P4.

Considere el sistema lineal

$$x' = A\,x,$$

donde A es una matriz 2×2 de la forma

$$A = \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad b, c \in \mathbb{R}.$$

Encuentre la solución general del sistema en cada uno de los siguientes casos:

(i) (2.0 ptos.) La matriz A tiene **dos** vectores propios.

(ii) (2.0 ptos.) La matriz A tiene **solo un** vector propio.

(iii) (2.0 ptos.) Encuentre los puntos críticos del sistema y dibuje un número suficiente de curvas que dejen claro el plano de fase para este sistema cuando $b = 1$ y $c = -1$.

(i) Caso en que A posee *dos* vectores propios

1. Valores propios.

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} b-\lambda & c \\ 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (b-\lambda)^2.$$

Por lo tanto

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = b} \qquad \text{+0,5}$$

con multiplicidad algebraica 2.

2. Dimensión del espacio propio.

$$A - bI = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema $(A - bI)v = 0$ queda

$$c\,v_2 = 0, \qquad 0 = 0.$$

- Si $c \neq 0$, entonces $v_2 = 0$ y $v = (v_1, 0)^\top$; el espacio propio es unidimensional (no posible). +0,4
- Si $c = 0$, la matriz se anula y *todo* vector no nulo es autovector; el espacio propio es bidimensional (base estándar). +0,4

Para que A tenga *dos* vectores propios linealmente independientes (de modo que sea diagonalizable) se requiere necesariamente

$$\boxed{c = 0.}$$

En este caso $A = bI_2$ y cualquier par de vectores linealmente independientes (por ejemplo $e_1 = (1,0)^\top, e_2 = (0,1)^\top$) forma una base de autovectores. +0,2

3. Exponencial de A.

Con $c = 0$ se tiene $A = bI_2$. La serie de potencias del exponencial matricial da simplemente

$$e^{At} = e^{bt}\,I_2.$$

4. Solución general.

Sea $x(0) = (x_{1,0}, x_{2,0})^\top$. Entonces

$$\boxed{x(t) = e^{At}\, x(0) = e^{bt} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\, e^{bt} \\ C_2\, e^{bt} \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}$$

+0,5

Equivalentemente, tomando los autovectores e_1, e_2 como columnas de una matriz fundamental $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \left[e^{bt} e_1 \;\; e^{bt} e_2\right] = e^{bt} I_2, \quad x(t) = \Phi(t)\, c, \;\; c \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Caso en que A tiene *un solo* vector propio $(c \neq 0)$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad b, c \in \mathbb{R}, \;\; c \neq 0.$$

El autovalor es único $\lambda = b$ (multiplicidad algebraica 2). Mostramos que $\dim\ker(A - bI) = 1$; por tanto A no es diagonalizable y necesitamos un **vector propio generalizado**.

---

1. Vector propio.

$$A - bI = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies c\, v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

+0,5

(es la única dirección propia, pues $c \neq 0$).

---

2. Vector propio generalizado.

Buscamos w tal que $(A - bI)\, w = v$:

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies c\, w_2 = 1, \qquad w_2 = \frac{1}{c}, \quad w_1 \text{ libre.}$$

Tomamos, por simplicidad,

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

+0,5

---

3. Exponencial de A.

$$e^{At} = P\, e^{Jt}\, P^{-1} = e^{bt}\Big(I + t\, c\, E\Big), \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

+0,5

porque $A = bI + cE$ y $E^2 = 0$ (método directo: $e^{At} = e^{bt}(I + cEt)$).

$$\boxed{e^{At} = e^{bt}\begin{pmatrix} 1 & c\,t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

---

6. Solución general del sistema $\dot{x} = Ax$.

Sea $x(0) = (x_{1,0}, x_{2,0})^{\top}$. Entonces

$$x(t) = e^{At}x(0) = e^{bt}\begin{pmatrix} x_{1,0} + c\,t\,x_{2,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \boxed{x(t) = C_1\,e^{bt}\,v \;+\; C_2\,e^{bt}(t\,v + w)},$$ +0,5

con $C_1 = x_{1,0},\ C_2 = c\,x_{2,0}$ y $v = (1,0)^{\top},\ w = (0, 1/c)^{\top}$.

(iii) Puntos críticos y plano de fase para $b = 1,\ c = -1$

El sistema es

$$x' = A\,x, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Punto crítico.

$$A\,x = 0 \implies x = 0,$$ +0,3

de modo que el **único** punto crítico es el origen.

