MI3010
Fenómenos de transporte en metalurgia extractiva

Prof. Christian Ihle
Prof. Leandro Voisin

FCFM Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería de Minas

Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

1. Flujo a través de un volumen de control sin pérdidas de energía
2. Balances de envoltura
3. Generalización la ley de viscosidad de Newton

Objetivos

- Realizar balances de envoltura en problemas de transporte de momentum, con y sin efectos moleculares en geometrías simples
- Conocer la ley de Newton generalizada

$\vec{b} = \rho\vec{u}$ (vector momentum por unidad de volumen)

Supongamos que para la componente j se tiene $b_j = \rho u_j$, $j \in \{1,2,3\}$ (momentum por unidad de volumen). Supongamos además $\partial u_j/\partial t = 0$ (régimen permanente) y $\rho = \rho_0$ (constante). Reemplazando,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_\Omega \rho u_j(\vec{x},t)\,\mathrm{d}\Omega = \int_A \rho u_j\,\vec{u}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A \tag{1}$$

Por otro lado, en virtud de la segunda ley de Newton,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_\Omega \rho u_j\,\mathrm{d}\Omega = \sum F_{\mathrm{ext},j}, \quad j \in \{1,2,3\} \tag{2}$$

Fuerzas externas

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_b + \vec{F}_\tau + \vec{F}_p + \vec{F}_r \tag{3}$$

- $\vec{F}_b$ Fuerzas sobre el centro de masa del volumen de control (gravedad, magnéticas, etc.)
- $\vec{F}_\tau$ Fuerzas en las caras del volumen de control paralelas al flujo (relacionadas con *esfuerzos de corte*)
- $\vec{F}_p$ Fuerzas en las caras del volumen de control normales al volumen de control (relacionadas con la *presión*)
- $\vec{F}_r$ Fuerzas restitutivas sobre el volumen de control

De (1)-(3):

$$F_{b,j} + F_{\tau,j} + F_{p,j} + F_{r,j} = \int_A \rho u_j \, \vec{u} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A \tag{4}$$

- Régimen permanente
- Densidad constante

Caso simple

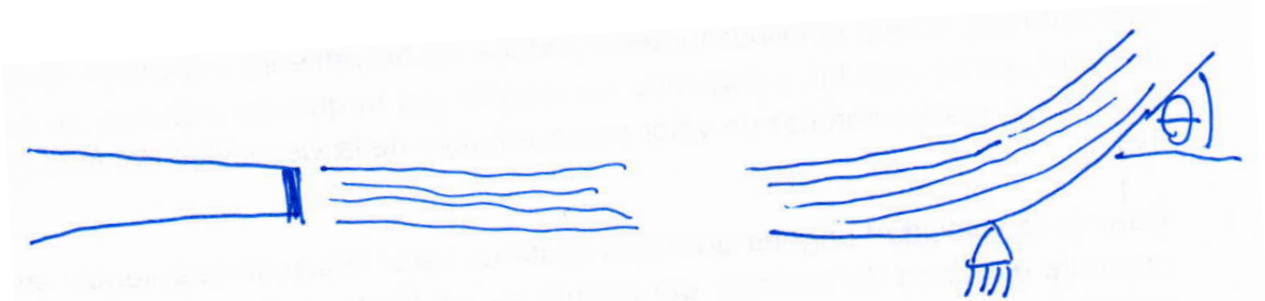
Si el campo de velocidad es constante en las secciones de entrada y salida, entonces:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \rho Q_{\text{out}} \vec{u}_{\text{out}} - \rho Q_{\text{in}} \vec{u}_{\text{in}} \tag{5}$$

$$= \rho Q \left(\vec{u}_{\text{out}} - \vec{u}_{\text{in}} \right) \tag{6}$$

donde Q es el caudal que para por el volumen de control (demostrarlo).

