

P1. Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

- $f(t) = e^{at}$
- $f(t) = \sin(\beta t)$
- $f(t) = t^2$

$$\bullet \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \Big|_0^{\infty}$$

$$= 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a} "$$

$$\bullet \mathcal{L}\{\sin(\beta t)\} = \int_0^{\infty} \sin(\beta t) \cdot e^{-st} dt$$

Usamos integración por partes de forma iterativa

$$\begin{aligned} & \int \sin(\beta t) \cdot e^{-st} \\ &= \sin(\beta t) \cdot \frac{1}{-s} e^{-st} \\ & - \beta \cos(\beta t) \cdot \frac{1}{-s} e^{-st} \\ & + \beta^2 \sin(\beta t) \cdot \frac{1}{s^2} e^{-st} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \sin(\beta t) e^{-st} dt = \left[\frac{-\sin(\beta t) e^{-st}}{s} - \frac{\beta \cos(\beta t) \cdot e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} - \frac{\beta^2}{s^2} \int_0^{\infty} \sin(\beta t) e^{-st} dt$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{\beta^2}{s^2}\right) \int_0^{\infty} \sin(\beta t) e^{-st} dt = \frac{\beta}{s^2} / \underline{s^2}$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + \beta^2) \int_0^{\infty} \sin(\beta t) e^{-st} dt = \beta / (s^2 + \beta^2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(\beta t)\} = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} //$$

$$\bullet \mathcal{L}\{t^2\} = \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt$$

Hacer como la misma cosa

	D	I
+	t^2	e^{-st}
-	$2t$	$e^{-st}/-s$
+	2	e^{-st}/s^2
-	0	$e^{-st}/-s^3$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt = e^{-st} \left[\frac{t^2}{-s} - \frac{2t}{s^2} - \frac{2}{s^3} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{2}{s^3} //$$

P2. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Indicación: Defina $G(t) := \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx$ y calcule su Transformada de Laplace.

usamos la indicación

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \int_0^{\infty} G(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx \right] \cdot e^{-st} dt \quad / \quad e^{-st} \text{ es de respecto a } x$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx) e^{-st}}{1+x^2} dx dt \quad / \quad \text{cambio en el orden de integración}$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx) e^{-st}}{1+x^2} dt \right] dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \left(\int_0^{\infty} \cos(tx) e^{-st} dt \right) dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \mathcal{L}\{\cos(tx)\} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{s}{s^2+x^2} dx \quad / \quad \text{usar fracciones parciales}$$

$$= s \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{s^2-1}}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{s^2-1}}{s^2+x^2} dx$$

$$= \frac{S}{S^2-1} \left[\tan^{-1}(x) \Big|_0^\infty - \frac{\tan^{-1}(x/S)}{S} \Big|_0^\infty \right]$$

$$= \frac{S}{S^2-1} \left[\pi/2 - \pi/2S \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{S-1}{S^2-1} \right] = \frac{\pi}{2} \left[\frac{(S-1)}{(S-1)(S+1)} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{S+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{S+1} \quad / \quad \mathcal{L}^{-1}\{\}$$

$$\Rightarrow G(t) = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-t}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2e} = G(1) = \int_0^\infty \frac{\phi(x)}{1+x^2} dx //$$

P3. Resuelva la ecuación integral

$$y(t) = 3t + \int_0^t y(s) \sin(t-s) ds.$$

aplicando transformada de Laplace.

$$\text{Notemos que } \int_0^t y(s) \cdot \sin(t-s) ds \\ = y(t) * \sin(t)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = 3t + y(t) * \sin(t) \quad / \mathcal{L}\{\}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{3t\} + \mathcal{L}\{y(t) * \sin(t)\} \quad / \text{Prop.} \\ \text{convolución}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = 3 \cdot \frac{1}{s^2} + Y(s) \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) - Y(s) \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{3}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) \left[\frac{s^2+1-1}{s^2+1} \right] = \frac{3}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) \cdot \frac{s^2}{s^2+1} = \frac{3}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = 3 \left[\frac{s^2+1}{s^4} \right]$$

$$\Rightarrow Y(s) = 3 \left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \right] \Leftrightarrow Y(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{3 \cdot 2!}{s^4} \quad / \mathcal{L}^{-1}\{\}$$
$$\Rightarrow y(t) = 3t + t^3/2 //$$

P4. Encontrar f continua y de orden exponencial, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L}[f(x)] = \frac{3s - 2}{s^2 + 4s + 20}$$

Lo primero que debemos hacer es trabajar el denominador

$$s^2 + 4s + 20 = (s + 2)^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow \frac{3s - 2}{(s + 2)^2 + 4^2}$$

$\rightarrow$ Tenemos un desfase de +2
 $\Rightarrow$ busquemos hacerlo aparecer en el numerador

$$3s - 2 = 3(s + 2) - 8$$

$$\Rightarrow \frac{3(s + 2)}{(s + 2)^2 + 4^2} - \frac{8}{(s + 2)^2 + 4^2} \quad \left. \vphantom{\frac{3(s + 2)}{(s + 2)^2 + 4^2} - \frac{8}{(s + 2)^2 + 4^2}} \right\} \text{ tiene forma de } \sin(4x)$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{(s + 2)}{(s + 2)^2 + 4^2} - 2 \cdot \frac{4}{(s + 2)^2 + 4^2} \quad / \mathcal{L}^{-1} \{ \}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot e^{-2x} \cdot \cos(4x) - 2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin(4x),$$