MI3010
Fenómenos de transporte en metalurgia extractiva

Prof. Christian Ihle
Prof. Leandro Voisin

FCFM Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería de Minas

1. La ecuación de movimiento en un fluido cualquiera
2. Generalización de la ley de viscosidad de Newton
3. La ecuación de Navier-Stokes

Objetivos

- Conocer la ecuación de movimiento en un fluido cualquiera
- Deducir la ecuación de Navier-Stokes
- Aplicar la ecuación de Navier-Stokes a problemas simples

El tensor de esfuerzos

Definamos el tensor de esfuerzos moleculares sobre el fluido, Π_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, que incluye esfuerzos normales y de corte:

$$\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}} = \begin{pmatrix} \Pi_{xx} & \Pi_{xy} & \Pi_{xz} \\ \Pi_{yx} & \Pi_{yy} & \Pi_{yz} \\ \Pi_{zx} & \Pi_{zy} & \Pi_{zz} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Aquí se contempla la misma notación que en el caso de la ley de Newton-Navier (normal apuntando en la dirección indicada por el primer subíndice y dirección del esfuerzo indicada por el segundo).

Balance de fuerzas

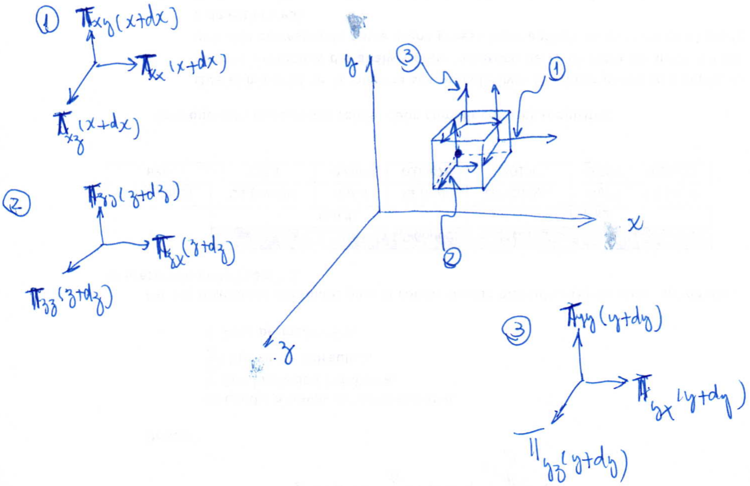
Escribiendo la segunda ley de Newton sobre un elemento material diferencial de lados $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ y $\mathrm{d}z$ (volumen $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$) y densidad $\rho(x, y, z, t)$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\sum \vec{F}_{\text{ext}} &= \frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}M \cdot \vec{v})}{\mathrm{D}t} && (2)\\
&= \mathrm{d}M \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} + \vec{v}\underbrace{\frac{\mathrm{D}\mathrm{d}M}{\mathrm{D}t}}_{=0} && (3)\\
&= \mathrm{d}M \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \rho \mathrm{d}V \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}. && (4)
\end{aligned}
$$

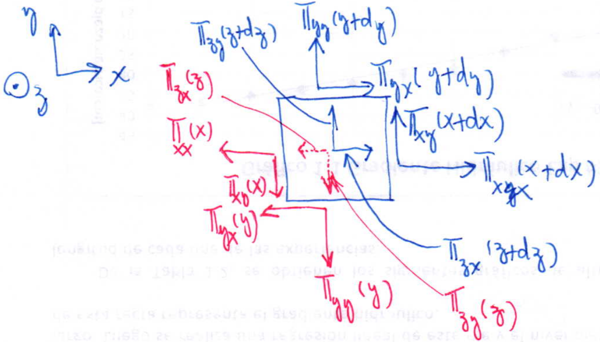
El lado izquierdo de la ecuación corresponde a las fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen:

Fuerzas sobre las caras: Pueden ser normales o tangenciales, y se expresan en términos del tensor de fuerzas moleculares, $\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}$.

Fuerzas sobre el centro de masa: gravedad, campos magnéticos, etc.



①
$\Pi_{xy}(x+dx)$
$\Pi_{xx}(x+dx)$
$\Pi_{xz}(x+dx)$
②
$\Pi_{zy}(z+dz)$
$\Pi_{zx}(z+dz)$
$\Pi_{zz}(z+dz)$
y
x
z
③
①
②
③
$\Pi_{yy}(y+dy)$
$\Pi_{yx}(y+dy)$
$\Pi_{yz}(y+dy)$


y
x
z
$\Pi_{zy}(z+dz)$
$\Pi_{yy}(y+dy)$
$\Pi_{yx}(y+dy)$
$\Pi_{xy}(x+dx)$
$\Pi_{xx}(x+dx)$
$\Pi_{zx}(z)$
$\Pi_{xx}(x)$
$\Pi_{xy}(x)$
$\Pi_{yx}(y)$
$\Pi_{yy}(y)$
$\Pi_{zx}(z+dz)$
$\Pi_{zy}(z)$

Fuerzas sobre el eje x

$$
\begin{aligned}
\sum F_{\text{ext},x} = {} & \left(\Pi_{xx} + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \Pi_{xx}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \\
& \left(\Pi_{yx} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \Pi_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \\
& \left(\Pi_{zx} + \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \Pi_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
& + \rho f_x \mathrm{d}V \qquad (5) \\
= {} & \left(\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial z}\right)\mathrm{d}V + \rho f_x \mathrm{d}V \qquad (6)
\end{aligned}
$$

en que f_x representa las fuerzas másicas externas en la dirección x.