Ejemplo: fuerza sobre un codo



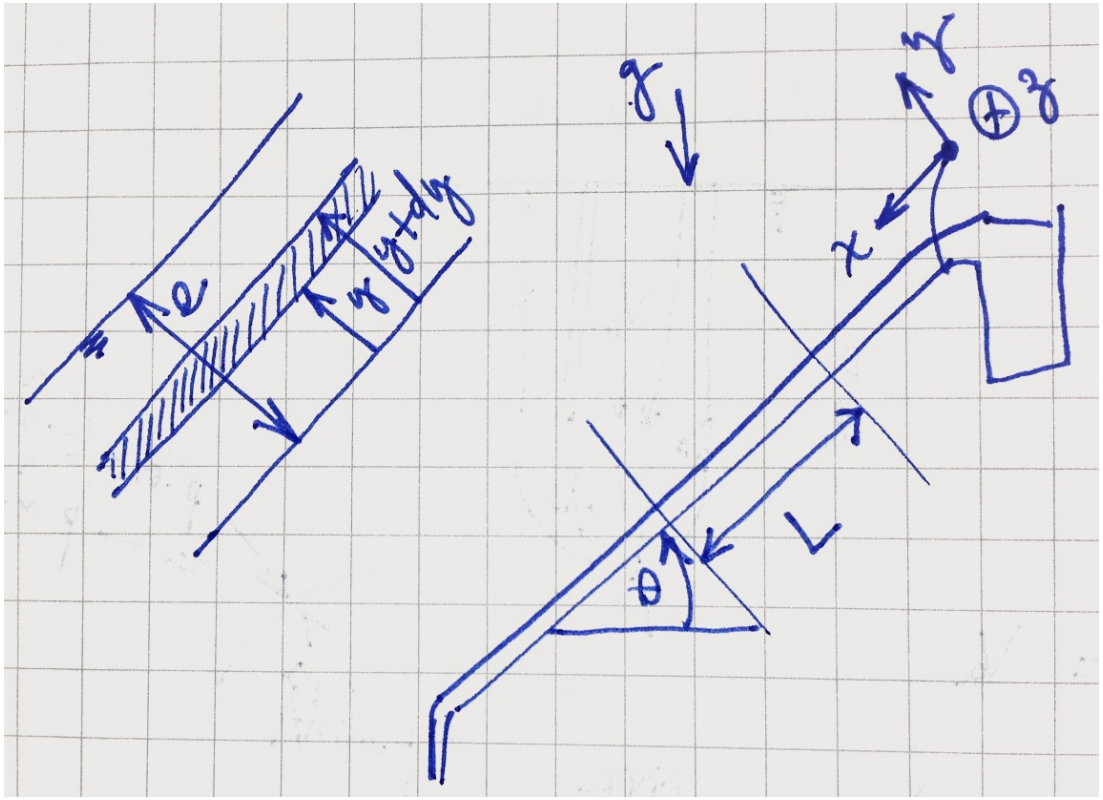
$$R_x = \frac{\rho Q^2}{A}(\cos\theta - 1)$$

$$R_y = \frac{\rho Q^2}{A}\sin\theta$$

- ¿Cómo son las fuerzas de presión en la entrada/salida del volumen de control?
- ¿Cómo es el perfil de velocidad en las secciones de salida/entrada en este caso?
- ¿Qué estamos obviando en este análisis?

Ejemplo: flujo viscoso con superficie libre sobre un plano inclinado

- Régimen permanente
- Flujo uniforme ($\partial u / \partial x = 0$)



$\sum F_x$:

$$\mathrm{d}F_{b,x} = \rho g \sin\theta W L \mathrm{d}y \tag{7}$$

$$\mathrm{d}F_{\tau,x} = (\underbrace{\tau_{yx}(y+\mathrm{d}y)}_{\equiv \tau_{(y+\mathrm{d}y)x}} - \tau_{yx}(y))LW. \tag{8}$$

Por otro lado, a la entrada y la salida del volumen de control diferencial, se tiene que:

$$\int_A \rho u \vec{u} \cdot \hat{n} \mathrm{d}A = \underbrace{\rho u^2 W \mathrm{d}y}_{\substack{\text{flujo convectivo} \\ \text{de salida en } x}} - \underbrace{\rho u^2 W \mathrm{d}y}_{\substack{\text{flujo convectivo} \\ \text{de entrada en } x}} \tag{9}$$

$$= 0. \tag{10}$$

Por otro lado,

$$\mathrm{d}F_{p,x=x_0} + \mathrm{d}F_{p,x=x_0+L} = p(y)\mathrm{d}yW + (-p(y))\mathrm{d}yW = 0. \tag{11}$$

Por otro lado,

$$\tau_{(y+\mathrm{d}y)x} - \tau_{yx} \approx \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{12}$$

