MA4702-1. Programación Lineal Mixta Otoño 2024.
Profesor: José Soto.
Escriba(s): Sebastián Gangas y Matías Núñez.
Editor: Christian Pulgar
Fecha: 26 de Abril de 2024

Cátedra 9

1. Continuación a partir del auxiliar

Consideremos $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$

Definición 1 (Restricción redundante)**.** Se dice que una restricción i (fila i-ésima de matriz A) es *redundante* si:

$$P = P(A_{[m]-i}, b_{[m]-i})$$

Notar que esto alude a que el poliedro generado no cambia al eliminar la restricción de la i-ésima fila de la matriz A.

Definición 2 (Restricción irredundante)**.** Una restricción i es *irredundante* si no es redundante.

Observación 1. *Si la i-ésima restricción es irredundante tenemos que:*
1. $F_i = \{x \in P : a_i^T x = b_i\}$ *es faceta.*
2. *act*(F_i) = *act*$(P) \cup \{i\}$.
3. *dim*(F_i) = *dim*(P) - 1

Definición 3 (Representación minimal de P)**.** Sea P un poliedro de la forma anterior, decimos que P es *representación minimal* si ninguna fila es redundante, ie:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : A_I x = b_I,\ A_J x \le b_J\}$$

Con $I \cap J = \emptyset$ y $\text{act}(P) = I$.

Observación 2. *Si tenemos un poliedro P y de forma iterativa vamos retirando las restricciones redundantes se llegará a una representación minimal de P. Además para todo P poliedro existe al menos una representación minimal.*

Teorema 1. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ la representación minimal, es decir:

$$[m] = I \cup J$$
$$I = \text{act}(P)$$
$$J = \overline{\text{act}}(P)$$

Entonces se tienen las siguientes propiedades:
1. Si $J = \emptyset$, entonces P es espacio afín y no tiene caras propias.
2. Todas las caras minimales de P son espacios afines.
3. $\forall$ F faceta de P, $\exists! j \in J$ tal que F $= F_j$
4. $\forall$ F faceta de P, $\dim(F) = \dim(P) - 1$

Demostración:

[1] Si $J = \emptyset$, entonces por definición $P = \{x \in \mathbb{R}^n : A_I x = b_I\}$ con $\text{act}(P) = I$, pero recordemos de lema visto en clase pasada que afín(P) $= \{x \in \mathbb{R}^n : A_{\text{act}(P)} x = b_{\text{act}(P)}\}$ así obtenemos que: $P = \text{afín}(P)$
Luego como $P = \text{afín}(P)$ entonces la única cara que es diferente del conjunto vacío es P, pues los espacios afines no tienen caras propias. Así concluímos que P es espacio afín y no tiene caras propias.
[3] $\forall$ faceta F de P, $\exists! j \in J$ tal que F $= F_j$

- (Existencia) Sea F faceta de P, como F es cara, tenemos que

$$F = F_{\text{act}(F)}, \text{ donde } \text{act}(F) = K, \text{ y notar } K \supsetneq I (\text{recordar que } F_I = P)$$

  Con ello tomamos $j \in K \setminus I$. Luego:

$$P = F_I \supsetneq F_j = F_{I \cup \{j\}} \supseteq F_K = F$$

  Luego, por maximalidad podemos concluir que $F_j = F$.
- (Unicidad) Supongamos que tenemos $j, k \in J$ son tal que $F_j = F_k$, tenemos lo siguiente:

$$\text{act}(F_j) = \text{act}(F_k)$$

  Ahora como ambas son representacion minimal, j y k son irreductibles, con ello tenemos que:

$$\text{act}(F_j) = I \cup \{j\}$$
$$\text{act}(F_k) = I \cup \{k\}$$

  Lo cual implica que j = k. Con lo cual se concluye la demostración.

Antes de probar el Teorema de Hoffman-Kruskal, probemos el siguiente lema:

Lema 1. *Si F es cara de P, lin$(F) =$ lin(P)*

Demostración: Recordando que:

$$\text{Ker}(A) = \text{lin}(P) = \{r \in \mathbb{R}^n : \forall x \in P,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ x + \lambda r \in P\}$$

Sean F una cara de P, $I = \text{act}(F)$, es decir $F = F_I = \{x \in P : A_I = b_I\}$ y $J = \overline{\text{act}}(P)$. Escribamos:

$$F_I = \{x \in \mathbb{R}^n : A_I x = b_I, Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : -A_I x \leq -b_I, A_I x \leq b_I, A_J x \leq b_J\}$$

Entonces:

$$\text{lin}(F_I) = \text{Ker}\begin{pmatrix} A_I \\ -A_I \\ A_J \end{pmatrix} = \text{Ker}(A) = \text{lin}(P)$$

■

Teorema 2 (Teorema de Hoffman-Kruskal)**.** Sea $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ poliedro, y F una cara no vacía de P.
F es cara minimal ssi $\dim(F) = \dim(\text{lin}(F)) = \dim(\text{Ker}A) = n - \text{rango } A$ En particular se tiene que todas las caras minimales de P tienen igual dimensión entre ellas.

