

# MI3010

## FENÓMENOS DE TRANSPORTE EN METALURGIA EXTRACTIVA

Prof. Christian Ihle  
Prof. Leandro Voisin

FCFM Universidad de Chile  
Departamento de Ingeniería de Minas



Ingeniería de Minas  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



- 1 Introducción y conceptos generales
- 2 Postulado del medio continuo
- 3 El teorema de transporte de Reynolds

**Fluidodinámica**  
(Transporte de  
Momentum)

**Transferencia de Calor**  
(Transporte de Energía)

**Transferencia de Masa**  
(Transporte de masa de  
especies químicas)

### **Estos tres fenómenos:**

- *Frecuentemente ocurren de manera simultánea*
- *Las ecuaciones básicas que los describen son muy semejantes*
- *Las herramientas matemáticas necesarias son muy similares.*
- *Los mecanismos moleculares que ocurren en estos fenómenos son parecidos y son responsables de la viscosidad, conductividad térmica y difusión.*

# Procesos involucrados

- Flujo gravitacional, relleno de caserones, etc
- Transporte de pulpa o agua a través de cañerías (piping)
- Clasificación en hidrociclones
- Sistemas de ventilación
- Lixiviación en pilas (flujo en medios porosos)
- Modelación de burbujas en fluidos metalúrgicos
- Extracción por solvente (SX)
- Electro obtención (EW), Electro refinación (ER)
- Tostación, Fusión, Conversión, Refino y Moldeo
- Pérdidas de calor desde reactores metalúrgicos
- Magnetohidrodinámica
- Limpieza de escorias
- Flujo reactivo (plantas de cal)

# Flujo

Para que exista un flujo del fluido, una transferencia de calor o una transferencia de masa debe existir una diferencia (gradiente) de una cantidad físico-química llamada fuerza direccional:

Presión  $p$

Temperatura  $T$

Volumen  $V$

Concentración  $n_i$

$$\text{Tasa} \left( \frac{\text{cantidad}}{\text{tiempo}} \right) = \frac{\text{fuerza direccional}}{\text{resistencia}} \quad (1)$$

# El sistema de unidades

<http://physics.nist.gov/Pubs/SP330/sp330.pdf>

**Table 1.** SI base units

| Base quantity             | SI base unit |        |
|---------------------------|--------------|--------|
|                           | Name         | Symbol |
| length                    | meter        | m      |
| mass                      | kilogram     | kg     |
| time                      | second       | s      |
| electric current          | ampere       | A      |
| thermodynamic temperature | kelvin       | K      |
| amount of substance       | mole         | mol    |
| luminous intensity        | candela      | cd     |

**Table 2.** Examples of SI coherent derived units expressed in terms of SI base units

| Derived quantity                     | SI coherent derived unit |                    |
|--------------------------------------|--------------------------|--------------------|
|                                      | Name                     | Symbol             |
| area                                 | square meter             | m <sup>2</sup>     |
| volume                               | cubic meter              | m <sup>3</sup>     |
| speed, velocity                      | meter per second         | m/s                |
| acceleration                         | meter per second squared | m/s <sup>2</sup>   |
| wavenumber                           | reciprocal meter         | m <sup>-1</sup>    |
| density, mass density                | kilogram per cubic meter | kg/m <sup>3</sup>  |
| specific volume                      | cubic meter per kilogram | m <sup>3</sup> /kg |
| current density                      | ampere per square meter  | A/m <sup>2</sup>   |
| magnetic field strength              | ampere per meter         | A/m                |
| luminance                            | candela per square meter | cd/m <sup>2</sup>  |
| amount-of-substance concentration    |                          |                    |
| amount concentration , concentration | mole per cubic meter     | mol/m <sup>3</sup> |

# Algunas definiciones

**Meter** The meter is the length of the path traveled by light in vacuum during a time interval of  $1/299\,792\,458$  of a second

**Kilogram** The kilogram is the unit of mass; it is equal to the mass of the international prototype of the kilogram

**Second** The second is the duration of  $9\,192\,631\,770$  periods of the radiation corresponding to the transition between the two hyperfine levels of the ground state of the cesium-133 atom

**Kelvin** The kelvin, unit of thermodynamic temperature, is the fraction  $1/273.16$  of the thermodynamic temperature of the triple point of water

**Mole** The mole is the amount of substance of a system which contains as many elementary entities as there are atoms in  $0.012$  kilogram of carbon 12

