Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA-2601 – Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 8: Transformada de Laplace + un poquito de sistemas de ecuaciones

EDO es clave

Profesor: Francisco Ortega Culaciati
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la Transformada de Laplace:

$$x''' - x'' + x' - x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -1$$
$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

P2. Resuelva la EDO:

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 1 - H_2(x) - H_4(x) + H_6(x), \quad x \geq 0,$$

con condiciones iniciales:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

¿Es continua la solución?

P3. Considere la función $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 6, \\ 3, & x \geq 6. \end{cases}$$

- Calcular $\mathcal{L}[f(x)](s)$, la transformada de Laplace de $f(x)$.
- Usando la transformada de Laplace, resolver el problema:

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \, y'(0) = 1.$$

P4. Reescriba una EDO de forma general en un sistema de primer orden:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

con $a_2 \neq 0$

Definición (Convolución de funciones). Sean $f, g \in C^\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define la convolución de f y g como la función

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds.$$

La transformada de Laplace de una convolución se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s)$$

Tabla 1: Transformadas de Laplace comunes

Función	Transformada de Laplace
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$