Análogamente, haciendo el balance de fuerzas en y y z (propuesto):

$$\sum F_{\text{ext},y} = \left(\frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zy}}{\partial z} \right) \mathrm{d}V + \rho f_y \mathrm{d}V \tag{7}$$

$$\sum F_{\text{ext},z} = \left(\frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial z} \right) \mathrm{d}V + \rho f_z \mathrm{d}V. \tag{8}$$

De manera compacta, se puede escribir:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \left(\rho \vec{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Pi}}} \right) \mathrm{d}V. \tag{9}$$

Por otro lado, habíamos visto que la derivada material se puede expresar, en descripción euleriana, como $\mathrm{D}u_j/\mathrm{D}t = \partial u_j/\partial t + \vec{v}\cdot\nabla u_j$. Para las tres componentes de velocidad podemos obtener, en notación compacta*,

$$\rho \mathrm{d}V \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right)\mathrm{d}V \tag{10}$$

Igualando (9) y (10) se obtiene

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right) = \rho\vec{f} + \nabla\cdot\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}.} \tag{11}$$

Esta ecuación es válida para cualquier fluido (no tiene que ser necesariamente un fluido newtoniano). ¿Cuáles son las condiciones sobre la velocidad?

*En rigor operador gradiente se aplica sobre un campo escalar. La notación $\nabla\vec{v}$ quiere decir $[\nabla u\ \nabla v\ \nabla w]$, donde cada una de estas componentes es un vector columna y el vector $\vec{v}$ es un vector fila, de donde se obtiene que $\vec{v}\cdot\nabla v$ es un vector fila también.

Fluidos newtonianos

El tensor de esfuerzos moleculares se puede escribir de la siguiente forma:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \tag{12}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}} = -p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Aquí, $p > 0$ es la presión termodinámica del fluido. Por otro lado, τ_{ij} representa los esfuerzos ejercidos sobre el elemento de fluido. Con esta definición, para el caso de un fluido en reposo, se tendrá que $\tau_{ij} = 0$, lo que implica que $\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zz} = -p$, y se recupera la condición hidrostática.

$$\tag{14}$$

Ec. de movimiento + fluido de Newton = Navier Stokes

Veamos el caso de un fluido **incompresible**. Usando la ley de viscosidad de Newton, en (11), se tiene:
Componente x:

$$\rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} &= 2\mu \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
&= 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 2\mu \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
&= \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) && (16) \\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) && (17)
\end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \tag{18}$$

$$= \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]$$

$$= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{19}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \tag{20}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \tag{21}$$

Navier-Stokes, fluido incompresible

Vectorialmente,

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} + \nu \nabla^2 \vec{u},} \tag{22}$$

con:

ν: μ/ρ (viscosidad cinemática)

∇^2: operador laplaciano:

$$\nabla^2 F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \tag{23}$$

(22) más la ecuación de continuidad ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$, con ρ constante) constituyen 4 EDP escalares y 4 incógnitas.

Coordenadas cilíndricas

Navier-Stokes†:

$$\rho\left[\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}-\frac{V_\theta^2}{r}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}\right]=F_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}-\frac{V_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left[\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{V_rV_\theta}{r}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right]=F_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left[\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right]=F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)$$

Continuidad:

$$\nabla\cdot\overrightarrow{V}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial Vz}{\partial z}=0$$

† Note que $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$

Coordenadas esféricas

Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{V_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi}-\frac{V_\theta^2}{r}-\frac{V_\phi^2}{r}\right)$$

$$=F_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}-\frac{2V_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\phi^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}-\frac{2V_\theta\cot\theta}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_rV_\theta}{r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{V_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\phi}-\frac{V_\phi^2\cot\theta}{r}\right)$$

$$=F_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu\left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r^2\sin^2\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\phi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial V_\theta}-\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_\phi}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\phi}{\partial r}+\frac{V_rV_\phi}{r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta}+\frac{V_\theta V_\phi\cot\theta}{r}+\frac{V_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\right)$$

$$=F_\phi-\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\mu\left[\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V_\phi}{\partial r}-\frac{V_\phi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi^2}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi}+\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\phi}\right]$$

Continuidad:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{2V_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{V_\theta\cot\theta}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}=0$$