Pauta C3

Profesor: : Raúl Manasevich
Auxiliar: Sivert Escaff G.
Ayudantes: Camila Vera, Benjamín Ibarra,Bruno Ponce, Tomas Ubilla

P1.

Considere la siguiente ecuación diferencial

$$x' = A\,x, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) **(4.0 ptos.)** Considere las condiciones iniciales

$$x^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x^3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y encuentre las soluciones respectivas $x^1(t)$, $x^2(t)$ y $x^3(t)$ del sistema.

(ii) **(2.0 ptos.)** A partir de estos resultados, evalúe la matriz exponencial del sistema y la solución correspondiente para la condición inicial

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solución

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \dot{x} = A\,x,\; x(t) \in \mathbb{R}^3.$$

—

Paso 1. Polinomio característico

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda).$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1}, \qquad \boxed{\lambda_2 = 3}, \qquad \boxed{\lambda_3 = 5}.$$

Paso 2. Vectores propios

1. $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)v = 0 \implies v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda_2 = 3$:

$$(A - 3I)v = 0 \implies v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\lambda_3 = 5$:

$$(A - 5I)v = 0 \implies v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la solución general se expresa como

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{t} v_1 + c_2 e^{3t} v_2 + c_3 e^{5t} v_3.$$

Determinación de las constantes

- Para $x^1(0) = (1, 0, 0)^\top$, resolvemos $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = (1, 0, 0)^\top$, obteniendo

  $$(c_1, c_2, c_3) = \left(\tfrac{1}{8},\ -\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8}\right).$$

  Así,

  $$x^1(t) = \tfrac{1}{8} e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{4} e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{8} e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Para $x^2(0) = (0, 1, 0)^\top$, se resuelve $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = (0, 1, 0)^\top$, hallando

  $$(c_1, c_2, c_3) = \left(\tfrac{1}{4},\ 0,\ -\tfrac{1}{4}\right).$$

  Luego

  $$x^2(t) = \tfrac{1}{4} e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{4} e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Para $x^3(0) = (0, 0, 1)^\top$, resolvemos $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = (0, 0, 1)^\top$, resultando

  $$(c_1, c_2, c_3) = \left(\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4}\right).$$

Por tanto

$$x^3(t) = \tfrac{1}{4}e^{t}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}e^{3t}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \tfrac{1}{4}e^{5t}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Parte (b)

(ii) Cálculo de e^{At} y solución con $x(0) = (1, 1, -1)^\top$

Como A es diagonalizable con valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ y vectores propios

$$v_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Definimos la matriz de paso

$$V = [\, v_1\ v_2\ v_3 \,], \quad \Lambda = \mathrm{diag}(1, 3, 5).$$

Entonces por diagonalización

$$A = V\,\Lambda\,V^{-1},$$

y la exponencial matricial es

$$e^{At} = V\,e^{\Lambda t}\,V^{-1} = V\begin{pmatrix}e^{t} & 0 & 0\\ 0 & e^{3t} & 0\\ 0 & 0 & e^{5t}\end{pmatrix}V^{-1}.$$

Cálculo de V^{-1}.

Tras invertir V:

$$V^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ -4 & 5 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Solución con $x(0) = (1, 1, -1)^\top$.

La solución general es

$$x(t) = e^{At}\,x(0).$$

Para calcularla, primero expresamos $x(0)$:

$$c = V^{-1}\,x(0) = \frac{1}{33}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ -4 & 5 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix}1+3+1\\ -4+5-3\\ 2-1-2\end{pmatrix} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}.$$

Luego

$$x(t) = V\,e^{\Lambda t}\,c = V\begin{pmatrix}e^{t}\,c_1\\ e^{3t}\,c_2\\ e^{5t}\,c_3\end{pmatrix} = \frac{1}{33}\Big[c_1 e^{t}\,v_1 \;+\; c_2 e^{3t}\,v_2 \;+\; c_3 e^{5t}\,v_3\Big].$$

Sustituyendo $c_1 = 5$, $c_2 = -2$, $c_3 = -1$:

$$x(t) = \frac{1}{33}\Big[5e^{t}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - 2e^{3t}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} - e^{5t}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\Big].$$

Ésta es la solución única que satisface $x(0) = (1, 1, -1)^{\top}$.

