Auxiliar 12: SNLA

Profesor: Francisco Ortega Culaciati
Auxiliares: Iñaki Escobar Cano

P1. Considere el SNLA

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - x^2 - xy \\ \dot{y} = -y + 2xy - y^2 \end{cases}$$

1. Encuentre todos los puntos críticos del primer cuadrante.
2. Clasifique los puntos críticos de acuerdo a tipo y estabilidad.
3. Dibuje el diagrama de fase de cada uno de los puntos críticos calculados anteriormente.
4. Bosqueje el diagrama de fase global del sistema no lineal original en el primer cuadrante.

P2. Considere el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y - 1 \\ y' = -x^2 + y^2 - 2x - 1 \end{cases}$$

1. Encuentre las nuclinas asociadas al SNLA.
2. Encuentre los puntos críticos del sistema e indique si son aislados o no.
3. Para los puntos aislados, realice el diagrama de fase local para sus SL asociados.
4. Grafique el diagrama de fase general del SNLA.

P3. Considere una varilla flexible de rigidez $k > 0$ y largo $L > 0$ anclada en el suelo y una masa m que oscila en su parte superior por efecto de la gravedad g con disipación $b \geq 0$. Si suponemos que $\frac{g}{L} = 1$ y $\frac{k}{m} = \frac{1}{2}$, la dinámica del desplazamiento angular θ con respecto a la vertical viene dada por la ecuación:

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\theta + \theta^3 + \beta\dot{\theta} = 0, \quad \text{donde } \beta = \frac{b}{m}$$

1. Reescriba la ecuación como el sistema no lineal equivalente en las variables $x = \theta$ e $y = \dot{\theta}$. Encuentre los puntos críticos de dicho sistema en función de β.
2. Si $\beta > 0$, $\beta \neq 2$, calcule el Jacobiano en los puntos críticos y clasifíquelos según tipo y estabilidad para distintos valores de β. Haga un gráfico cualitativo de cada uno de ellos.

3. Si $\beta = 0$, pruebe que la función $E(x, y) = 8y^2 - 4x^2 + 4x^4$ es constante a lo largo de las trayectorias del sistema.

Resumen
punto crítico: $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ es punto crítico de (S) si $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$. Denotaremos por C^* al conjunto de puntos críticos de (S).
Jacobiano:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Cosas importantes

Sea (x^*, y^*) un punto crítico de (S).

- El sistema (S) se dirá degenerado en torno a (x^*, y^*) si $|J(x^*, y^*)| = 0$.
- (x^*, y^*) se dirá **aislado** si $\exists\delta > 0$ tal que en $B((x^*, y^*), \delta)$ no existen otros puntos críticos. De lo contrario se dice que los puntos críticos son **densos** en torno a (x^*, y^*).
- (x^*, y^*) se dirá **estable** si:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0) : \|(x(t_0), y(t_0)) - (x^*, y^*)\| < \delta \implies \forall t \geq 0, \|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \epsilon$$

- (x^*, y^*) se dirá inestable si no es estable.
- (x^*, y^*) se dirá **asintóticamente estable** si es estable y

$$\exists\rho > 0 : \|(x(t_0), y(t_0)) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \rho \implies \lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$$

- Si $|J(x^*, y^*)| \neq 0$, entonces (x^*, y^*) es el único punto crítico de (S) y además es punto crítico aislado de (S) y del sistema linealizado (SL).
- Si $|J(x^*, y^*)| = 0$, entonces los puntos críticos de (SL) son densos en torno a (x^*, y^*). Más precisamente, si $|J(x^*, y^*)| \neq 0$, entonces C es una recta que contiene a (x^*, y^*); si $J(x^*, y^*) = 0$, es todo el plano ($C = \mathbb{R}^2$).

Teorema (Poincaré y Lyapunov)

Considere (x^*, y^*) un punto crítico de (S) tal que $|J(x^*, y^*)| \neq 0$, λ_1 y λ_2 los valores propios de $J(x^*, y^*)$ (que se asumen no nulos) y v_1 y v_2 los vectores propios asociados respectivos. Entonces el punto crítico (x^*, y^*) será:

1. Un **nodo** si λ_1 y λ_2 son reales y tienen igual signo.
    - Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, entonces es asintóticamente estable.
    - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, entonces es inestable.
2. Un **punto silla** si λ_1 y λ_2 son reales y tienen distinto signo.
3. Un **espiral** si λ_1 y λ_2 son complejos conjugados, i.e., $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw$ con $\sigma \neq 0$.
    - Si $\sigma < 0$, entonces es asintóticamente estable.
    - Si $\sigma > 0$, entonces es inestable.