Auxiliar 10+1: Más sistemas lineales (y uno no lineal)

Profesor: Francisco Ortega Culaciati
Auxiliares: Iñaki Escobar Cano

P1. Consideremos el siguiente sistema lineal:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

P2. Consideremos el siguiente sistema lineal:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

P3. Para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, considere el sistema no lineal:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x - \alpha y), \\ \frac{dy}{dt} = y(1 - 2x - y), \end{cases}$$

Determine los puntos críticos (o de equilibrio) y la matriz Jacobiana o Diferencial del sistema asociada.

Resumen

Definición Exponencial de una Matriz: Sea $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Se define la exponencial de M como

$$e^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + \cdots$$

Teorema (Fórmula de Variación de Parámetros). Considere el sistema lineal

$$(S) \qquad \begin{cases} \mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + B(t) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X_0} \end{cases}$$

i) Si Φ es la matriz fundamental canónica del sistema homogéneo $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$, entonces la solución de (S) está dada por la Fórmula de Variación de Parámetros:

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{X_0} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}B(s)\,ds.$$

ii) Si M es una matriz fundamental del sistema homogéneo $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$, entonces

$$\Phi(t) = M(t)M(t_0)^{-1}$$

es la matriz fundamental canónica de $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$ y la solución de (S), en virtud de i), se escribe como

$$\mathbf{X}(t) = M(t)M(t_0)^{-1}\mathbf{X_0} + M(t)\int_{t_0}^{t} M(s)^{-1}B(s)\,ds.$$

iii) Más aún, si A es una matriz constante, entonces

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)},$$

es decir, $e^{A(t-t_0)}$ es la matriz fundamental canónica de $\mathbf{X_0} = A\mathbf{X}$ y la solución de (S), en virtud de i), se escribe

$$\mathbf{X}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{X_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)\,ds.$$

$(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ es punto crítico de (S) si $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$. Denotaremos por C^* al conjunto de puntos críticos de (S).

Jacobiano

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$