Además, $\partial\tau_{yx}/\partial y = \mathrm{d}\tau_{yx}/\mathrm{d}y$ (flujo uniforme y permanente). Reemplazando, encontramos para $\sum F_x$:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{yx}}{\mathrm{d}y} + \rho g \sin\theta W L = 0. \tag{13}$$

Integrando,

$$\tau_{yx} = -\rho g \sin\theta\, y + c_1. \tag{14}$$

Como el flujo es de superficie libre, $\tau_{yx}(y = e) = 0$, de donde:

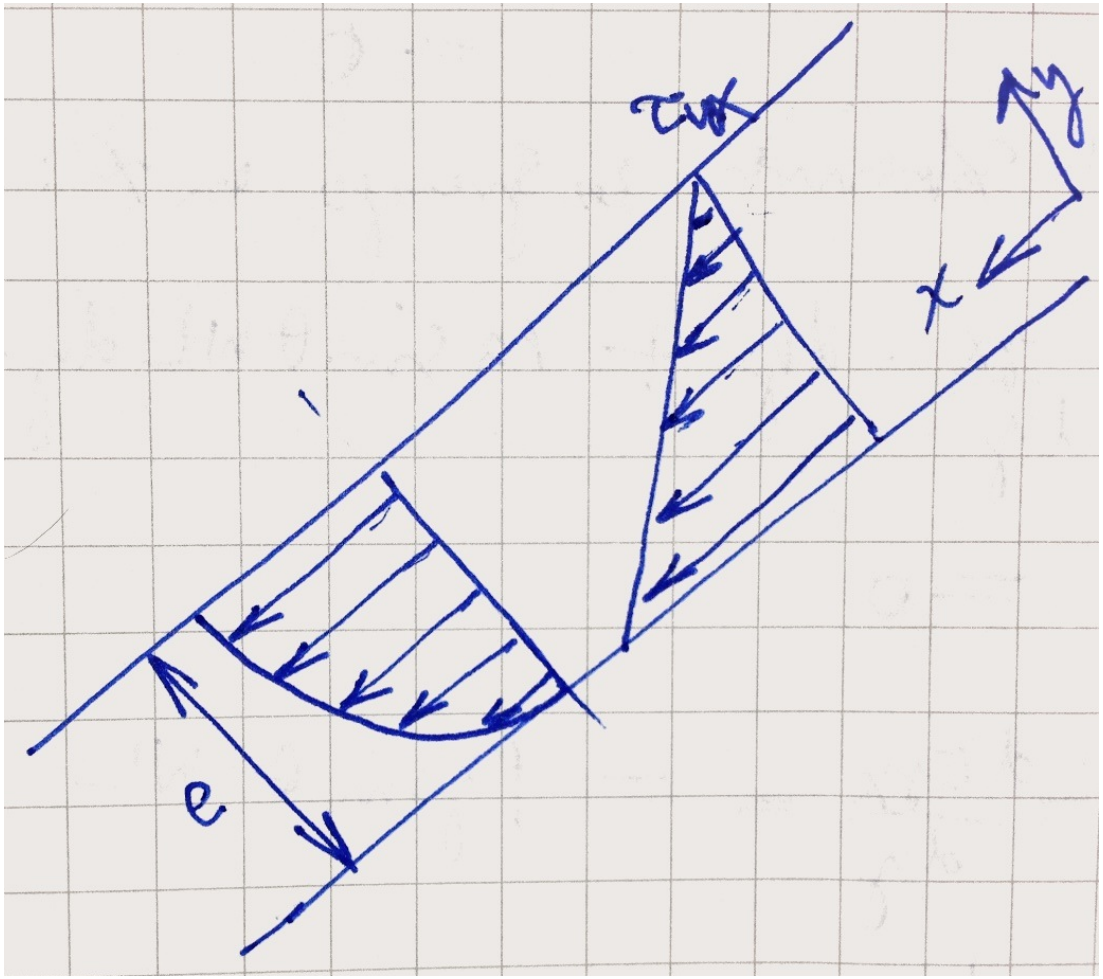
$$c_1 = \rho g e \sin\theta \Leftrightarrow \tau_{yx} = \rho g (e - y)\sin\theta \tag{15}$$

Con esto podemos calcular la velocidad de escurrimiento:

$$\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \rho g (e - y) \sin\theta \tag{16}$$

Imponiendo $u = 0$ en $y = 0$ se obtiene:

$$u(y) = \frac{\rho g \sin\theta}{\mu} y \left(e - \frac{y}{2} \right). \tag{17}$$


