXTRACTIVA

Prof. Christian Ihle
Prof. Leandro Voisin

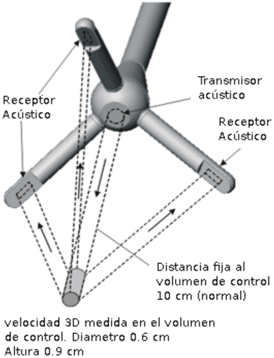
FCFM Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería de Minas

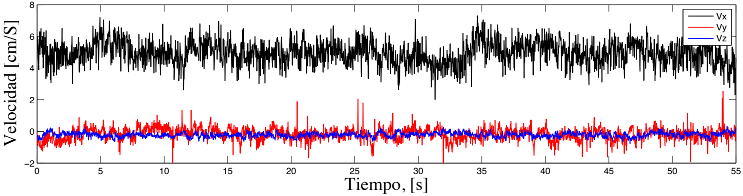
Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Objetivos

- Definir provisionalmente el concepto de turbulencia
- Conocer el concepto de capa límite y su relevancia

Medición de velocidad (3D) en un canal

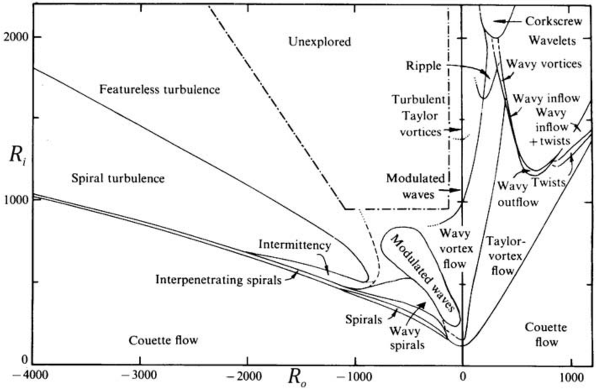




Valores críticos para turbulencia

Tuberías En tuberías, se tiene transición a la turbulencia para valores del número de Reynolds cercanos a 2100 ($Re_X = \rho\langle u\rangle D/\mu$).

Cilindros concéntricos Para flujos entre cilindros concéntricos se define números de Reynolds asociados al cilindro interior y exterior: $Re_{X\,i} = r_i\Omega_i d/\nu$, $Re_{X\,o} = r_o\Omega_o d/\nu$.



Las ecuaciones promediadas de Reynolds

A pesar de que la ecuación de Navier-Stokes es útil tanto en el régimen laminar como en el turbulento, es conveniente expresar la velocidad en términos de una componente media (*promedio sobre la turbulencia*) y otra componente fluctuante. Así, podemos escribir:

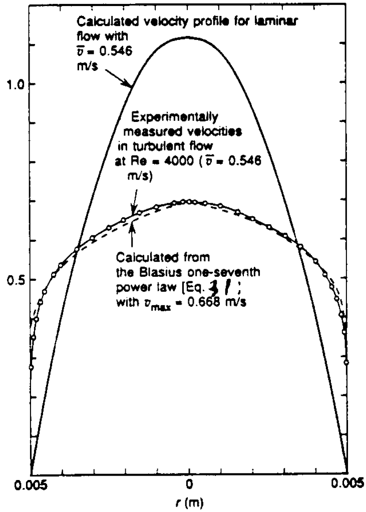
$$u_i = \bar{u}_i + u_i', \tag{1}$$

donde el promedio de las fluctuaciones de velocidad es cero. Se puede demostrar que en régimen estacionario (valor medio de la velocidad independiente del tiempo), la ecuación de Navier-Stokes se puede escribir como (notación de Einstein):

$$\rho \overline{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \rho \overline{f}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[-\overline{p}\delta_{ij} + 2\mu \bar{\varepsilon}_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'}\right] \tag{2}$$

El término de la derecha se denomina *tensor de esfuerzos de Reynolds* y da cuenta de la turbulencia. Existe una variedad de métodos para modelar estos términos y así evitar el costo computacional prohibitivo que tiene resolver la ecuación de Navier-Stokes en flujos turbulentos.

Ejemplo: flujo *débilmente* turbulento



Para flujo turbulento ($Re_X > 4000$) se puede usar la ecuación semi-empírica de Blasius para calcular el perfil de velocidad.

