

Auxiliar 7: Transformada de Laplace

EDO es clave

Profesor: Francisco Ortega Culaciati

Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

- $f(t) = e^{at}$
- $f(t) = \sin(\beta t)$
- $f(t) = t^2$

P2. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Indicación: Defina $G(t) := \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx$ y calcule su Transformada de Laplace.

P3. Resuelva la ecuación integral

$$y(t) = 3t + \int_0^t y(s) \sin(t-s) ds.$$

aplicando transformada de Laplace.

P4. Encontrar f continua y de orden exponencial, $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$\mathcal{L}[f(x)] = \frac{3s-2}{s^2+4s+20}$$

Definición (Convolución de funciones). Sean $f, g \in C^\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define la convolución de f y g como la función

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(s)g(t-s) ds = \int_0^t f(t-s)g(s) ds.$$

La transformada de Laplace de una convolución se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s)$$

Tabla 1: Transformadas de Laplace comunes

Función	Transformada de Laplace
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$