## Otros sistemas

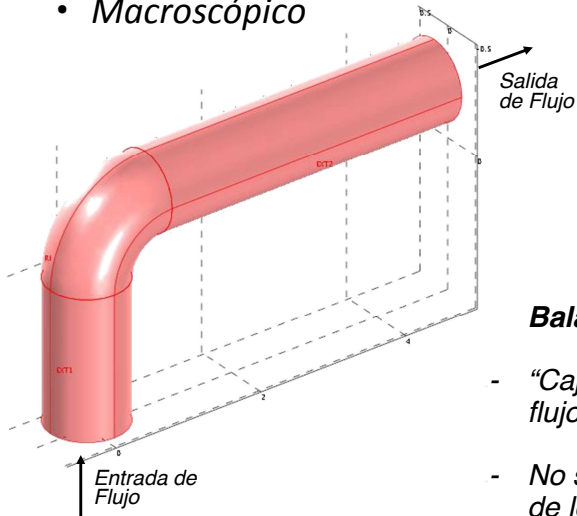
|                          | SI                          | cgs                                   | British                                                                                              |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Time                     | 1 s                         | 1 s                                   | 1 s                                                                                                  |
| Length                   | 1 m =                       | 100 cm =                              | 3.2808 ft                                                                                            |
| Mass                     | 1 kg =                      | 1,000 g =                             | 2.2046 lb                                                                                            |
| Volume                   | 1 m <sup>3</sup> =          | 10 <sup>4</sup> cm <sup>3</sup> =     | 35.315 ft <sup>3</sup>                                                                               |
| Density                  | 1 kg/m <sup>3</sup> =       | 10 <sup>-3</sup> g/cm <sup>3</sup> =  | 0.06243 lb/ft <sup>3</sup>                                                                           |
| Force                    | 1 N(kg·m/s <sup>2</sup> ) = | 10 <sup>5</sup> g·cm/s <sup>2</sup> = | 0.22481 lb <sub>f</sub>                                                                              |
| Pressure<br>(Force/Area) | 1 Pa(N/m <sup>2</sup> ) =   | 10 g/cm·s <sup>2</sup> =              | 1.45·10 <sup>-4</sup> lb <sub>f</sub> /in <sup>2</sup><br>1 lb <sub>f</sub> /in <sup>2</sup> = 1 psi |
| Energy                   | 1 J = 1 N·m =               | 10 <sup>7</sup> erg =                 | 9.478·10 <sup>-4</sup> Btu                                                                           |
| Temperature              | T(°C) =                     |                                       | (°F - 32)/1.8                                                                                        |

**Table 5.** SI prefixes

| Factor               | Prefix Name | Symbol | Factor                   | Prefix Name | Symbol |
|----------------------|-------------|--------|--------------------------|-------------|--------|
| $10^{24} = (10^3)^8$ | yotta       | Y      | $10^{-1}$                | deci        | d      |
| $10^{21} = (10^3)^7$ | zetta       | Z      | $10^{-2}$                | centi       | c      |
| $10^{18} = (10^3)^6$ | exa         | E      | $10^{-3} = (10^3)^{-1}$  | milli       | m      |
| $10^{15} = (10^3)^5$ | peta        | P      | $10^{-6} = (10^3)^{-2}$  | micro       | $\mu$  |
| $10^{12} = (10^3)^4$ | tera        | T      | $10^{-9} = (10^3)^{-3}$  | nano        | n      |
| $10^9 = (10^3)^3$    | giga        | G      | $10^{-12} = (10^3)^{-4}$ | pico        | p      |
| $10^6 = (10^3)^2$    | mega        | M      | $10^{-15} = (10^3)^{-5}$ | femto       | f      |
| $10^3 = (10^3)^1$    | kilo        | k      | $10^{-18} = (10^3)^{-6}$ | atto        | a      |
| $10^2$               | hecto       | h      | $10^{-21} = (10^3)^{-7}$ | zepto       | z      |
| $10^1$               | deka        | da     | $10^{-24} = (10^3)^{-8}$ | yocto       | y      |

*Note:* Alternative definitions of the SI prefixes and their symbols are not permitted. For example, it is unacceptable to use kilo (k) to represent  $2^{10} = 1024$ , mega (M) to represent  $2^{20} = 1\,048\,576$ , or giga (G) to represent  $2^{30} = 1\,073\,741\,824$ . See the note to Ref. [5] on page 74 for the prefixes for binary powers adopted by the IEC.

