MI3010
FENÓMENOS DE TRANSPORTE EN METALURGIA EXTRACTIVA

Prof. Christian Ihle
Prof. Leandro Voisin

FCFM Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería de Minas

Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

1. Cinemática de fluidos
   - Traslación
   - Deformación lineal
   - Deformación angular
   - Rotación
2. Ley de Newton-Navier y el concepto de viscosidad
3. Algunos fluidos no newtonianos

Objetivos

- Conocer los elementos que determinan el movimiento de los fluidos
- Conocer los distintos tipos de fuerzas que actúan sobre un fluido y su caracterización
- Conocer el concepto de viscosidad y la ley de Newton generalizada
- Conocer algunas formulaciones más generales que la ley de viscosidad de Newton

Cinemática de fluidos en movimiento

Consideremos un campo permanente de velocidades, es decir, $\partial\vec{v}/\partial t = 0$. Tomemos un punto P de este campo de velocidades, de coordenadas (x, y, z), el que tiene una velocidad $\vec{v} = (u, v, w)$. Consideremos además un punto P', cercano al punto P, distante a una distancia $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, con una velocidad $\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}$, con $\mathrm{d}\vec{v} = (\mathrm{d}u, \mathrm{d}v, \mathrm{d}w)$. En general, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$.

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1}$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{2}$$

$$\mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{3}$$

Se tiene que:

$$\mathrm{d}\vec{v} = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}[\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z]^T, \tag{4}$$

con

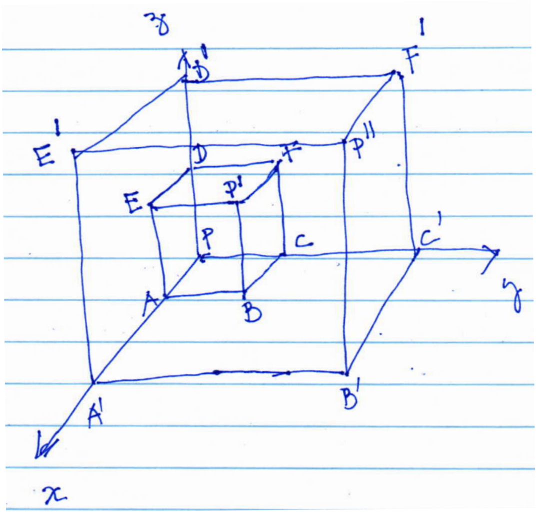
$$\left.\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|_{ij} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i,j \in \{1,2,3\}\times\{1,2,3\}. \tag{5}$$

La diferencia de velocidades está caracterizadas por 9 derivadas parciales, que podemos asociar a 4 efectos distintos:

- Traslación
- Deformación lineal
- Deformación angular
- Rotación

Las distintas deformaciones básicas que se pueden identificar están dadas por los valores que pueden tomar las derivadas parciales que definen el diferencial de velocidad $\mathrm{d}\vec{v}$. Consideremos el cubo $ABCDEFPP'$, dentro del elemento de fluido, cuyo vértice, P, se encuentra en el origen del sistema de coordenadas.

Esquema



Caso 1: $\mathrm{d}\vec{v} = 0$

Traslación pura.

Caso 2: $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$ si $i \neq j$, $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \neq 0$ si $i = j$

En este caso,

$$\mathrm{d}\vec{v} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x, \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y, \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z\right]^T. \tag{6}$$

Con esto,

$$\mathrm{d}\vec{v}_A = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x, 0, 0\right]^T \tag{7}$$

$$\mathrm{d}\vec{v}_C = \left[0, \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y, 0\right]^T \tag{8}$$

$$\mathrm{d}\vec{v}_D = \left[0, 0, \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z\right]^T. \tag{9}$$

Con estas tres componentes, podemos deducir la velocidad en el resto de las componentes:

$$\mathrm{d}\vec{v}_B = \mathrm{d}\vec{v}_A + \mathrm{d}\vec{v}_C \tag{10}$$
$$\mathrm{d}\vec{v}_E = \mathrm{d}\vec{v}_A + \mathrm{d}\vec{v}_D \tag{11}$$
$$\mathrm{d}\vec{v}_F = \mathrm{d}\vec{v}_C + \mathrm{d}\vec{v}_D. \tag{12}$$