τ_{yx}
y
x
e

¿Qué pasa con el balance de fuerzas en el eje y?

$$\mathrm{d}F_{b,y} = -\rho g \cos\theta W L \mathrm{d}y \tag{18}$$

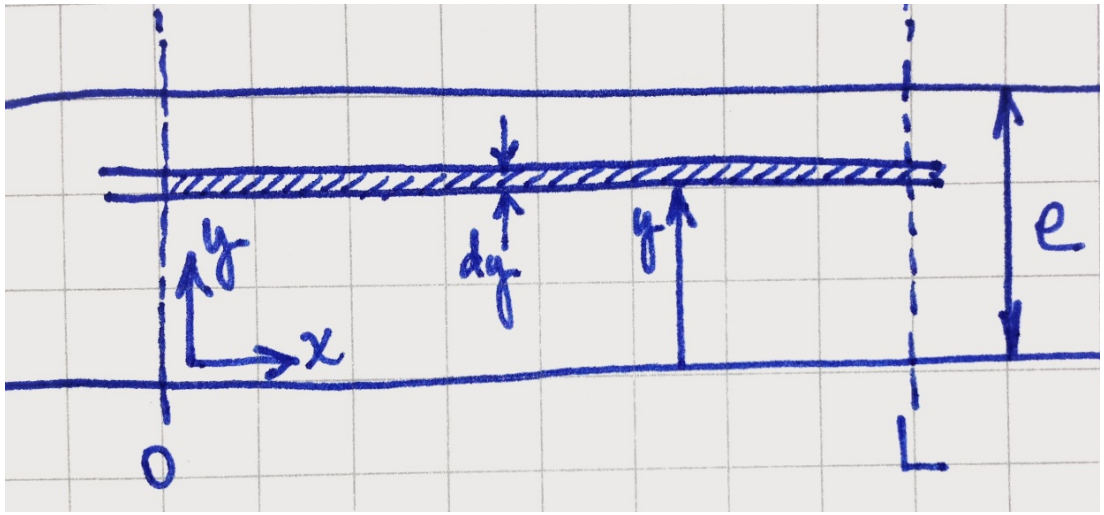
$$\mathrm{d}F_{p,y} = \rho g \cos\theta (e-y) W L - \rho g \cos\theta (e-y-\mathrm{d}y) W L \tag{19}$$

$$\mathrm{d}F_{\tau,y} = 0 \quad (\vec{v} = u\hat{\imath}, \text{ luego no hay flujo convectivo de momentum}) \tag{20}$$

$$\mathrm{d}F_{b,y} + \mathrm{d}F_{p,y} + \mathrm{d}F_{\tau,y} = 0. \tag{21}$$

Flujo entre placas paralelas

Suponga que el flujo es uniforme y permanente. Además, se conoce el caudal, Q. Se pide determinar la caída de presión requerida.



$\sum F_y$:

$$\mathrm{d}F_{p,y} = -p(x, y+\mathrm{d}y)LW + p(x,y)LW = -\frac{\partial p}{\partial y}LW\mathrm{d}y \tag{22}$$

$$\mathrm{d}F_{b,y} = -\rho g LW \mathrm{d}y. \tag{23}$$

Se tiene que $\mathrm{d}F_{p,y} + \mathrm{d}F_{b,y} = 0$, de donde:

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g = 0. \tag{24}$$

Definiendo $\tilde{p} = p + \rho g y$, se tiene que:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = 0. \tag{25}$$

De la definición de $\tilde{p}$ y (25), entonces:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{26}$$

$\sum F_x$:

$$\mathrm{d}F_{p,x} = \underbrace{p(x=0)}_{p_0} W\mathrm{d}y - \underbrace{p(x=L)}_{p_L} W\mathrm{d}y \tag{27}$$

$$\mathrm{d}F_{\tau_{yx}} = (\tau_{(y+\mathrm{d}y)x} - \tau_{yx})LW. \tag{28}$$

Análogamente, $\mathrm{d}F_{p,x} + \mathrm{d}F_{\tau_{yx}} = 0$, de donde,

$$\overbrace{(p_0 - p_L)}^{\Delta p>0} W\mathrm{d}y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}yLW = 0. \tag{29}$$

Si $\tau_{yx} = \tau_{yx}(y)$ (Newton-Navier), entonces $\partial\tau_{yx}/\partial y = \mathrm{d}\tau_{yx}/\mathrm{d}y$ y, además,

