Auxiliar 9: Sistemas de ecuaciones

Profesor: Francisco Ortega Culaciati
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. (C3 Otoño 2022) Resuelva el siguiente sistema de EDO usando el método de la matriz exponencial:

$$x_1' = 4x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = 1$$
$$x_2' = 3x_1 - x_2, \quad x_2(0) = -3$$

y verifique que la solución tiende a cero cuando $t \to \infty$

P2. (C3 Otoño 2023) Considere el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = A(t)\vec{x}(t)$$

donde $A : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es una función a valores matriciales, continua, no trivial, y de período $T > 0$, es decir $A(t+T) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponga además que $A(\cdot)$ es una función impar, es decir para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $A(-t) = -A(t)$. Sea $W(t)$ la matriz fundamental de este sistema que satisface $W(0) = I_{n\times n}$ (la matriz identidad). Pruebe que:

- $W(t+T) = W(t)W(T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $W(-t) = W(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $W(T)^2 = I_{n\times n}$.
- Todas las soluciones $\vec{x}(t)$ del sistema son periódicas de período $2T$.

P3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales usando transformada de Laplace:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con las condiciones iniciales:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

Definición (Convolución de funciones). Sean $f, g \in C^\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define la convolución de f y g como la función

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds.$$

La transformada de Laplace de una convolución se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s)$$

Tabla 1: Transformadas de Laplace comunes

Función	Transformada de Laplace
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

Definición Exponencial de una Matriz: Sea $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Se define la exponencial de M como

$$e^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + \cdots$$

Teorema Sistema lineal con A diagonalizable: Considere el sistema lineal $X' = AX + B(t)$, donde A es una matriz constante y diagonalizable, con descomposición $A = PDP^{-1}$, valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y los vectores propios $v_1, \ldots, v_n$ respectivos. Entonces:

i) Una matriz fundamental de $X' = AX$ está dada por

$$M(t) = Pe^{Dt} = (e^{\lambda_1 t}v_1 \mid \cdots \mid e^{\lambda_n t}v_n)$$

y luego la matriz fundamental canónica es $\Phi(t) = M(t)M(0)^{-1} = Pe^{Dt}P^{-1}$.

ii) La solución homogénea asociada al sistema homogéneo $X' = AX$ admite las siguientes escrituras, donde $C = (C_1, \ldots, C_n)$ es un vector de constantes arbitrarias reales o complejas.

$$X_h(t) = Pe^{Dt}C = C_1e^{\lambda_1 t}v_1 + \cdots + C_ne^{\lambda_n t}v_n$$