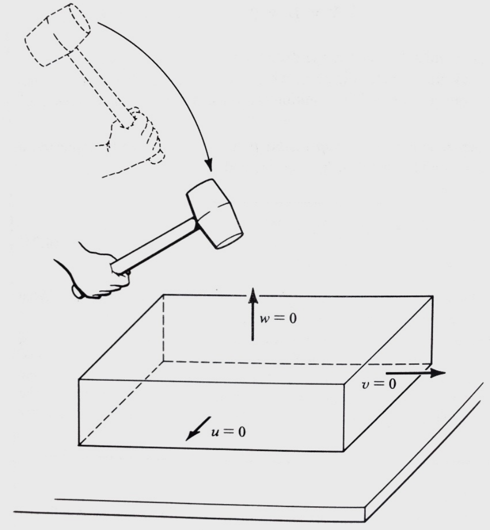
Finalmente,

$$\mathrm{d}\vec{v}_{P'} = \mathrm{d}\vec{v}_A + \mathrm{d}\vec{v}_C + \mathrm{d}\vec{v}_D \tag{13}$$

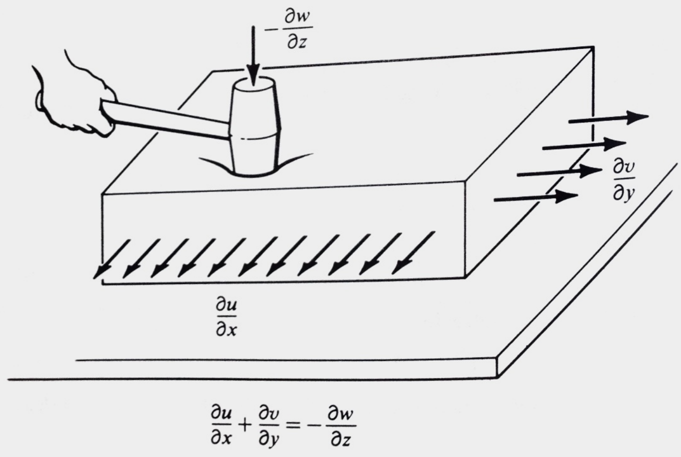
Habíamos mencionado que en un fluido incompresible, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{14}$$

Luego, si $\partial u / \partial x > 0$ y $\partial v / \partial y > 0$, entonces $\partial w / \partial z < 0$.



$w = 0$
$v = 0$
$u = 0$


$-\frac{\partial w}{\partial z}$
$\frac{\partial v}{\partial y}$
$\frac{\partial u}{\partial x}$
$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}$

Caso 3: $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$ si $(i,j) = (2,3)$ y $(3,2)$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \neq 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0 \tag{16}$$

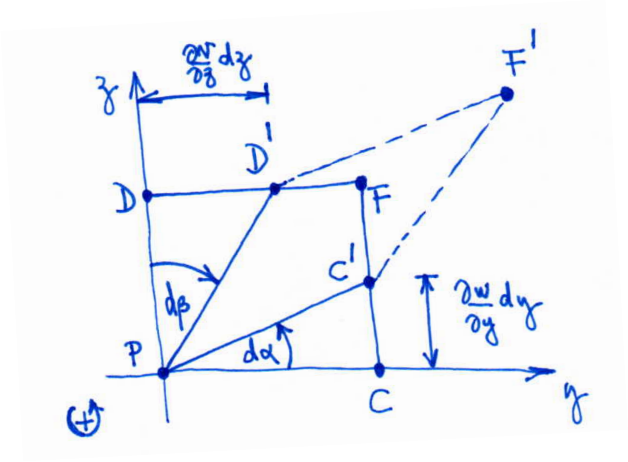
$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0 \tag{17}$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right] = 0 \tag{18}$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0 \tag{19}$$

En este caso,

$$\mathrm{d}\vec{v} = \left[0, \frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z, \frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y\right] \tag{20}$$



$\frac{\partial v}{\partial z}dz$
z
F'
D'
D
F
C'
$\frac{\partial w}{\partial y}dy$
$d\beta$
P
$d\alpha$
C
y
(+)

$$\text{Desplazamiento } CC' : \ |\mathrm{d}\vec{v}_C \delta t| = \frac{\partial w}{\partial y} \mathrm{d}y \delta t \tag{21}$$

$$\text{Desplazamiento } DD' : \ |\mathrm{d}\vec{v}_D \delta t| = \frac{\partial v}{\partial z} \mathrm{d}z \delta t \tag{22}$$

Considerando la convención de ángulo positivo para giros en el sentido contrario a las agujas del reloj, se tiene:

$$\delta\alpha \approx \frac{\partial w}{\partial y}\delta t; \quad \delta\beta \approx -\frac{\partial v}{\partial z}\delta t. \tag{23}$$

La deformación angular total es:

$$\delta\gamma = \delta\alpha - \delta\beta, \tag{24}$$

de donde,

$$\delta\gamma = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\delta t. \tag{25}$$

Definimos la tasa de deformación en el plano yz como:

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\frac{\delta\gamma}{\delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right). \tag{26}$$

Repitiendo este análisis para los planos xy e yz, se tiene:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{27}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{28}$$

En general, escribimos el *tensor de deformación*, $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{29}$$

donde $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^T$.