2. Clasificación lineal.

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0.$$

La matriz no es diagonalizable porque $\dim\ker(A - I) = 1\ \ (c \neq 0)$; el origen es un **nodo inestable**. +0,2

3. Solución explícita.

Para $b = 1,\ c = -1$ la solución general hallada en el inciso (ii) se reduce a

$$x(t) = e^{t}(C_1\,v + C_2\,(t\,v + w)), \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\boxed{x_1(t) = e^{t}(C_1 + C_2 t), \qquad x_2(t) = -C_2\,e^{t}.}$$ +0,3

Los parámetros $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ se fijan con la condición inicial $x(0) = (x_1(0), x_2(0))^{\top}$.

4. Prescindir de t

De la segunda ecuación:

$$e^{t} = -\frac{x_2}{C_2}, \qquad \text{válido siempre que } x_2\,C_2 < 0 \text{ (caso no trivial } C_2 \neq 0).$$ +0,2

Sustituyendo en $x_1(t)$:

$$x_1 = \Big(-\frac{x_2}{C_2}\Big)\Big(C_1 + C_2\,\ln\!\big(-\tfrac{x_2}{C_2}\big)\Big)$$
$$= -\frac{C_1}{C_2}\,x_2 \;-\; x_2\,\ln\!\Big(-\frac{x_2}{C_2}\Big).$$

+0,3

5. Ecuación cartesiana del lugar geométrico.

$$\boxed{x_1 + x_2\,\ln\!\big(-\tfrac{x_2}{C_2}\big) = -\frac{C_1}{C_2}\,x_2, \qquad x_2\,C_2 < 0.}$$

- El cociente $-C_1/C_2$ queda fijado por la condición inicial, así que cada trayectoria corresponde a una curva de la *familia*
$$x_1 = -\,x_2\Big(\ln|x_2| + \ln\tfrac{1}{|C_2|} + \tfrac{C_1}{C_2}\Big).$$
+0,3

- Todas las curvas pasan por el origen sólo si $C_2 = 0$; entonces la solución es la recta $x_1 = e^t C_1$ sobre el autovector v.

+0,4

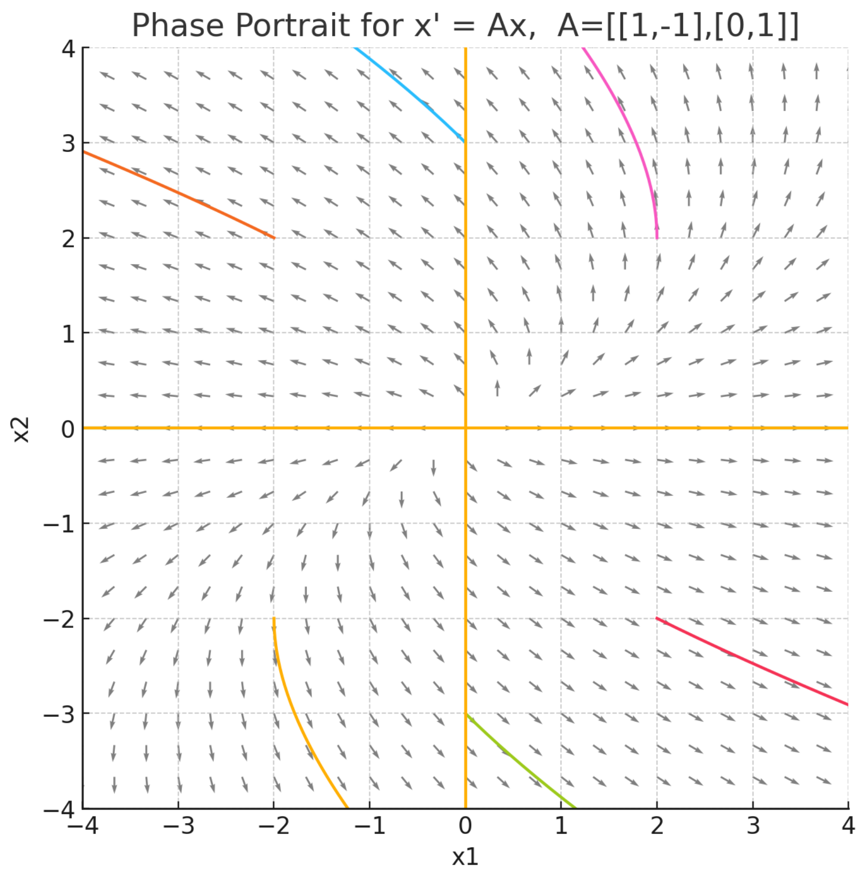

Figura 1