P1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la Transformada de Laplace:

$$x''' - x'' + x' - x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -1$$

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

- $x''' - x'' + x' - x = 0 \qquad x(0) = 1$

$/\mathcal{L}\{\} \qquad x'(0) = 2$

$x''(0) = -1$

$$s^3 X(s) - s^2 \cdot x(0) - s \cdot x'(0) - x''(0) - s^2 X(s) + s x(0) + x'(0)$$

$$+ sX(s) - x(0) - X(s) = 0$$

$$X(s)[s^3 - s^2 + s - 1] - s^2 - 2s + 1 + s + 2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X(s)[s^2(s-1) + s - 1] = s^2 + s - 2 \qquad = 0$$

$$X(s)[(s^2+1)(s-1)] = s^2 + 1 + s + 1 \qquad /:(s^2+1)(s-1)$$

$$X(s) = \frac{s^2 - 1}{(s^2+1)(s-1)} + \frac{\cancel{s-1}}{(s^2+1)\cancel{(s-1)}}$$

$$= \frac{(s+1)\cancel{(s-1)}}{(s^2+1)\cancel{(s-1)}} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}$$

$$= \mathcal{L}\{\cos(t)\} + 2\mathcal{L}\{\sin(t)\} \qquad /\mathcal{L}^{-1}\{\}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \cos(t) + 2 \cdot \sin(t)$$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la Transformada de Laplace:

$$x''' - x'' + x' - x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -1$$

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t} \quad / \mathcal{L}\{\}$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - 4[s Y(s) - y(0)] + 4Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$\Leftrightarrow Y(s)[s^2 - 4s + 4] - s - 1 + 4 = \frac{1}{s-2}$$

$$\Leftrightarrow Y(s)(s-2)^2 = s - 3 + \frac{1}{s-2}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{s-3}{(s-2)^2}$$

$$= e^{2t} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + \frac{\cancel{s-2}}{(s-2)^{\cancel{2}}} - \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2!} \cdot t^2 + \mathcal{L}\{e^{2t}\} - e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$= \frac{e^{2t} \cdot t^2}{2} + e^{2t} - e^{2t} \cdot t \,_{//}$$

P2. Resuelva la EDO:

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 1 - H_2(x) - H_4(x) + H_6(x), \quad x \geq 0,$$

con condiciones iniciales:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

¿Es continua la solución?

Como son condiciones iniciales nulas la transformada queda

$$s^2 Y(s) + 4s\, Y(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s} + \frac{e^{-6s}}{s}$$

$$\Leftrightarrow (s+1)(s+3)\, Y(s) = \frac{1}{s}\left[1 - e^{-2s} - e^{-4s} + e^{-6s}\right]$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s(s+1)(s+3)}}_{\text{Fracciones parciales}}\left[1 - e^{-2s} - e^{-4s} + e^{-6s}\right]$$

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}$$

$$\Rightarrow A(s^2+4s+3) + B(s^2+3s) + C(s^2+s) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 & (1) \\ 4A + 3B + C = 0 & (2) \\ 3A = 1 & (3) \end{cases} \Rightarrow A = 1/3$$

$$(2) - (1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1}{3} + 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C = 1/6$$

$$Y(s) = \left[\frac{1}{3s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{6(s+3)}\right]\{1 - \underbrace{e^{-2s} - e^{-4s} + e^{-6s}}_{\text{Desplazamiento temporal.}}\}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{3}\left[1 - H_2(t) - H_4(t) + H_6(t)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[e^{-t} - e^{-(t-2)} \cdot H_2(t) - e^{-(t-4)} H_4(t) + e^{-(t-6)} H_6(t)\right]$$

$$+ \frac{1}{6}\left[e^{-3t} - e^{-3(t-2)} \cdot H_2(t) - e^{-3(t-4)} H_4(t) + e^{-3(t-6)} H_6(t)\right]$$

//

P3. Considere la función $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 6, \\ 3, & x \geq 6. \end{cases}$$

- Calcular $\mathcal{L}[f(x)](s)$, la transformada de Laplace de $f(x)$.
- Usando la transformada de Laplace, resolver el problema:

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Primero graficamos $f(x)$ para que no esté definida por partes:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{2}\underbrace{\left[H_0(t) - H_6(t)\right]}_{\text{Esto es lo que "enciende" la recta}} + 3 \cdot \underbrace{H_6(t)}_{\text{Este hace lo mismo con la constante.}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + 3 \cdot \frac{e^{-6s}}{s}$$

$$+ \mathcal{L}\left\{ \frac{x}{2} \cdot H_6(t) \right\} \ *$$

$$* \quad \int_0^\infty \frac{t}{2} \cdot H_6(t) \cdot e^{-st}\, dt = \int_6^\infty \frac{t}{2} \cdot e^{-st}\, dt$$

$$\begin{array}{ccc} & D & I \\ + & t & e^{-st} \\ - & 1 & e^{-st}/-s \\ + & 0 & e^{-st}/s^2 \end{array} \qquad = -\frac{1}{2s}\, t \cdot e^{-st}\Big|_6^\infty - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_6^\infty$$

$$= + \frac{3 \cdot e^{-6s}}{s} + \frac{e^{-6s}}{2s^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + 3 \cdot \frac{e^{-6s}}{s} +$$

$$- \frac{3 \cdot e^{-6s}}{s} - \frac{e^{-6s}}{s^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-6s}}{2s^2}$$

$$y'' + y = f(x) \; ; \; y(0) = 0 \, , \; y'(0) = 1$$

$$/ \mathcal{L}\{\}$$

$$s^2 Y(s) - s\, y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-6s}}{2s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s)(s^2+1) - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-6s}}{2s^2}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{s^2(s^2+1)} - \frac{e^{-6s}}{2s^2(s^2+1)}}_{\text{son lo mismo pero desplazado en el tiempo.}} + \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{\mathcal{L}\{\sin(t)\}}$$

son lo mismo pero desplazado en el tiempo.

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad A(s^3+s) + B(s^2+1) + C \cdot s^3 + Ds^2$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow C = 0 \;\wedge\; D = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s^2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{2(s^2+1)}\right\} = -\frac{1}{2}\cdot \sin(t)$$

Desplazo temporal.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-6s}}{2s^2(s^2+1)}\right\} = \left[\frac{1}{2}(t-6) - \frac{1}{2}\cdot \sin(t-6)\right] H_6(t)$$

$$\therefore \quad y(t) = \left[\frac{1}{2}(t-6) - \frac{1}{2}\cdot \sin(t-6)\right] H_6(t)$$

$$+ \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\cdot \sin(t)$$

$$+ \sin(t)$$

P4. Reescriba una EDO de forma general en un sistema de primer orden:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

con $a_2 \neq 0$

Primero debemos normalizar la EDO

$$\Rightarrow \quad y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{f(x)}{a_2}$$

Ahora despejamos y''

$$\Rightarrow \quad y'' = \frac{f(x)}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} y' - \frac{a_0}{a_2} y$$

Luego llamamos nuestras variables

$x_1 = y \;,\; x_2 = y' \Rightarrow x_1' = y' = x_2 \;,\; x_2' = y''$

Entonces buscamos escribir la EDO de la forma

$$X' = AX + B$$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-a_0}{a_2} & \frac{-a_1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ f(x)/a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-a_0}{a_2} & \frac{-a_1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ f(x)/a_2 \end{vmatrix} \quad //$$