Caso 4: rotación

Si el ángulo $\delta\beta$ es *positivo*, entonces se genera un movimiento equivalente a una rotación. En torno al eje x, se define:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\frac{\delta\alpha + \delta\beta}{\delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right). \tag{30}$$

Análogamente,

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{31}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{32}$$

El vector $\vec{\omega}$ se denomina *vorticidad*, y se puede escribir como:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{v}, \tag{33}$$

con

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \tag{34}$$

Con estas definiciones, es posible escribir (demostrarlo!):

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \underline{\underline{\boldsymbol{D}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{S}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\Omega}}}, \tag{35}$$

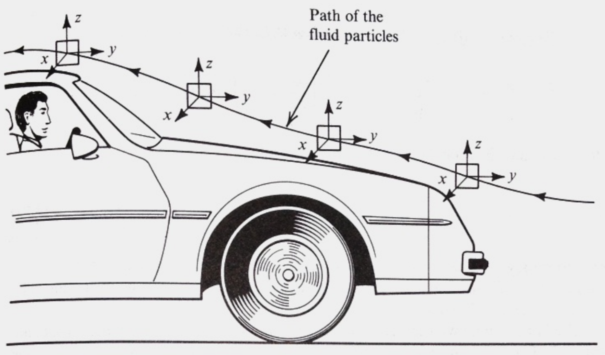
con:

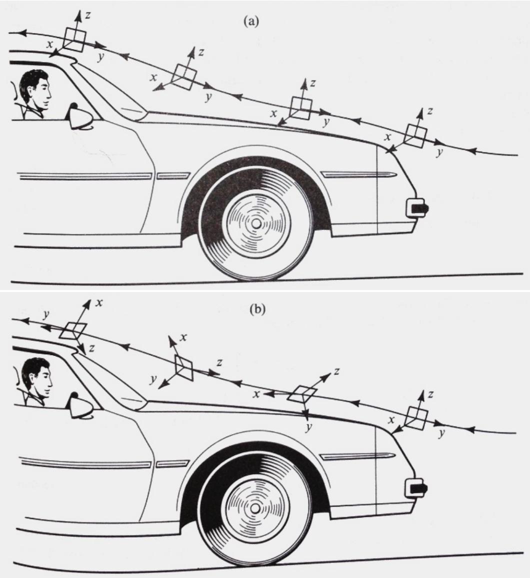
$$\underline{\underline{\boldsymbol{D}}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{S}}} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} & 0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\Omega}}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Interpretación




(a)
x
y
z
x
y
z
x
y
z
x
y
z
(b)
x
y
z
x
y
z
x
y
z
x
y
z

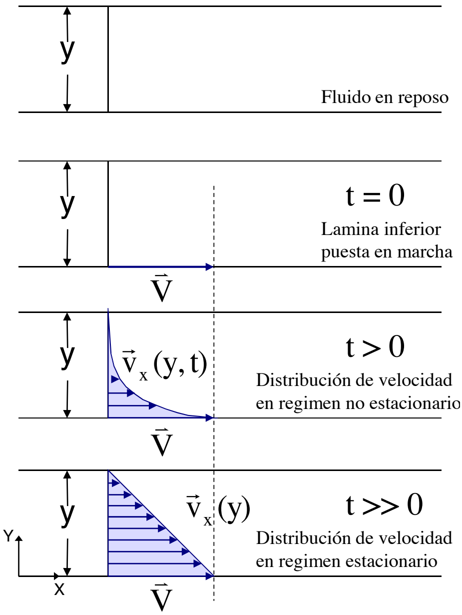
Modos de transporte

Molecular: Viscoso

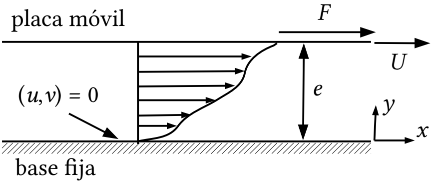
- Miel en un plano inclinado
- Mata líquida en un proceso de sangrado

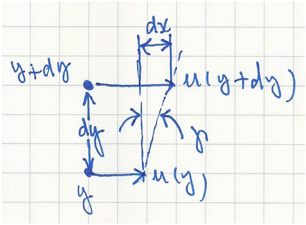
Convectivo: Tiene que ver con el término convectivo o de *inercia*.