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea F cara mininal, escribamos $F = F_I$ con $I = \text{act}(F)$, entonces como F es cara minimal de P es un espacio afín, entonces:

$$\begin{aligned} \text{afín}(F_I) &= F_I \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : A_{\text{act}(F)}x = b_{\text{act}(F)}\} \\ &= \{\bar{x}\} + \{x : A_{\text{act}(F)}x = 0\} \\ &= \{\bar{x}\} + \text{Ker}(A_{\text{act}(F)}) \\ &= \{\bar{x}\} + \text{lin}(F_I) \\ &= \{\bar{x}\} + \text{lin}(P) \end{aligned}$$

Esta última igualdad viene del lema probado anteriormente, luego como $\text{lin}(P) = \text{Ker}(A)$ obtenemos:

$$\{\bar{x}\} + \text{lin}(P) = \{\bar{x}\} + \text{Ker}(A)$$

Finalmente:

$$\dim(F_I) = \dim(\text{lin}(P) = \dim(\text{Ker}(A)))$$

Así concluímos que todas las caras tienen la misma dimensión.
($\Leftarrow$) Sea F cara no vacía de P tal que cumple la igualdad, luego $\dim(F) = \dim(\text{lin}(P) \Rightarrow F = \{\overline{x}\} + \text{lin}(P)$
$\Rightarrow \dim(F) = \dim(\text{lin}(P)) \Rightarrow J = \emptyset$
Así, F es espacio afín por lo que no tiene caras propias, entonces necesariamente es minimal, llegando a lo pedido. ■

Observación 3. *Si P tiene vértices (por definición de curso caras con dimensión 0), entonces todas sus caras minimales son vértices.*

Definición 4 (Poliedro Puntiagudo)**.** Sea P $\subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro, decimos que P es *Poliedro Puntiagudo* si tiene vértices.

Observación 4.

1. *P tiene vértices ssi:*

$$\begin{aligned} 0 &= dim(KerA) = n - rango(A) \\ &\Leftrightarrow \{0\} = lin(P) \end{aligned}$$

   Con esto podemos concluir que, si $P \subseteq Q$ y Q no tiene lineas, entonces P tiene vértices.
   Como ejemplo de lo anterior:
   - *Cualquier poliedro del tipo $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$ es puntiagudo*
   - *Cualquier poliedro acotado no vacío (polítopo no vacío) es puntiagudo*
2. *Otra consecuencia de Hoffman-Kruskal es que $\forall i \in [dim(lin(P)), dim(P)]$ existe una cara, las secuencias maximales de caras (distintas de ϕ):*

$$F^1 \subseteq F^2 \subseteq ... \subseteq F^k$$

   cubren todo $[dim(lin(P)), dim(P)]$.

Corolario 1 (Corolarios del Teorema de Hoffman-Kruskal)**.** Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliedro:

1. Toda cara propia es intersección de facetas.
2. Los únicos poliedros sin faceta son los espacios afines.

Teorema 3 (Caracterización de representación minimal)**.** *Sean* $\{A_I x = b_I, A_J x \leq b_J\}$ *y* $\{C_K x = d_K, C_L x \leq d_L\}$ *dos representaciones minimales de un poliedro P. Entonces tenemos:*

1. *Como afín(P)* $= \{x \in \mathbb{R}^n : A_I x = b_I\} = \{\bar{x}\} + Ker(A_I)$ *y afín(P)* $=\{x \in \mathbb{R}^n : C_K x = d_K\} = \{\bar{x}\} + Ker(C_K)$ *entonces tenemos que* $Ker(A_I) = Ker(C_K)$
2. *Las filas de* A_I *y las de* C_K *(como conjuntos c/u por su lado) son base del mismo espacio vectorial, luego ambos son generadores de* $Ker(A_I)^\perp = Ker(C_K)^\perp$ *y mas aún son minimales (son l.i. por ser restricciones irredundantes)*
3. $|I| = |K| = n - dim(P)$
4. $|J| = |L| =$ *N° de facetas*
5. *Si F es faceta definida por* $A_{\{j\}} x = b_{\{j\}}$ *y* $C_{\{l\}} x = d_{\{l\}}$*, entonces las filas de* $A_{I \cup \{j\}}$ *y de* $C_{K \cup \{l\}}$ *generan el mismo espacio vectorial.*