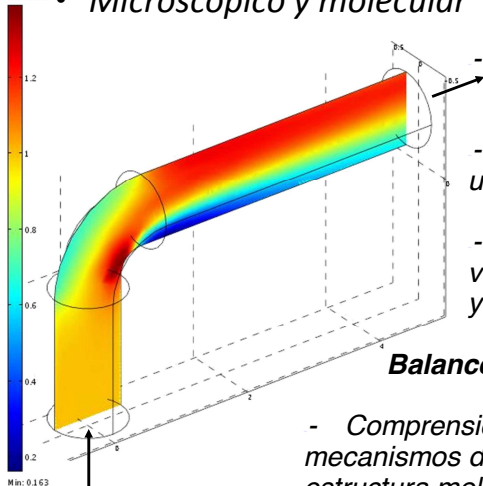
- *Macroscópico*



### **Balances Macroscópicos**

- “Caja negra” con respecto a flujos de entrada y salida
- No se requiere un estudio de los detalles del sistema.

Max: 1.389



Min: 0.163

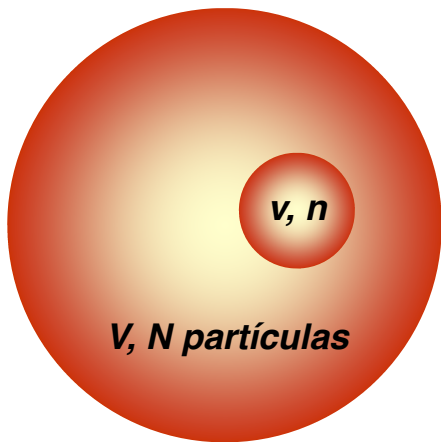
## • Microscópico y molecular

## Balances Microscópicos

- Interesa lo que ocurre en un área pequeña del equipo.
- Ecuaciones de cambio para un volumen de control específico.
- Interesa obtener “perfiles” de velocidad, temperatura, presión y concentración en el sistema.

## Balances Moleculares

- Comprensión fundamental de los mecanismos de transporte en términos de la estructura molecular y fuerzas intermoleculares.



$$v \ll V, n \gg 1$$

- A una escala microscópicas los medios continuos pueden ser deformables o indeformables.
- Es posible emplear herramientas de cálculo diferencial

## Medición de peces en un río: derivada total

$\frac{dc}{dt}$  Describe la variación de la concentración de peces para una posición en movimiento de un sistema relativo al tiempo

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (2)$$

donde  $\frac{d(\cdot)}{dt}$  son los componentes de la velocidad.

# Medición de peces en un río: derivada material o substancial

$\frac{Dc}{Dt}$  Describe la variación de la concentración de peces para una posición en movimiento conjunto a aquel de la masa de control (punto de vista lagrangiano). Esta derivada hace énfasis en que el observador se mueve con la partícula o masa de control y sigue su trayectoria.

# Magnitudes termodinámicas

**Magnitud extensiva:** es una magnitud cuyo valor es proporcional al tamaño del sistema que describe. Esta magnitud puede ser expresada como sumatoria de las magnitudes de un conjunto de subsistemas que formen el sistema original.

**Magnitud intensiva:** es aquella cuyo valor no depende del tamaño ni de la cantidad de materia del sistema, es decir, tiene el mismo valor para un sistema que para cada una de sus partes consideradas como subsistemas abiertos.

*En general el cuociente entre dos magnitudes extensivas nos da una magnitud intensiva, por ejemplo la división entre masa y volumen nos da la densidad.*

# Contraste de enfoques

## Lagrangiano (clásico)

- Masa de control (CM)
- Propiedades extensivas (dependen de la cantidad de materia):
  - Momentum
  - Energía
  - Masa
  - Peso

## Euleriano

- Volumen de control (CV)
- Propiedades intensivas (independientes de la cantidad de materia):
  - Velocidad
  - Temperatura
  - Concentración
  - Densidad

# ¿Qué enfoque usar?

- Nos interesa escribir ecuaciones que representen la conservación de propiedades tales como:
  - Masa
  - Momentum
  - Energía
- Para sistemas discretos (o de pocas partículas) o desde un punto de vista macroscópico, podemos utilizar un enfoque clásico (siguiendo la trayectoria de *cada* partícula). Esto es "caro" si son muchas partículas.
- Otra opción: emplear un volumen de control
  - El observador está "fijo" en un punto del dominio y ve cómo varían las propiedades de interés en el tiempo sólo dentro de esa posición
  - Requiere trabajar con variables intensivas

# Relación entre propiedad extensiva e intensiva

$$B = \int_{\Omega} b \, d\Omega, \quad (3)$$

donde:

$B$ : Propiedad extensiva ( $m$ ,  $p$ ,  $E$ ,  $V$ , etc.)