P2.

Considere el sistema lineal no autónomo 2×2

$$x' \;=\; A(t)\,x, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad A(t) = \begin{bmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) **(1.5 ptos.)** Para cada $t \in \mathbb{R}$ encuentre los valores propios y los correspondientes vectores propios de la matriz $A(t)$.

(ii) **(1.5 ptos.)** Encuentre la matriz K cuyas columnas sean dichos vectores propios y demuestre que, mediante la transformación $x = K\,y$, el nuevo sistema en la variable dependiente $y = [y_1, y_2]^\top$, aunque sigue siendo no autónomo, queda desacoplado.

(iii) **(3.0 ptos.)** Resuelva el sistema para y y, a partir de ello, obtenga la solución $x(t)$ del sistema original $x' = A(t)\,x$.

(i) Valores y vectores propios de $A(t)$

1. Polinomio característico

$$\det\bigl(A(t) - \lambda I\bigr) = \begin{vmatrix} 2-t-\lambda & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1-\lambda \end{vmatrix} = (2-t-\lambda)(2t-1-\lambda) - (2t-2)(1-t).$$

Calculemos:

$$(2t-2)(1-t) = 2(t-1)(1-t) = -\,2\,(t-1)^2,$$
$$(2-t-\lambda)(2t-1-\lambda) = \lambda^2 - \lambda(t+1) - 2t^2 + 5t - 2.$$

Por lo tanto

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda(t+1) + t,$$

y el polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (t+1)\lambda + t.$$

2. Eigenvalores

La ecuación $p(\lambda) = 0$ da

$$\lambda_\pm(t) = \frac{t+1 \pm \sqrt{(t+1)^2 - 4t}}{2} = \frac{t+1 \pm |t-1|}{2}.$$

$$\boxed{\lambda_1(t) = t}, \qquad \boxed{\lambda_2(t) = 1} \qquad (\text{para todo } t \in \mathbb{R}).$$

(Para $t < 1$ los papeles de λ_1 y λ_2 se invierten, pero los valores siguen siendo $\{\,1,\, t\}$.)

3. Eigenvector para $\lambda = 1$

$$A(t) - I = \begin{pmatrix} 1-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-2 \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ecuación $(A-I)v=0$:

$$(1-t)(x-2y)=0 \implies x=2y \quad (t\neq 1).$$

Tomamos

$$\boxed{v_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}} \qquad \text{(sirve también para } t=1\text{).}$$

4. Eigenvector para $\lambda=t$ $(t\neq 1)$

$$A(t)-tI=\begin{pmatrix}2-2t & 2t-2\\ 1-t & t-1\end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Ecuación $(A-tI)v=0$:

$$(1-t)(x-y)=0 \implies x=y.$$

Elegimos

$$\boxed{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}.$$

(ii) Transformación que desacopla el sistema

1. Matriz de autovectores K**.**

Del inciso (i) sabemos que, para todo $t\in\mathbb{R}$,

$$\lambda_1(t)=t,\quad v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda_2(t)=1,\quad v_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Tomamos como matriz de cambio de base $K=[\,v_1\;\;v_2\,]$:

$$K=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \det K=1\cdot 1-1\cdot 2=-1\neq 0,$$

de modo que K es invertible. Su inversa es

$$K^{-1}=\frac{1}{\det K}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Cambio de variables $x=K\,y$**.**

Sea $y(t)=[\,y_1(t),\,y_2(t)\,]^\top$. Derivando,

$$\dot{x}=K\,\dot{y} \quad\implies\quad K\,\dot{y}=A(t)\,x=A(t)\,K\,y.$$

Multiplicando por K^{-1}:

$$\boxed{\dot y = K^{-1}A(t)K\, y = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y}.$$

4. **Sistema desacoplado.**

   El sistema resultante (aún no autónomo) queda separado por componentes:

$$\dot y_1 = t\, y_1, \qquad \dot y_2 = y_2.$$

(iii) Integrar el sistema desacoplado y reconstruir $x(t)$

En el inciso (ii) se mostró que el cambio de variables $x = K\, y$ con

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

lleva el sistema original $\dot x = A(t)x$ al sistema diagonal (aún no autónomo, pero desacoplado)

$$\dot y = \underbrace{K^{-1}A(t)K}_{(t,1)}\, y = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \;=\; \begin{cases} \dot y_1 = t\, y_1, \\ \dot y_2 = \;y_2. \end{cases}$$

