MI3010
Fenómenos de transporte en metalurgia extractiva

Prof. Christian Ihle
Prof. Leandro Voisin

FCFM Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería de Minas

Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

1. TTR y conservación de masa total

2. Algunos casos particulares

El teorema de transporte de Reynolds

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega(t)} b(\vec{x},t)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial b}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega + \overbrace{\int_{A(t)} b(\vec{x},t)\,\vec{u}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A}^{\text{término convectivo}} \tag{1a}$$

$$= \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial b}{\partial t} + \nabla\cdot(b\vec{u})\right]\mathrm{d}\Omega \tag{1b}$$

Conservación de masa ($B = \int_{\Omega_C} \rho \mathrm{d}\Omega$, $b = \rho$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \tag{2}$$

Fluido incompresible ($\rho = \rho_0$, constante):

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{3}$$

Volumen de control fijo en el espacio

$$\overbrace{\frac{\mathrm{D}B}{\mathrm{D}t}}^{\text{var. prop. extensiva}} = \int_{\Omega_C} \frac{\partial b(\vec{x},t)}{\partial t} \mathrm{d}\Omega + \int_{A_C} b(\vec{x},t)\vec{u}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A \tag{4}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_C} b(\vec{x},t)\mathrm{d}\Omega + \int_{A_C} b(\vec{x},t)\vec{u}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A \tag{5}$$

Densidad constante, $\rho = \rho_0$

Ecuación de continuidad

$$M = \int_{\Omega(t)} \rho_0 \mathrm{d}\Omega. \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0 \text{ (principio de conservación de masa)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\mathrm{D}\Omega}{\mathrm{D}t} = 0 \text{ (conservación de volumen, ssi } \rho = \rho_0\text{)}$$

Entonces,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_C} \mathrm{d}\Omega + \int_{A_C} \vec{u} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A \tag{7}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = - \underbrace{\int_{A_C} \vec{u} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A}_{\substack{\text{caudal} \\ \text{volumétrico}}} \tag{8}$$

ρ no depende del espacio, pero sí del tiempo
Caso de un mezclador perfecto

Conservamos masa, con $b = \rho(t)$ y $\nabla\rho = 0$ en el interior.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_C} \rho(t)\mathrm{d}\Omega + \int_{A_C} \rho(t)\vec{u}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A \tag{9}$$

$$\frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} = -\underbrace{\int_{A_C} \rho\vec{u}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A}_{\substack{\text{caudal}\\ \text{másico}}} \tag{10}$$

Ejemplo: vaciamiento de un estanque

- Estanque inicialmente lleno de altura $h_0 < H$ (H es la altura del estanque)
- Vaciamiento por un orificio de sección S.
- Caudal de entrada conocido (constante)

Determine la curva de vaciado del estanque Suponga que se cumple la ley de Torricelli*: $v_s = \sqrt{2gh}$, con $0 \leq h \leq H$.
Ind.: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\alpha x^{1/2}} = -\frac{2[\alpha\sqrt{x}+\ln(1-\alpha\sqrt{x})]}{\alpha^2}$.

*Evangelista Torricelli (Faenza, Italia, 15 de octubre 1608 – Florencia, Italia, 25 de octubre 1647) fue un físico y matemático italiano.

Ejemplo: mezclador perfecto

Dos entradas a distinta densidad

- $\rho = \rho(t)$ al interior; $\nabla\rho = 0$
- Recipiente con sección basal constante
- Densidades ρ_1 y ρ_2 (ambas constantes) en la entrada
- Caudales volumétricos constantes Q_1 y Q_2 en las entradas
- Salida de fluido siguiendo la ley de Torricelli

Puntos por revisar

- ¿Qué pasa cuando la sección basal no es constante?
- ¿Cómo sería el vaciamiento de un conjunto *estratificado* de fluidos?