**P1. (C3 Otoño 2022)** Resuelva el siguiente sistema de EDO usando el método de la matriz exponencial:

$$x_1' = 4x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = 1$$
$$x_2' = 3x_1 - x_2, \quad x_2(0) = -3$$

y verifique que la solución tiende a cero cuando $t \to \infty$

Primero escribimos esto de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad x_1(0) = 1 \;,\; x_2(0) = -3$$

Calculamos los valores y vectores propios.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) - 6 = 0$$

$$-4 + \lambda + \lambda^2 - 4\lambda - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5 \;,\; \lambda_2 = -2$$

$\vec{v}.p$ de $\lambda = 5$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2y$

tomamos $y = 1 \Rightarrow \vec{v}.p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}.p$ de $\lambda = -2$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -3x$

tomamos $x = 1 \Rightarrow \vec{v}.p = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{Det(P)} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \; e^{At} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2e^{5t} & e^{-2t} \\ e^{5t} & -3e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6e^{5t} + e^{-2t} & 2e^{5t} - 2e^{-2t} \\ 3e^{5t} - 3e^{-2t} & e^{5t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} \cdot \vec{x}(0) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6e^{5t} + e^{-2t} & 2e^{5t} - 2e^{-2t} \\ 3e^{5t} - 3e^{-2t} & e^{5t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6e^{5t} + e^{-2t} - 6e^{5t} + 6e^{-2t} \\ 3e^{5t} - 3e^{-2t} - 3e^{5t} - 18e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \end{pmatrix} \quad t \to \infty \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} //$$

**P2. (C3 Otoño 2023)** Considere el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = A(t)\vec{x}(t)$$

donde $A : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es una función a valores matriciales, continua, no trivial, y de período $T > 0$, es decir $A(t+T) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponga además que $A(\cdot)$ es una función impar, es decir para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $A(-t) = -A(t)$. Sea $W(t)$ la matriz fundamental de este sistema que satisface $W(0) = I_{n\times n}$ (la matriz identidad). Pruebe que:

- $W(t+T) = W(t)W(T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $W(-t) = W(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $W(T)^2 = I_{n\times n}$.
- Todas las soluciones $\vec{x}(t)$ del sistema son periódicas de período $2T$.

El procedimiento es igual al TEU que vimos en el C1.

Tomamos $\varphi(t) = W(t+T) - W(t)W(T) \quad /()'$

$\Rightarrow \varphi'(t) = W'(t+T) - W'(t)\cdot W(T)$

Usamos que $W(t)$ es matriz fundamental.

$\Leftrightarrow \varphi'(t) = A(t+T)W(t+T) - A(t)W(t)W(T)$

Propiedad de $A(t)$

$\Leftrightarrow \varphi'(t) = A(t)W(t+T) - A(t)W(t)W(T)$

$\Leftrightarrow \varphi'(t) = A(t)[W(t+T) - W(t)W(T)]$

$\Leftrightarrow \varphi'(t) = A(t)\varphi(t)$

Con $\varphi(0) = W(T) - \mathbb{I}\,W(T) = 0$

$\therefore$ Se tiene $\varphi'(t) = A(t)\cdot\varphi(t)$

$\varphi(0) = 0$

Por TEU $\varphi(t) \equiv 0 \Leftrightarrow W(t+T) = W(t)\cdot W(T)$

Repetimos el procedimiento anterior

$$\varphi(t) = W(-t) - W(t) \quad / ()'$$
$$\varphi'(t) = -W'(-t) - W'(t)$$
$$= -A(-t)W(-t) - A(t)\cdot W(t) \quad / A(-t) = -A(t)$$
$$= A(t)[W(-t) - W(t)]$$
$$= A(t)\,\varphi(t)$$
$$\varphi(0) = W(0) - W(0) = 0$$

nos queda el P.C $\quad \begin{cases} \varphi'(t) = A(t)\cdot\varphi(t) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Por TEU se tiene

$$\varphi(t) \equiv 0 \iff W(-t) = W(t) \;//$$

- Si combinamos ambas partes nos queda

$$W(-T+T) = W(-T)\cdot W(T)$$
$$\iff W(0) = W(T)^2$$
$$\iff I = W(T)^2 \;//$$

- Las soluciones de un sistema tienen la forma

$$\vec{x}(t) = W(t)\cdot\vec{c}\,,$$ con $\vec{c}$ un vector de constantes.

Entonces decir que $\vec{x}(t)$ es $2T$-periódico
es equivalente a que $W(t)$ sea $2T$-periódica

Para eso tomaremos que $t = \tilde{t} + T$
entonces si usamos la primera propiedad
nos queda

$$W(\tilde{t}+T+T) = W(\tilde{t}+T)\, W(T)$$
$$W(\tilde{t}+2T) = W(\tilde{t}) \cdot W(T) \cdot W(T)$$
$$W(\tilde{t}+2T) = W(\tilde{t}) \cdot W(T)^2 \rightarrow II$$
$$\Rightarrow W(\tilde{t}+2T) = W(\tilde{t})_{//}$$

**P3.** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales usando transformada de Laplace:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con las condiciones iniciales:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

Desarrollando las matrices queda

$$x'(t) = -3x(t) + 10y(t) \quad / \mathcal{L}\{\}$$
$$y'(t) = -3y(t) + 8y(t) \quad / \mathcal{L}\{\}$$

$$sX(s) - x(0) = -3X(s) + 10Y(s)$$
$$sY(s) - y(0) = -3X(s) + 8Y(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad sX(s) - 1 = -3X(s) + 10Y(s) \quad (1)$$
$$sY(s) - 1 = -3X(s) + 8Y(s) \quad (2)$$

Despejamos $Y(s)$ en (2) y reemplazamos en (1)

$$\Leftrightarrow \quad Y(s)[s-8] = -3X(s) + 1$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{-3X(s) + 1}{s-8}$$

Reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow \quad sX(s) - 1 = -3X(s) + 10\left[\frac{-3X(s)+1}{s-8}\right] \Big/ \cdot (s-8)$$

$$[s^2 - 8s]X(s) - s + 8 = [-3s + 24]X(s) - 30X(s) + 10$$

$$\Leftrightarrow \quad [s^2 - 5s + 6]X(s) = s + 2$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \frac{s+2}{(s-3)(s-2)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-2} = \frac{s+2}{(s-3)(s-2)}$$

$$\Rightarrow \quad As - 2A + Bs - 3B = s + 2$$

$$\begin{cases} A + B = 1 & (1) \\ -2A - 3B = 2 & (2) \end{cases} \qquad (2) + 2(1) \Rightarrow B = -4$$
$$\Rightarrow A = 5$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \frac{5}{s-3} - \frac{4}{s-2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = 5e^{3t} - 4e^{2t}$$

$$\wedge \quad Y(s) = \frac{-3(s+2)}{(s-3)(s-2)(s-8)} + \frac{(s-3)(s-2)}{(s-3)(s-2)(s-8)}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 - 5s + 6 - 3s - 6}{(s-3)(s-2)(s-8)} = \frac{\cancel{(s-8)}\, s}{(s-3)(s-2)\cancel{(s-8)}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{s}{(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-2} \quad \Rightarrow \quad As - 2A + Bs - 3B = s$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A - 3B = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad A = 3 \wedge B = -2$

$\Rightarrow \quad Y(s) = \dfrac{3}{s-3} - \dfrac{2}{s-2} \Rightarrow y(t) = 3e^{3t} - 2e^{2t}$