→ EDO lineal orden 1

→ EDO No lineal orden 1

→ EDO lineales a coef cte Homo orden 2

Sea:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Soluciones de la forma:

$$y(x) = e^{\lambda t}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Reemplazar:

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0 \qquad \forall t$$

$$e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \qquad / \cdot \frac{1}{e^{\lambda t}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{a\lambda^2 + b\lambda + c}_{\text{Polinomio característico}} = 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$$

Entonces:

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$

$$y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

Teorica: Sea S un conjunto de funciones:

$$S := \{ y \in \mathcal{F} : y : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ \underbrace{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}_{\text{EDO lineal Homo}} \}$$

* S es un espacio vectorial:

Dim(S) = orden de la EDO = 2

Entonces: Las base de S es de la forma:

$B = \{ y_1 , y_2 \}$ donde y_1 , y_2 son l.i. y generadores

Sabemos que si y es solución de la EDO.

$\Rightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}$ tq:

$$y(x) = A y_1 + B y_2$$

Solución general:

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Como encontrar $y_2(x)$ sol. l.i. si solo tengo $y_1(x)$.

↳ Uso formula de Liouville:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1(x)^2}\,dx$$

Para una EDO:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

Donde se conoce $y_1(x)$.

Entonces solución general es:

$$y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$$

Veamos el caso siguiente

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Con Polinomio característico:

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Con soluciones complejas $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

Prop: Teorema Algebra ii:

Si Polinomio a coef reales tiene solución compleja

$z \Rightarrow \bar{z}$ tambien es solución.

Entonces:

$$\bar{\lambda_1} = \lambda_2$$

Ademas:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad \lambda_1 = \alpha + \beta i$$

$$y_2(x) = e^{\bar{\lambda_1} x} \qquad \bar{\lambda_1} = \alpha - \beta i$$

Procedemos:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot \underbrace{e^{i\beta x}}_{\text{Ecuación de Euler}}$$

$$= e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right)$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)\right)$$

$$= e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right)$$

Puedo crear una nueva solución:

$$y_{r_1}(x) = \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2}$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right) + e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right)}{2}$$

$$\boxed{y_{r_1}(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)}$$

$$y_{2r_2}(x) = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Solución Real:

$$y(x) = A e^{\alpha x}\cos(\beta x) + B e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

P3. Considere el problema con condición inicial

$$y' = ty^{1/2} \quad y(0) = 0.$$

Demuestre que esta ecuación tiene una familia de soluciones no-triviales que dependen de dos parámetros.

Resolver: $y' = t y^{1/3}$ $\quad y(0) = 0$

Variable separable:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} + C$$

$$\int y^{-1/3}dy = \int t\,dt$$

$$\frac{y^{2/3}}{2/3} + c_2 = \frac{t^2}{2} + c_1 \qquad c_1 - c_2 = \bar{C}$$

$$\frac{3}{2}y^{2/3} = \frac{t^2}{2} + C \qquad /\cdot\frac{2}{3} \qquad C = \frac{2}{3}\bar{C}$$

$$y^{2/3} = \frac{t^2}{3} + C \qquad (\ )^{3/2}$$

$$y(t) = \left(\frac{t^2}{3}+c\right)^{3/2}$$

$$y(0) = 0 = \left(\frac{0^2}{3}+c\right)^{3/2} \Rightarrow c=0$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \left(\frac{t^2}{3}+0\right)^{3/2}} = \frac{t^3}{3^{3/2}}$$

↳ grafico

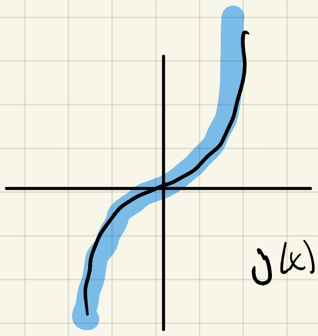
¿Tiene sol cte? $\boxed{y' = t\,y^{1/3} \qquad y(0)=0}$

$y(x)=0$ es solución ya que $y'(x)=0$

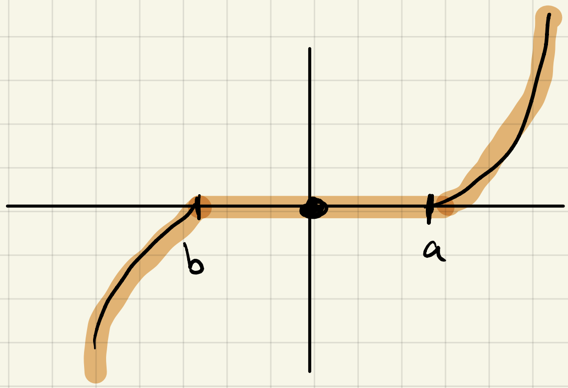
$$0 = t\cdot 0^{1/3} \quad ✓ \quad \forall x$$

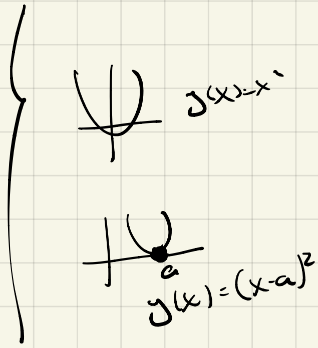
Además cumple $y(0)=0 \Rightarrow$ Es solución del del problema $y(x)=0$

Solución General:



$$y(x) = \frac{x^3}{3^{3/2}}$$





<u>general sol:</u>

$$y(x)\begin{cases}\dfrac{(x-a)^3}{3^{3/2}} & x>a\\[2ex] 0 & \text{si } x\in[b,a]\\[2ex] \dfrac{(x+b)^3}{3^{3/2}} & \text{si } x<b\end{cases}$$