Ejemplo 1. Veamos el siguiente ejemplo en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} P: \quad & x + y = 2 \qquad & 2x + 2y = 4 \\ & x + z \leq 3 \qquad & -y + z \leq 1 \end{aligned}$$

Aquí, ambas representaciones (izquierda y derecha) generan el mismo poliedro P.
En particular, si $\dim(P) = n$ y $\text{act}(P) = \phi$, entonces:

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^n : A_J x \leq b_J\} \qquad (J = [m]) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : C_L x \leq c_L\} \end{aligned}$$

Entonces C es una amplificación y permutación de las filas de A, y d lo mismo, con respecto a b.
En particular si el poliedro tiene dimensión n y $b \in \{-1, +1, 0\}^n$, entonces esta representación es única.

Definición 5 (Punto extremo)**.** Sea C convexo, $x \in C$ es punto extremo si $x \notin \text{conv}(C \setminus x)$.

Teorema 4. Sea P poliedro puntiagudo tal que $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$, los siguientes son equivalentes:

1. (Dimensional) $\overline{x}$ es vértice (ie. $\{\overline{x}$ es cara de $P\}$).
2. (Rango) $\exists n$ restricciones l.i. que se activa en $\overline{x}$.
3. (Geometría) $\overline{x}$ es punto extremo.
4. (Optimización) $\exists w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\text{argmax}\{w^T y : y \in P\} = \{\overline{x}\}$.

Demostración: Sean $I = \text{act}(\overline{x})$ y $J = \overline{\text{act}}(\overline{x})$:

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

$$\begin{aligned} \{\overline{x}\} \text{ es cara} &\Leftrightarrow \{\overline{x}\} = F_I \\ &\Leftrightarrow \dim(\{x \in P : A_I x = b_I\}) = 0 \\ \text{Pero como } \dim(F_I) = n - \text{rango}(A_I) \qquad &\Leftrightarrow \text{rango}(A_I) = n \\ &\Leftrightarrow \text{rango-fila}(A_I) = n \\ &\Leftrightarrow \text{hay } n \text{ filas l.i. en } A_I \end{aligned}$$

(1) $\Leftrightarrow$ (4) $\{\overline{x}\}$ es cara $\Leftrightarrow \exists$ desigualdad válida $w^T x \leq \delta$ tal que $\{\overline{x}\} = \{x \in P : w^T x = \delta\}$
$\Leftrightarrow \exists (w, \delta)$ tal que $\text{máx}\{w^T x : x \in P\} = w^T \overline{x} \Leftrightarrow arg\,\text{máx}\{w^T x : x \in P\} = \{\overline{x}\}$

(3) $\Rightarrow$ (2) Sea $\overline{x}$ punto extremo, y $I = \text{act}(\{\overline{x}\})$.
Por contradicción supongamos que hay menos de n restricciones l.i. que se activan en $\overline{x}$, es decir: $\text{rango}(A_I) < n$, esto implica que $\dim(\text{Ker} A_I) \geq 1 \Rightarrow \exists y \in \text{Ker}(A_I) \Leftrightarrow A_I y = 0$.
Ahora para $\varepsilon \geq 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} A_I(\overline{x} + \varepsilon y) &= A_I \overline{x} + \varepsilon A_I y \\ &= b_I + \varepsilon \cdot 0 = b_I \\ \text{Si } J = \overline{\text{act}}(\{\overline{x}\}), \qquad A_J(\overline{x} + \varepsilon y) &= A_J \overline{x} + \varepsilon A_J y < b_J \end{aligned}$$

Esto último tomando ε suficientemente pequeño $\Rightarrow \overline{x} + \varepsilon y \in P$.
Luego notar $\overline{x} = \frac{\overline{x}+\varepsilon y}{2} + \frac{\overline{x}-\varepsilon y}{2}$ donde $\overline{x} + \varepsilon y, \overline{x} - \varepsilon y \in P$ y además son distintos, por lo tanto $\overline{x}$ no es punto extremo llegando a una contradicción y concluímos.

Referencias

[1] Gallai, T. (1959). Über extreme Punkt-und Kantenmengen. Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. 2 (1959), 133–138.