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{yx}}{\mathrm{d}y} = -\frac{\Delta p}{L}. \tag{30}$$

Como τ_{yx} es función de y, el lado derecho de (30) es a lo sumo función de y. Veamos que $\Delta p/L$ *no* depende de y. Supongamos que $-\Delta p/L = f(y)$. Se tiene que:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{L}\left(\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}p_L}{\mathrm{d}y}\right) \tag{31}$$

$$= -\frac{1}{L}\left(\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}y} + \rho g y - \rho g y - \frac{\mathrm{d}p_L}{\mathrm{d}y}\right) \tag{32}$$

$$= -\frac{1}{L}\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{p}_0}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}\tilde{p}_L}{\mathrm{d}y}\right) \tag{33}$$

$$= 0. \tag{34}$$

Por lo tanto, $-\Delta p/L$ es constante.

Integrando (30),

$$\tau_{yx} = -\frac{\Delta p}{L} y + c_1 \tag{35}$$

$$\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = -\frac{\Delta p}{L} y + c_1 \tag{36}$$

$$u(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 + \frac{c_1}{\mu} y + c_2. \tag{37}$$

Aplicamos las condiciones de borde:

$$u(y = 0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0 \tag{38}$$

$$u(y = e) = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{\Delta p}{2L} e \tag{39}$$

Reemplazando,

$$u = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y(e - y). \tag{40}$$

Por otro lado,

$$\tau_{yx} = \frac{\Delta p}{L} \left(\frac{e}{2} - y \right). \tag{41}$$

El caudal se calcula como:

$$Q = W \int_0^e u \mathrm{d}y \tag{42}$$

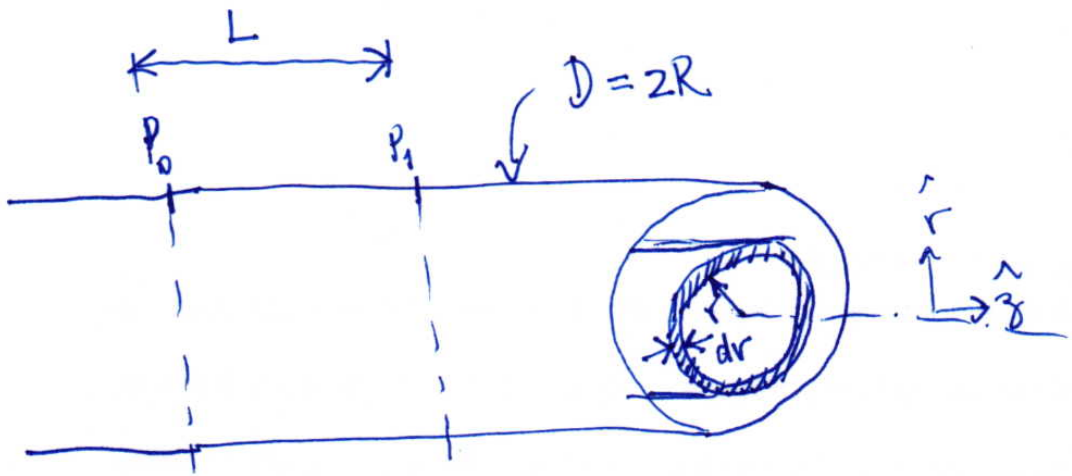
$$= \frac{W \Delta p}{2\mu L} \frac{e^3}{6}, \tag{43}$$

de donde, finalmente,

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{12 Q \mu}{e^3 W}. \tag{44}$$

Flujo en un tubo cilíndrico

Para la configuración mostrada, determine el caudal, Q, suponiendo conocida la caída de presión $\Delta p/L$ (flujo permanente y uniforme).