- Agua en un río
- Barro en un aluvión, etc.



- Supongamos dos placas paralelas de área A, separadas por una distancia y
- En el espacio entre ellas hay un fluido (líquido o gas)
- Inicialmente, el sistema está en reposo. En $t = 0$ la placa se pone lentamente en movimiento. Nos concentraremos en el movimiento en la dirección x, con una velocidad constante.





$$\tan \mathrm{d}\gamma \approx \mathrm{d}\gamma = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \tag{39}$$

$$= \frac{(u_{y+\mathrm{d}y} - u_y)\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} \tag{40}$$

$$\approx \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}t. \tag{41}$$

Definimos $\dot{\gamma} = \mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$ (tasa de deformación). Si u es sólo función de y, entonces,

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}. \tag{42}$$

Supongamos que el desplazamiento de la parcela de fluido diferencial es inducido por una fuerza por unidad de área (esfuerzo) que denominaremos τ_{yx} [Pa] (*el fluido* responde a la fuerza externa con una fuerza por unidad de área igual y opuesta, $-\tau_{yx}$). La relación más simple posible entre esfuerzo y deformación es una lineal, donde:

$$\frac{F}{A} = \tau_{yx} = -\tau'_{yx} = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}, \tag{43}$$

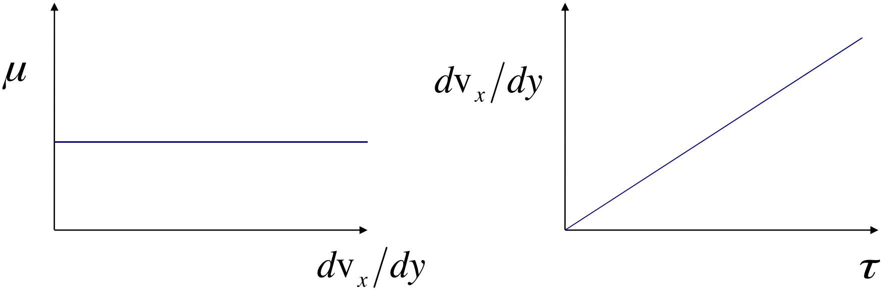
donde el signo $'$ denota el esfuerzo del fluido. Si $\rho e U/\mu$ es pequeño y $v = w = 0$, entonces $u = Uy/e$ para una variedad de fluidos (flujo de corte simple), y se cumple la ley de Newton-Navier:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{U}{e}. \tag{44}$$

La constante de proporcionalidad, μ, se llama *viscosidad dinámica*, y $[\mu] = \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$.

http://youtube.com/watch?v=FwzfUeZ7xmw

Fluidos newtonianos



En general la viscosidad es función de variables termodinámicas fundamentales que definen un sistema tales como la temperatura, la presión, el volumen, la composición del fluido, etc.

$$\mu = f(T, P, V, n_i, \dot{\gamma}). \tag{45}$$

En algunos casos, depende de la tasa de deformación generada por el flujo del fluido, por ejemplo para un flujo unidireccional en la dirección x, $\dot{\gamma} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}x$. Un ejemplo son los plásticos de Bingham, donde

$$\tau = \tau_y + \mu_B \dot{\gamma} \Leftrightarrow \mu_{\mathrm{eq}} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + \mu_B = f(\dot{\gamma}).$$

Viscosidad en fluidos newtonianos

A presión constante, la viscosidad del aire aumenta con la temperatura de 1.72×10^{-5} Pa·s a 0° C a 2.2×10^{-5} Pa·s a 100° C. Se puede considerar las siguientes relaciones empíricas para determinar las viscosidades del aire y del agua:

$$\mu_{\text{aire}} = [-1.0585 + 0.16803\sqrt{T(K)}] \times 10^{-5} \tag{46}$$

$$\mu_{\text{agua}} = \exp[0.6885 - 0.10024(T(^\circ C))^{0.65}] \times 10^{-3}. \tag{47}$$

Rangos de viscosidades dinámicas

Fluido	*Viscosidad [mPa·s]*		
gases	*0.01*	~	*0.1*
agua	*0.3*	~	*1.75*
metales líquidos	*0.5*	~	*5*
sales fundidas	*1*	~	*5*
matas fundidas	*1*	~	*4*
nitratos y carbonatos	*5*	~	*20*
aceites	*100*	~	*5000*
escorias y lavas	*300*	~	*10000*

Viscosidad cinemática

Viscosidad cinemática, ν : propiedad fluidodinámica que relaciona la viscosidad y la densidad de un fluido, generalmente sus unidades se expresan en m^2/s .