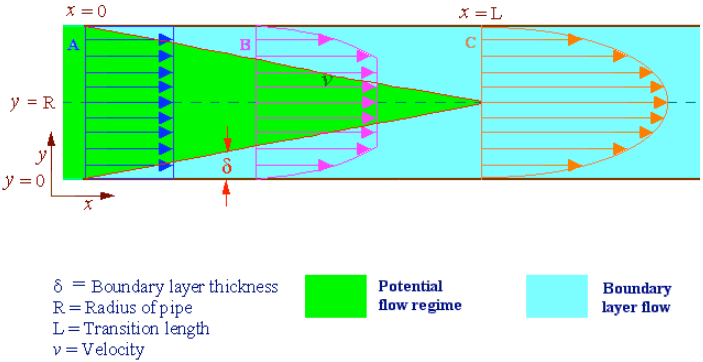
$$v(r) = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} v_{\text{centro}}, \tag{3}$$

de donde se obtiene,

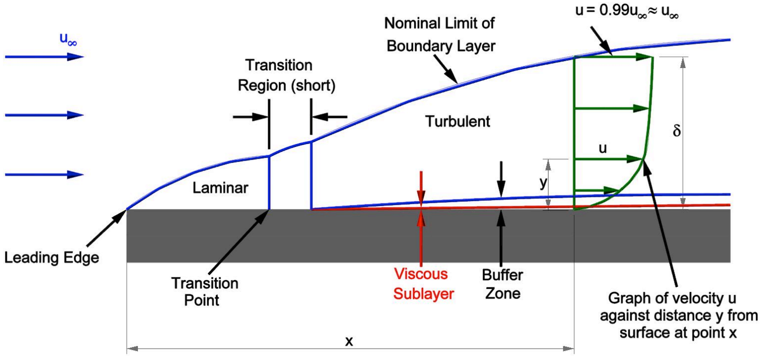
$$\langle v \rangle = \frac{v_{\text{centro}}}{\pi R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} 2\pi r \, \mathrm{d}r \tag{4}$$

$$= 0.817\, v_{\text{centro}}. \tag{5}$$

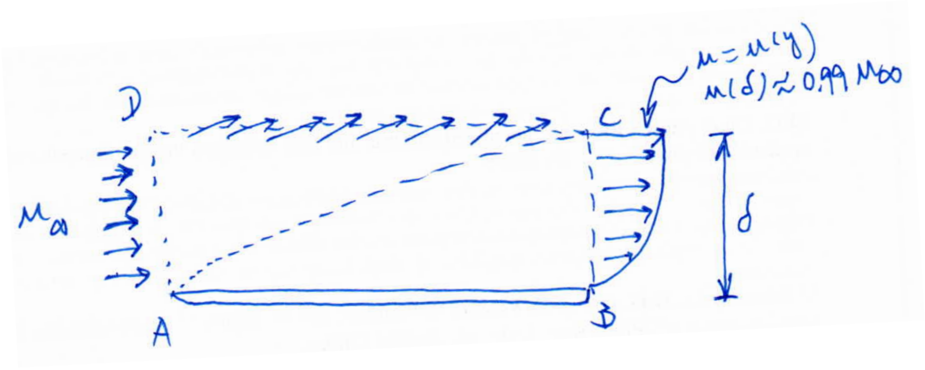
¿Qué es la capa límite?



Development of boundary-layer flow in pipe


u∞
Transition
Region (short)
Nominal Limit of
Boundary Layer
u = 0.99u∞ ≈ u∞
Turbulent
δ
u
y
Laminar
Leading Edge
Transition
Point
Viscous
Sublayer
Buffer
Zone
Graph of velocity u
against distance y from
surface at point x
x

Fuerza sobre una placa
(profundidad W)



Flujos másicos a través de las caras del volumen de control:

$$\frac{\dot{m}_{AD}}{W} = \int_0^\delta \rho u_\infty \mathrm{d}y = \rho \delta u_\infty \tag{6}$$

$$\frac{\dot{m}_{BC}}{W} = \rho \int_0^\delta u(y) \mathrm{d}y. \tag{7}$$

Por conservación de masa,

$$\frac{\dot{m}_{AD}}{W} = \frac{\dot{m}_{BC}}{W} + \frac{\dot{m}_{CD}}{W} \tag{8}$$

$$\frac{\dot{m}_{CD}}{W} = \int_0^\delta \rho [u_\infty - u(y)] \mathrm{d}y. \tag{9}$$

Paréntesis

$$M_u = \int_A \rho u \vec{u} \cdot \hat{n} \mathrm{d}A \tag{10}$$

$$= \int_A u \underbrace{(\rho \vec{u} \cdot \hat{n} \mathrm{d}A)}_{=\rho \mathrm{d}Q = \mathrm{d}\dot{m}} \tag{11}$$

$$= \int_{\dot{m}} u \, \mathrm{d}\dot{m}. \tag{12}$$

En consecuencia, si $u = u_\infty$ (constante), el flujo de momentum a través de la interfaz se puede escribir como:

$$M_{u_\infty} = u_\infty \dot{m} \quad \text{(si } u_\infty \text{ es constante)} \tag{13}$$

Suma de fuerzas en la dirección x:

$$\frac{\sum F_{\mathrm{ext},x}}{W} = \underbrace{\frac{M_{BC}}{W} + \frac{M_{CD}}{W}}_{\text{salida}} - \underbrace{\frac{M_{AD}}{W}}_{\text{entrada}} \tag{14}$$

$$= \int_0^\delta \rho u^2 \mathrm{d}y + u_\infty \int_0^\delta [u_\infty - u(y)] \mathrm{d}y - \int_0^\delta \rho u_\infty^2 \mathrm{d}y \tag{15}$$

$$= \int_0^\delta \rho u (u - u_\infty) \, \mathrm{d}y < 0 \tag{16}$$

Esto quiere decir que aparece una fuerza externa al fluido apuntando hacia la izquierda (el fluido responde con una fuerza en sentido opuesto).