Escribimos la suma de fuerzas externas en $\hat{z}$:

$$\mathrm{d}F_{p,z} = p_0 2\pi r\,\mathrm{d}r - p_L 2\pi r\,\mathrm{d}r = \overbrace{(p_0 - p_L)}^{\equiv \Delta p > 0} 2\pi r\,\mathrm{d}r \tag{45}$$

$$\mathrm{d}F_{\tau_{rz}} = \tau_{(r+\mathrm{d}r)z} 2\pi (r+\mathrm{d}r) L - \tau_{rz} 2\pi r L = 2\pi L(\tau_{(r+\mathrm{d}r)z}(r+\mathrm{d}r) - \tau_{rz} r). \tag{46}$$

Análogamente a los casos analizados anteriormente,

$$\tau_{(r+\mathrm{d}r)z} \approx \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}\mathrm{d}r. \tag{47}$$

Por otro lado,

$$\tau_{(r+\mathrm{d}r)z}(r+\mathrm{d}r) = \left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}\mathrm{d}r\right)(r+\mathrm{d}r) \tag{48}$$

$$= r\tau_{rz} + \left(\tau_{rz} + r\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}\right)\mathrm{d}r + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}(\mathrm{d}r)^2 \tag{49}$$

$$\approx r\tau_{rz} + \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r}\mathrm{d}r \tag{50}$$

Reemplazando esta última expresión en (46),

$$\mathrm{d}F_{\tau_{rz}} = 2\pi L \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r}\mathrm{d}r. \tag{51}$$

Dado que el flujo convectivo de momentum en z que entra es igual al que sale del volumen de control, se tiene que $\mathrm{d}F_{p,z} + \mathrm{d}F_{\tau_{rz}} + \mathrm{d}F_{b,z} = 0$. Reemplazando (45) y (46) en esta última expresión (además, $\mathrm{d}F_{b,z} = 0$) y recordando que $\partial\tau_{rz}/\partial r = \mathrm{d}\tau_{rz}/\mathrm{d}r$, se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}r\tau_{rz}}{\mathrm{d}r} = -r\frac{\Delta p}{L}. \tag{52}$$

Integrando, se tiene:

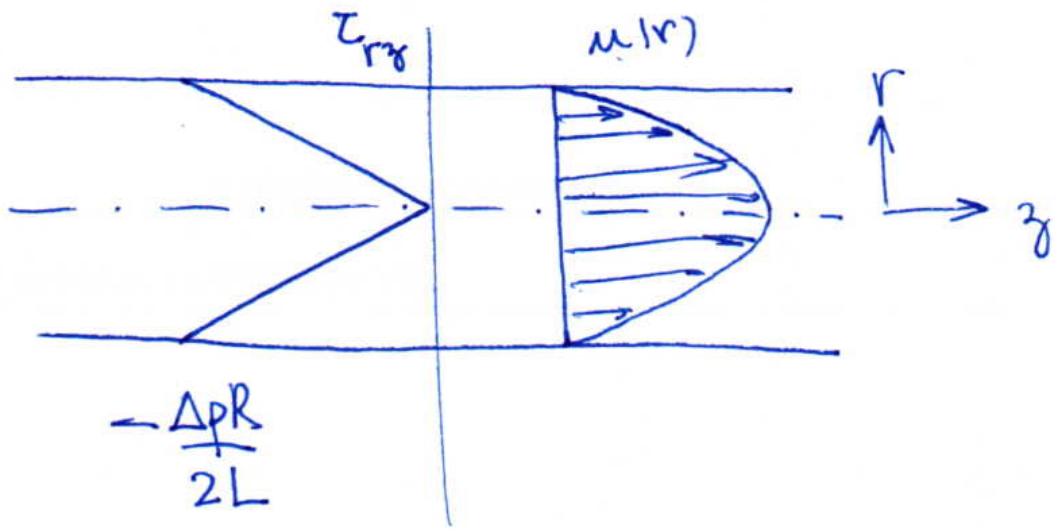
$$\tau_{rz} = -\frac{\Delta p}{L}\frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}. \tag{53}$$

Suponiendo que el esfuerzo de corte (o, alternativamente, el campo de velocidades) es finito para cualquier valor de r, entonces, necesariamente $c_1 = 0$. Haciendo $\tau_{rz} = \mu \mathrm{d}u/\mathrm{d}r$ e integrando, se tiene:

$$u(r) = -\frac{\Delta p}{L}\frac{r^2}{4\mu} + c_2. \tag{54}$$

Imponiendo $u(R) = 0$ se encuentra que $c_2 = \frac{\Delta p}{4\mu L}R^2$, de donde,

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left(R^2 - r^2\right). \tag{55}$$