—

1. Integración de las ecuaciones para $y(t)$

$$\begin{aligned} \dot y_1 = t\, y_1 \;&\Longrightarrow\; \frac{\dot y_1}{y_1} = t \;\Longrightarrow\; y_1(t) = y_1(0)\, e^{\frac{t^2}{2}}, \\ \dot y_2 = y_2 \;&\Longrightarrow\; y_2(t) = y_2(0)\, e^{\,t}. \end{aligned}$$

—

2. Relación entre $y(0)$ y $x(0)$

   Sea $x(0) = \big(x_1(0), x_2(0)\big)^\top$. Como $x(0) = K\, y(0)$, se tiene

$$y(0) = K^{-1}x(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\,x_1(0) + 2x_2(0) \\ x_1(0) - x_2(0) \end{pmatrix}.$$

   En consecuencia

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= \big[-x_1(0) + 2x_2(0)\big]\; e^{t^2/2}, \\ y_2(t) &= \big[\; x_1(0) - x_2(0)\big]\; e^{\,t}. \end{aligned}}$$

—

3. Reconstrucción de $x(t) = K\, y(t)$

$$x(t) = K\,y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores de $y_1(t)$ y $y_2(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \left[-x_1(0) + 2x_2(0)\right] e^{t^2/2} + 2\left[\,x_1(0) - x_2(0)\right] e^{\,t}, \\ x_2(t) &= \left[-x_1(0) + 2x_2(0)\right] e^{t^2/2} + \left[\,x_1(0) - x_2(0)\right] e^{\,t}. \end{aligned}}$$

—

4. Forma matricial compacta

Es útil escribir la solución como

$$\boxed{x(t) = K \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 0 \\ 0 & e^{\,t} \end{pmatrix} K^{-1}\,x(0)} \;=\; M(t)\,x(0),$$

donde

$$M(t) = \begin{pmatrix} -e^{t^2/2} + 2e^{\,t} & 2e^{t^2/2} - 2e^{\,t} \\ -e^{t^2/2} + e^{\,t} & 2e^{t^2/2} - e^{\,t} \end{pmatrix}.$$

Para cualquier condición inicial $x(0)$, la expresión anterior satisface $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, cumpliendo lo pedido.

P3.

Sea $A : I \longrightarrow \mathbb{M}^{n\times n}$ continua, $F : I \longrightarrow \mathbb{M}^{n\times n}$ continua y sea $C \in \mathbb{M}^{n\times n}$ una matriz de constantes.

(i) **(4.0 ptos.)** A partir del teorema de existencia y unicidad para sistemas, demuestre que el problema con condición inicial

$$(S) \qquad \begin{cases} X'(t) = A(t)\,X(t) + F(t), \\ X(t_0) = C, \qquad t_0 \in I, \end{cases}$$

tiene una *única* solución definida en el intervalo I, donde $X : I \longrightarrow \mathbb{M}^{n\times n}$ es de clase C^1.

(ii) **(2.0 ptos.)** Sea ahora $F(t)$, $t \in \mathbb{R}$ una solución del sistema

$$X'(t) = A\,X(t), \qquad X(0) = I,$$

donde A es una matriz $n \times n$ y I denota la matriz identidad. Evalúe la solución F e investigue si es única.

Solución

Demostración

Sea

$$(S) \qquad \begin{cases} X'(t) = A(t)\,X(t) + F(t), \\ X(t_0) = C, \end{cases} \qquad t \in I \subset \mathbb{R},$$

donde $A : I \to \mathbb{M}^{n\times n}$ y $F : I \to \mathbb{M}^{n\times n}$ son continuas, $C \in \mathbb{M}^{n\times n}$ es constante.

Paso 1. Descomponer en n ecuaciones vectoriales.