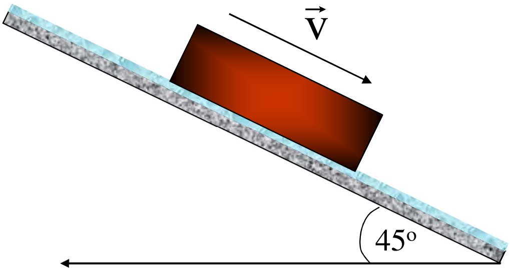
$$\nu = \mu / \rho$$

Viscosidad cinemática

Fluido	μ[kg/(m s)]	ρ [kg/m^3]	ν[m^2/s]
Hidrógeno	8.9×10^{-6}	0.084	1.06×10^{-4}
Aire	1.8×10^{-5}	1.19	1.51×10^{-5}
Gasolina	2.9×10^{-4}	679	4.27×10^{-7}
Agua	1.0×10^{-3}	990	1.01×10^{-6}
Alcohol	1.2×10^{-3}	795	1.51×10^{-6}
Mercurio	1.5×10^{-3}	12900	1.16×10^{-7}
Lubricante	0.26	932	2.79×10^{-4}
Glicerina	1.5	1260	1.19×10^{-3}

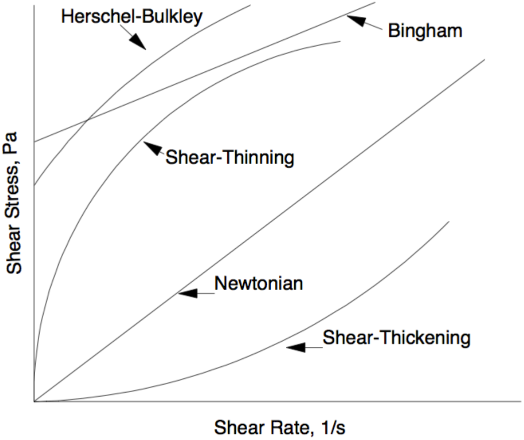
Ejemplo

Un bloque de 30 kg se desliza a velocidad constante por un plano inclinado sobre una delgada capa de aceite de densidad 800 kg/m^3. Calcule la velocidad en estado estacionario y confirme la aplicabilidad de la ley de Newton-Navier. Considere $\mu = 0.26$ Pa, $A = 0.5\,\mathrm{m}^2$ y $e = 0.15$ mm.



No todos los fluidos son newtonianos

- no lineales con la tasa de deformación
- algunos dependientes del tiempo



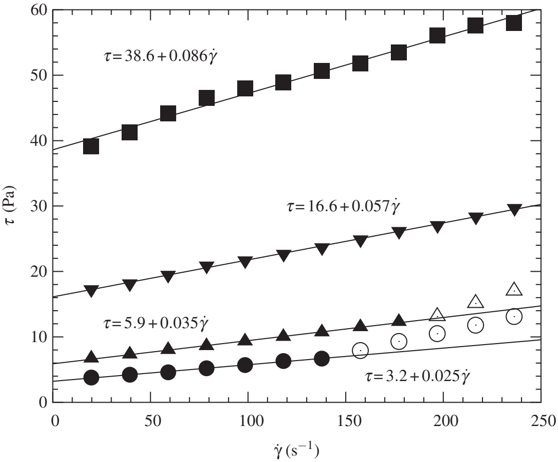


Figure 1 Typical shear rate–shear stress curves obtained from measurements. Circles, upright triangles, inverted trangles and squares correspond to bentonite concentrations of 4, 6, 8 and 10%, respectively. Solid symbols represent measurements included on data fitting, corresponding to laminar flow inside the Couette cell, whereas empty ones denote turbulent or transitional flows. Labels inside the graph represent the analytical expression of the data fit corresponding to the Bingham model

http://www.youtube.com/watch?v=f2XQ97XHjVw