τ_{rz}
$u(r)$
r
z
$-\frac{\Delta p R}{2L}$

El caudal Q que pasa a través de una sección transversal cualquiera tubo se encuentra integrando la velocidad en la sección $Q = \int_A \vec{u} \cdot \hat{n} \mathrm{d}A$. En este caso, $\mathrm{d}A = 2\pi r \mathrm{d}r$ y:

$$Q = 2\pi \int_0^R u(r') r' \mathrm{d}r' \tag{56}$$

$$= \frac{\pi}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} \left(R^2 \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \tag{57}$$

$$= \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L}. \tag{58}$$

La velocidad media, $\langle u \rangle$, se define a partir del caudal de salida como:

$$\langle u \rangle = \frac{\int_{A_s} \vec{u} \cdot \hat{n} \mathrm{d}A}{\int_{A_s} \mathrm{d}A}, \tag{59}$$

en que A_s es el área de salida. En el presente caso,

$$\langle u \rangle = \frac{R^2}{8\mu} \frac{\Delta p}{L}. \tag{60}$$

Problemas propuestos

1. Mostrar que la formulación presente es equivalente al balance indicado en la sección 2.1 del libro de Bird:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{tasa de en-}\\ \text{trada de}\\ \text{momentum}\\ \text{por transporte}\\ \text{convectivo}\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{l}\text{tasa de salida}\\ \text{de momen-}\\ \text{tum por}\\ \text{transporte}\\ \text{convectivo}\end{array}\right\}+$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{tasa de en-}\\ \text{trada de}\\ \text{momentum}\\ \text{por transporte}\\ \text{molecular}\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{l}\text{tasa de salida}\\ \text{de momen-}\\ \text{tum por}\\ \text{transporte}\\ \text{molecular}\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{l}\text{fuerzas ac-}\\ \text{tuando sobre}\\ \text{el centro de}\\ \text{masa del}\\ \text{sistema}\end{array}\right\}=0 \qquad (61)$$

2. Resolver el problema del flujo entre placas paralelas inducido por un gradiente de presión ($-\Delta p/L<0$), pero con dos fluidos inmiscibles. Antes de comenzar a calcular dibuje un esquema e imagine como debe ser la interfaz y cuáles son las condiciones de borde.

Fluidos newtonianos

El tensor de esfuerzos moleculares se puede escribir de la siguiente forma:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \tag{62}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \tag{63}$$

Aquí, $p > 0$ es la presión termodinámica del fluido. Por otro lado, τ_{ij} representa los esfuerzos ejercidos sobre el elemento de fluido. Con esta definición, para el caso de un fluido en reposo, se tendrá que $\tau_{ij} = 0$, lo que implica que $\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zz} = -p$, y se recupera la condición hidrostática.

Esfuerzo–deformación

En analogía con la ley de Hooke de la elasticidad, la suposición más simple es decir que los esfuerzos de corte varían linealmente con la tasa de deformación (Stokes, 1845). Stokes supuso:

1. El fluido es un continuo y el tensor de esfuerzos τ_{ij} es a lo más una función lineal de la tasa de deformación angular $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, pero no depende de las rotaciones),

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{64}$$

2. El fluido es isótropo, i.e., sus propiedades son independientes de la dirección.
3. Si las tasas de deformación son cero, debe obtenerse la condición de presión hidrostática.

Se puede probar que:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + K\varepsilon_{ij} + C(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \tag{65}$$

cumple con las hipótesis anteriores. Definiendo $K = 2\mu$ y $C = \lambda$ (segundo coeficiente de viscosidad), se obtiene:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\nabla\cdot\vec{u}. \tag{66}$$

Notar que $\Pi_{ij} = \Pi_{ji}$ (tensor simétrico).
A patir de (71) es posible escribir la presión media, $\bar{p}$, definida como:

$$\bar{p} = -\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3}. \tag{67}$$

Usando (67) en (66), se obtiene:

$$\bar{p} = p - \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)\nabla\cdot\vec{u}. \tag{68}$$

Definiendo $\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu$ (κ se denomina *viscosidad dilatacional*), se obtiene que la presión media:

$$\bar{p} = p - \kappa \nabla \cdot \vec{u}, \tag{69}$$

Recordemos que, de la ecuación de conservación de masa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \tag{70}$$

Si ρ es constante, entonces el fluido es incompresible, y entonces, $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Con esto, el tensor de esfuerzo para un fluido newtoniano **incompresible** se puede escribir como:

$$\boxed{\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}.} \tag{71}$$

Por otro lado, se obtiene que la presión media, $\bar{p}$ (69) es igual a la presión termodinámica, p, sólo si el fluido es incompresible.