Auxiliar 6: Repaso C2

Profesor: Francisco Ortega Culaciati
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Encuentre la forma que tiene la solución general de

$$y^{(iv)} + \beta y^{(iii)} + y^{(ii)} = xe^{\alpha x}$$

para todos los posibles valores reales de los parámetros α y β. Separe el análisis en solución homogénea primero y solución particular después.

Nota: no es necesario que encuentre las constantes de las soluciones particulares.

P2. Considere un cuerpo de masa constante $m > 0$, sujeto a una pared mediante un resorte con constante de restitución $k > 0$. El sistema está inmerso en un fluido viscoso, el cual ejerce una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad del cuerpo, con constante de proporcionalidad $c > 0$. En ausencia de otras fuerzas externas, el movimiento del cuerpo puede modelarse mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0, \quad t > 0,$$

donde $y(t)$ representa la posición del cuerpo respecto a la posición de equilibrio (es decir, $y = 0$ indica que el resorte está ni estirado ni comprimido, mientras que $y > 0$ representa que está estirado).

- Asuma que $c \geq 2\sqrt{mk}$. Suponga que inicialmente el resorte está en reposo y estirado una unidad de longitud, es decir:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

  demuestre que el resorte nunca se comprime y que tiende al estado de equilibrio en tiempo infinito.

- Asuma que $c = 2\sqrt{mk}$ y que el resorte está inicialmente estirado una unidad de longitud, pero que esta vez parte con una velocidad $-\delta$, con $\delta > 0$. Muestre que si $\delta > \frac{c}{2m}$, entonces el cuerpo llega al punto de equilibrio en tiempo finito. Calcule dicho tiempo en términos de δ, m y c. Muestre que a partir de ese momento el resorte permanece comprimido y que tiende al estado de equilibrio cuando $t \to \infty$.

P3. Resuelva la ecuación

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln(x), \quad \text{para } x > 0. \tag{1}$$

Indicación: para encontrar una solución de la ecuación homogénea, proponga $y_1(x) = x^\alpha$ para α una constante que debe determinar.

P4. Para los siguientes problemas de Cauchy, determine condiciones sobre x_0 para que exista una única solución, y en tales casos especifique su regularidad[1] y en qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ quedaría definida:

1.
$$\begin{cases} x^2y'' + 9xy' - 20y = 0 \\ y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b \end{cases} \tag{2}$$

2.
$$\begin{cases} x^2y''' - 5xy'' + 5y' = -15x^4 \\ y(x_0) = c, \quad y'(x_0) = d \end{cases} \tag{3}$$

Corrobore esto encontrando dos soluciones distintas de (1) que satisfagan $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

[1] Regularidad se refiere al grado de derivabilidad de la solución.