Escribamos

$$X(t) = \big[X^{(1)}(t)\ \dots\ X^{(n)}(t)\big], \qquad F(t) = \big[F^{(1)}(t)\ \dots\ F^{(n)}(t)\big], \qquad C = \big[c^{(1)}\ \dots\ c^{(n)}\big],$$

donde $X^{(k)}(t), F^{(k)}(t), c^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ son las columnas. Entonces (S) se separa en n sistemas lineales de dimensión n:

$$(S_k) \ \begin{cases} \dfrac{d}{dt}X^{(k)}(t) = A(t)\,X^{(k)}(t) + F^{(k)}(t), \\ X^{(k)}(t_0) = c^{(k)}, \end{cases} \qquad k = 1, \dots, n.$$

Paso 2. Aplicar el Teorema de Existencia y Unicidad (T.E.U.) a cada (S_k).

- El campo $f_k(t,x) = A(t)\,x + F^{(k)}(t)$ es *continuo* en t porque lo son $A(\cdot), F^{(k)}(\cdot)$.

Por el T.E.U. cada sistema (S_k) posee una única solución

$$X^{(k)} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n).$$

Paso 3. Reconstruir la solución matricial.

Defina
$$X(t) = \big[X^{(1)}(t) \ \ldots \ X^{(n)}(t)\big].$$
Cada columna verifica su ecuación, por lo que $X(t)$ satisface el sistema original (S) y $X \in \mathcal{C}^1\big(I, \mathbb{M}^{n\times n}\big)$.

Paso 4. Unicidad global.

Suponga que $Y(t)$ es otra solución de (S). Entonces sus columnas $Y^{(k)}(t)$ cumplen (S_k) con la misma condición inicial $c^{(k)}$. Por unicidad en (S_k) se tiene $Y^{(k)}(t) = X^{(k)}(t)$ para todo k, de modo que $Y(t) = X(t)$.

$$\boxed{\text{El problema con condición inicial } (S) \text{ tiene una única solución } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{M}^{n\times n}).}$$

(ii) Solución y unicidad para el problema matricial con dato $X(0) = I$

Sea $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ *constante.* Consideremos el problema de valor inicial

$$\boxed{\begin{cases} X'(t) = A\,X(t), \\ X(0) = I, \end{cases}} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Denotaremos por $F(t)$ una solución candidata. Demostraremos paso a paso que $F(t) = e^{At}$ y que dicha solución es única.

1. Definición del exponencial matricial (conocido)

$$e^{At} \ := \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

La serie es absolutamente convergente para todo t

2. Verificación de que $F(t) = e^{At}$ satisface el sistema.

Derivada. Termino a término (asumir conocido, se puede llegar y aplicar) :

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kA^kt^{k-1}}{k!} = A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = A\,e^{At}.$$

Condición inicial. $e^{A\cdot 0} = e^0 = I.$

Por lo tanto

$$\boxed{F(t) = e^{At} \text{ resuelve } X' = AX,\ X(0) = I.}$$

3. Unicidad de la solución.

Sea $G(t)$ otra solución con la misma condición inicial. Definamos

$$Y(t) := e^{-At}\,G(t).$$

Entonces

$$Y'(t) = (-A)e^{-At}G(t) + e^{-At}G'(t) = -A\,Y(t) + e^{-At}A\,G(t) = 0.$$

Así, $Y(t) =$ constante. Evaluando en $t = 0$:

$$Y(0) = e^{0}\,G(0) = I,$$

de donde $Y(t) \equiv I$ y, en consecuencia, $G(t) = e^{At}Y(t) = e^{At}$.

$$\boxed{\text{La solución } F(t) = e^{At} \text{ es única.}}$$

P4.

Considere el sistema lineal

$$x' = A\,x,$$

donde A es una matriz 2×2 de la forma

$$A = \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad b, c \in \mathbb{R}.$$

Encuentre la solución general del sistema en cada uno de los siguientes casos:

(i) (2.0 ptos.) La matriz A tiene **dos** vectores propios.

(ii) (2.0 ptos.) La matriz A tiene **solo un** vector propio.

(iii) (2.0 ptos.) Encuentre los puntos críticos del sistema y dibuje un número suficiente de curvas que dejen claro el plano de fase para este sistema cuando $b = 1$ y $c = -1$.