Definiciones

Capa límite (δ)

$$\delta = 0.99 u_\infty. \tag{17}$$

Espesor de desplazamiento (δ^*)

Es tal que $u_\infty \delta^* = \int_0^\infty [u_\infty - u(y)] \,\mathrm{d}y$, de donde:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(y)}{u_\infty}\right) \mathrm{d}y. \tag{18}$$

Análogamente definimos un espesor asociado a la capa de donde hay una transferencia activa de momentum. El *espesor de momentum*, θ es tal que:

$$\rho u_\infty^2 \theta = -\int_0^\infty \rho u (u - u_\infty)\,\mathrm{d}y \tag{19}$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right)\mathrm{d}y. \tag{20}$$

Régimen permanente 2D

Escribiendo la ecuación de Navier-Stokes en régimen permanente (coordenada x):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{21}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{22}$$

$$\hat{p} = p - \rho\vec{g}\cdot\hat{\boldsymbol{\imath}}x - \rho\vec{g}\cdot\hat{\boldsymbol{\jmath}}y \quad \text{(presión motriz)} \tag{23}$$

Escalas

$$u \sim U \Rightarrow u^* \equiv u/U \tag{24}$$

$$x \sim X \Rightarrow x^* \equiv x/X \tag{25}$$

$$y \sim \delta \Rightarrow y^* \equiv y/\delta \tag{26}$$

$$p \sim \rho U^2 \Rightarrow \hat{p}^* \equiv p/\rho U^2 \tag{27}$$

Ecuaciones adimensionales

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_X}\left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{X}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right], \tag{28}$$

con $Re_X = UX/\nu$. Si $\delta \ll X$ (lejos del borde de ataque), entonces

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_X}\left(\frac{X}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}. \tag{29}$$

Si $\frac{1}{Re_X}\left(\frac{X}{\delta}\right)^2 \sim 1$ (para que el término difusivo sea del mismo orden que los demás términos en (29)), entonces se tendrá:

$$\frac{\delta}{X} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_X}} \qquad (\delta \propto \sqrt{X}). \tag{30}$$

En este caso, la ecuación de capa límite (adimensional), se escribe:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}, \tag{31}$$

y con dimensiones,

$$\boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.} \tag{32}$$

De la solución numérica (ecuación de Blasius), se obtiene:

$$\frac{\delta}{X} = \frac{5}{\sqrt{Re_X}}; \quad \frac{\delta^*}{X} = \frac{1.72}{\sqrt{Re_X}}; \quad \frac{\theta}{X} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_X}}. \tag{33}$$

$(\theta < \delta^* < \delta)$

Componente y de la ecuación de capa límite laminar

Ecuación de momentum 2D en régimen permanente:

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \tag{34}$$

Propuesto: Muestre que

$$\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial y^*} \sim \mathcal{O}\left[\left(\frac{\delta}{X}\right)^2\right], \tag{35}$$

i.e., la presión motriz se mantiene constante en la capa límite, para un x fijo (la presión se mantiene constante para un x fijo dentro de la capa límite).

Transición laminar-turbulento

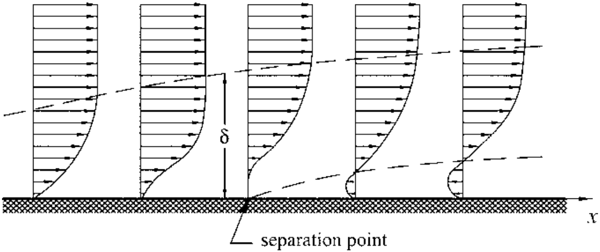
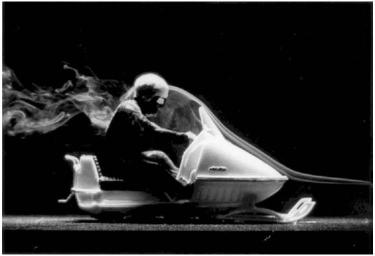
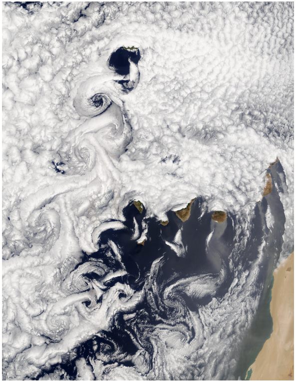


FIGURE 9.8 Velocity profiles in a boundary layer in the vicinity of separation.

Ejemplos





$$\frac{U\delta^*_{\rm crit}}{\nu} = 520. \qquad (36)$$