Auxiliar C3: Transformada de Laplace y sistemas de ecuaciones

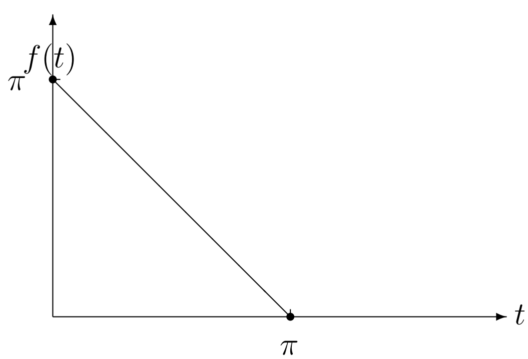
El C3 es clave

Profesor: Francisco Ortega Culaciati
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. (C3 Otoño 2022) Sea $z(t)$, para $t \geq 0$, la posición de un oscilador armónico que se encuentra en reposo para $t = 0$, y satisface la ecuación

$$z'' + 2z' + 2z = f(t),$$

donde $f(t)$ es un forzamiento no nulo sólo para $t \in [0, \pi[$. Este forzamiento comienza valiendo π en $t = 0$, para luego decaer linealmente hasta cero en $t = \pi$, como se muestra en la figura.



(a) Exprese $f(t)$ usando funciones de Heaviside.

(b) Encuentre la transformada de Laplace $\mathcal{L}[z(t)](s)$ de la solución de la ecuación del oscilador.

(c) Encuentre la solución $z(t)$, para $t \geq 0$, muestre que es continua y que para $t > \pi$

$$z(t) = -\left(1 + \pi + \frac{e^{\pi}}{2}\right) e^{-t}\cos(t) - \frac{\pi}{2} e^{-t}\sin(t).$$

P2. (C3 2016 Salomé) Considere el siguiente sistema mecánico compuesto por dos partículas de masa m_1, m_2 y dos resortes de constantes k_1, k_2. Si $x(t)$, $y(t)$ representan las posiciones con respecto a las posiciones de equilibrio, entonces las siguientes ecuaciones describen el movimiento de ambas partículas:

$$\begin{aligned} m_1 x'' &= -k_1 x(t) + k_2(y - x) \\ m_2 y'' &= -k_2(y - x) \end{aligned} \tag{1}$$

1. Demuestre que todas las soluciones del sistema (1) son acotadas.
2. Suponga que $m_1 = 2m_2$, $k_1 = 2k_2$. Determine todas las soluciones del sistema.

P3. (C3 Otoño 2024) Considere la siguiente ecuación que modela un sistema masa resorte con un amortiguador, al que después de $\frac{\pi}{2}$segundos es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa. El sistema queda descrito mediante el problema de valor inicial:

$$x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = c\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \quad t > 0,$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$$

1. Determine la solución en términos del parámetro c.
2. ¿Qué valor debe tener c para que la masa quede detenida para $t > \frac{\pi}{2}$?

Recomendación! Hagan la P1.b) del C3 de Otoño 2024. Es de modelamiento usando Laplace :D

Definición (Convolución de funciones). Sean $f, g \in C^\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define la convolución de f y g como la función

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds.$$

La transformada de Laplace de una convolución se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s)$$

Tabla 1: Transformadas de Laplace comunes

Función	Transformada de Laplace
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

Definición Exponencial de una Matriz: Sea $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Se define la exponencial de M como

$$e^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + \cdots$$

Teorema Sistema lineal con A diagonalizable: Considere el sistema lineal $X' = AX + B(t)$, donde A es una matriz constante y diagonalizable, con descomposición $A = PDP^{-1}$, valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y los vectores propios $v_1, \dots, v_n$ respectivos. Entonces:

i) Una matriz fundamental de $X' = AX$ está dada por

$$M(t) = Pe^{Dt} = (e^{\lambda_1 t}v_1 \mid \cdots \mid e^{\lambda_n t}v_n)$$

y luego la matriz fundamental canónica es $\Phi(t) = M(t)M(0)^{-1} = Pe^{Dt}P^{-1}$.

ii) La solución homogénea asociada al sistema homogéneo $X' = AX$ admite las siguientes escrituras, donde $C = (C_1, \dots, C_n)$ es un vector de constantes arbitrarias reales o complejas.

$$X_h(t) = Pe^{Dt}C = C_1e^{\lambda_1 t}v_1 + \cdots + C_ne^{\lambda_n t}v_n$$