(i) Caso en que A posee ***dos*** vectores propios

1. Valores propios.

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} b-\lambda & c \\ 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (b-\lambda)^2.$$

Por lo tanto

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = b}$$

con multiplicidad algebraica 2.

2. Dimensión del espacio propio.

$$A - bI = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema $(A - bI)v = 0$ queda

$$c\,v_2 = 0, \qquad 0 = 0.$$

- Si $c \neq 0$, entonces $v_2 = 0$ y $v = (v_1, 0)^\top$; el espacio propio es unidimensional (no posible).
- Si $c = 0$, la matriz se anula y *todo* vector no nulo es autovector; el espacio propio es bidimensional (base estándar).

Para que A tenga *dos* vectores propios linealmente independientes (de modo que sea diagonalizable) se requiere necesariamente

$$\boxed{c = 0.}$$

En este caso $A = bI_2$ y cualquier par de vectores linealmente independientes (por ejemplo $e_1 = (1,0)^\top, e_2 = (0,1)^\top$) forma una base de autovectores.

3. Exponencial de A.

Con $c = 0$ se tiene $A = bI_2$. La serie de potencias del exponencial matricial da simplemente

$$e^{At} = e^{bt}\,I_2.$$

4. Solución general.

Sea $x(0) = (x_{1,0}, x_{2,0})^\top$. Entonces

$$\boxed{x(t) = e^{At}\, x(0) = e^{bt} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\, e^{bt} \\ C_2\, e^{bt} \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}$$

Equivalentemente, tomando los autovectores e_1, e_2 como columnas de una matriz fundamental $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \left[e^{bt}e_1 \;\; e^{bt}e_2\right] = e^{bt}I_2, \quad x(t) = \Phi(t)\, c,\; c \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Caso en que A tiene *un solo* vector propio ($c \neq 0$)

Sea

$$A = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad b, c \in \mathbb{R},\; c \neq 0.$$

El autovalor es único $\lambda = b$ (multiplicidad algebraica 2). Mostramos que $\dim\ker(A - bI) = 1$; por tanto A no es diagonalizable y necesitamos un **vector propio generalizado**.

---

1. Vector propio.

$$A - bI = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies c\, v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(es la única dirección propia, pues $c \neq 0$).

---

2. Vector propio generalizado.

Buscamos w tal que $(A - bI)\, w = v$:

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies c\, w_2 = 1, \qquad w_2 = \frac{1}{c}, \quad w_1 \text{ libre.}$$

Tomamos, por simplicidad,

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

---

3. Exponencial de A.

$$e^{At} = P\, e^{Jt}\, P^{-1} = e^{bt}\Big(I + t\, c\, E\Big), \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

porque $A = bI + cE$ y $E^2 = 0$ (método directo: $e^{At} = e^{bt}(I + cEt)$).

$$\boxed{e^{At} = e^{bt}\begin{pmatrix}1 & c\,t\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$$

---

6. Solución general del sistema $\dot{x} = Ax$.

Sea $x(0) = (x_{1,0}, x_{2,0})^\top$. Entonces

$$x(t) = e^{At}x(0) = e^{bt}\begin{pmatrix}x_{1,0} + c\,t\,x_{2,0}\\ \\ x_{2,0}\end{pmatrix} = \boxed{x(t) = C_1\,e^{bt}\,v \;+\; C_2\,e^{bt}(t\,v + w)},$$

con $C_1 = x_{1,0},\; C_2 = c\,x_{2,0}$ y $v = (1,0)^\top,\; w = (0, 1/c)^\top$.

(iii) Puntos críticos y plano de fase para $b = 1,\; c = -1$

El sistema es

$$x' = A\,x, \qquad A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1. Punto crítico.

$$A\,x = 0 \implies x = 0,$$

de modo que el **único** punto crítico es el origen.

2. Clasificación lineal.

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0.$$

La matriz no es diagonalizable porque $\dim\ker(A - I) = 1\;\; (c \neq 0)$; el origen es un **nodo inestable**.