$b$ : Propiedad intensiva ( $\rho$ ,  $v$ ,  $n_i$ , etc.)

$\Omega$ : Volumen ocupado por la masa de control

# ¿Cómo relacionamos el enfoque lagrangiano con el euleriano?

Sea  $b$  un campo escalar (ej. propiedad *intensiva*) continuo y derivable. Entonces,

$$\frac{D}{Dt} \underbrace{\int_{\Omega(t)} b(\vec{x}, t) d\Omega}_{B(\vec{x}_0(t), t)} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla \cdot (b\vec{u}) \right] d\Omega. \quad (4)$$

Veamos:

$$\frac{DB}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[ \int_{\Omega(t+\delta t)} b(t+\delta t) d\Omega - \int_{\Omega(t)} b(t) d\Omega \right] \right\} \quad (5)$$

$$= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[ \int_{\Omega(t+\delta t)} b(t+\delta t) d\Omega - \int_{\Omega(t)} b(t+\delta t) d\Omega + \int_{\Omega(t)} b(t+\delta t) d\Omega - \int_{\Omega(t)} b(t) d\Omega \right] \right\} \quad (6)$$

$$\frac{DB}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[ \overbrace{\int_{\Omega(t+\delta t)} b(t+\delta t) d\Omega - \int_{\Omega(t)} b(t+\delta t) d\Omega}^{I_2} \right] + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[ \int_{\Omega(t+\delta t)} b(t+\delta t) d\Omega - \int_{\Omega(t)} b(t+\delta t) d\Omega \right] = \\
 &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega(t+\delta t) - \Omega(t)} b(t+\delta t) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Si  $\delta t \ll 1$ , entonces se puede suponer  $d\Omega \approx \vec{u} \cdot \hat{n} \delta t dA$  ( $\hat{n}$  es el vector unitario normal a la frontera del volumen de control; apunta hacia afuera).

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\delta t} \int_{A(t)} b(t+\delta t) \vec{u} \cdot \hat{n} \delta t dA \right] \\
 &= \int_{A(t)} b(t) \vec{u} \cdot \hat{n} dA
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} b(\vec{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega + \int_{A(t)} b(t) \vec{u} \cdot \hat{n} dA,} \quad (10)$$

pero

$$\int_{A(t)} b(t) \vec{u} \cdot \hat{n} dA = \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot (b\vec{u}) d\Omega \quad (\text{teorema de la divergencia})$$

Luego,

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} b(\vec{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla \cdot (b\vec{u}) \right] d\Omega} \quad (11)$$

Si  $b = \rho$  y se conserva la masa *total*, entonces

$$0 = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] d\Omega \quad (12)$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}). \quad (13)$$

Si  $\rho$  es una constante del espacio y del tiempo,

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{fluido } \textit{incompresible}) \quad (14)$$

Escribiendo  $b = \rho \tilde{b}$ , con  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$  la densidad del material en un volumen de control infinitesimal, se puede mostrar, usando el principio de conservación de masa, que:

$$\frac{D\tilde{b}}{Dt} = \frac{\partial \tilde{b}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \tilde{b}. \quad (\text{derivada material de } \tilde{b})$$

(15)

# Bibliografía

- Bird** "Transport Phenomena", R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot, 2nd Ed., Wiley, New York, 2001
- Szeckely** "Rate Phenomena in Process Metallurgy", J. Szeckely and N. J. Themelis, Wiley, New York, 1971
- Geiger** "Transport Phenomena in Metallurgy", G. H. Geiger and D. R. Poirier, Minerals Metals and Materials Society, 1994.
- Dullien** "Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure", F. A. L. Dullien, Academic Press, 1992.
- Geankoplis** "Mass Transport Phenomena", C. J. Geankoplis, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1972.
- Zimmerman** "Multiphysics Modeling with Finite Element Methods", W. Zimmerman, World Scientific, UK, 2006.
- Utigard** "An introduction to Fluid Flow, Heat and Mass Transfer", T. Utigard, University of Toronto, 2000.