3. Solución explícita.

Para $b = 1,\; c = -1$ la solución general hallada en el inciso (ii) se reduce a

$$x(t) = e^{t}\big(C_1\,v + C_2\,(t\,v + w)\big), \qquad v = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},$$

de donde

$$\boxed{x_1(t) = e^{t}(C_1 + C_2 t), \qquad x_2(t) = -C_2\,e^{t}.}$$

Los parámetros $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ se fijan con la condición inicial $x(0) = (x_1(0), x_2(0))^\top$.

4. Prescindir de t

De la segunda ecuación:

$$e^{t} = -\frac{x_2}{C_2}, \qquad \text{válido siempre que } x_2\,C_2 < 0 \text{ (caso no trivial } C_2 \neq 0).$$

Sustituyendo en $x_1(t)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \Big(-\frac{x_2}{C_2}\Big)\Big(C_1 + C_2\,\ln\!\big(-\tfrac{x_2}{C_2}\big)\Big) \\ &= -\frac{C_1}{C_2}\,x_2 \;-\; x_2\,\ln\!\Big(-\frac{x_2}{C_2}\Big). \end{aligned}$$

5. Ecuación cartesiana del lugar geométrico.

$$\boxed{x_1 + x_2\,\ln\!\big(-\tfrac{x_2}{C_2}\big) = -\frac{C_1}{C_2}\,x_2, \qquad x_2\,C_2 < 0.}$$

- El cociente $-C_1/C_2$ queda fijado por la condición inicial, así que cada trayectoria corresponde a una curva de la *familia*
$$x_1 = -\,x_2\Big(\ln|x_2| + \ln\tfrac{1}{|C_2|} + \tfrac{C_1}{C_2}\Big).$$
- Todas las curvas pasan por el origen sólo si $C_2 = 0$; entonces la solución es la recta $x_1 = e^t C_1$ sobre el autovector v.

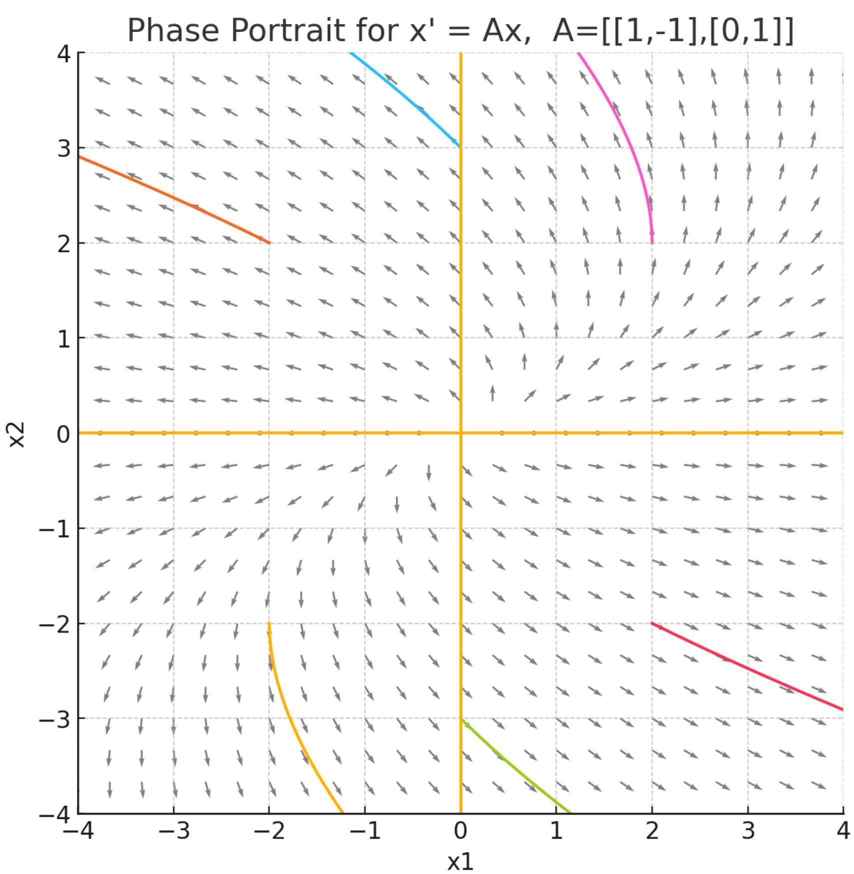

Figura 1