P1. Encuentre la única solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(3x), \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{5}, \\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

notamos que las funciones en la EDO son continuas $\forall x \in \mathbb{R}$ => Se cumple el TEU $\forall x \in \mathbb{R}$

Primero encontramos la sol. de la EDO homogénea

$$\Rightarrow \quad y'' + 4y = 0 \quad / \text{Pol. característico}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\therefore \; y_h = A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)$$

Ahora calculamos la sol. particular

$$y'' + 4y = \sin(3x) \quad / \text{ usamos operador diferencial.}$$

$$(D^2 + 4) y = \sin(3x) \quad / \, D^2 + 3^2$$

$$(D^2 + 4)(D^2 + 9) y = 0 \quad / \text{ no hay resonancia}$$

$$\Rightarrow \; y_p = C \cdot \sin(3x) + D \cos(3x)$$

Reemplazamos y_p en la EDO para obtener C y D

$$y_p = C\sin(3x) + D\cdot\cos(3x)$$
$$y_p' = 3C\cos(3x) - 3D\sin(3x)$$
$$y_p'' = -9C\sin(3x) - 9D\cos(3x)$$

$$\Rightarrow -9C\sin(3x) - 9D\cos(3x)$$
$$+ 4\left[C\sin(3x) + D\cdot\cos(3x)\right] = \sin(3x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5C\sin(3x) = \sin(3x) \\ -5D\cos(3x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = -1/5 \wedge D = 0$$

$$\therefore y_p = \frac{-1}{5}\sin(3x)$$

$$\therefore y(x) = A\cdot\cos(2x) + B\cdot\sin(2x) - \frac{1}{5}\sin(3x)$$

Ahora reemplazamos las condiciones iniciales.

$$y(\pi/6) = A\cdot\cos(\pi/3) + B\cdot\sin(\pi/3) - \frac{1}{5}\sin(\pi/2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} \quad /\cdot 2$$

$$y'(\pi/6) = -2A\sin(\pi/3) + 2B\cos(\pi/3) - \frac{3}{5}\cos(\pi/2)$$
$$4\sqrt{3} = -\sqrt{3}A + B$$

$$\begin{cases} A + \sqrt{3}\,B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\sqrt{3}\,B \\ -\sqrt{3}\,A + B = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 3B + B = 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow B = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A = -3$$

$$\therefore\ y = -3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) - \frac{1}{5}\sin(3x) \,//$$

P2. Cuando bajo la capa m as superficial de la corteza terrestre se produce una intrusi on magm atica, esta se levanta, produciendo un fenómeno llamado *lacolito* debido a la presión que genera el material que se introduce.

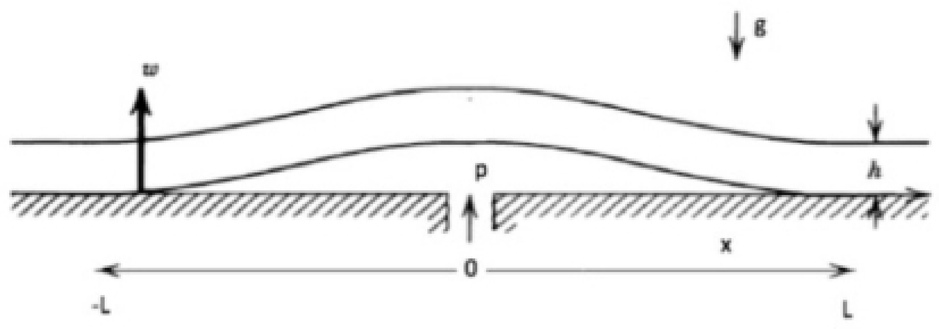

Figura 1: Lacolito

La forma del *lacolito* $\omega(x)$ se puede modelar como:

$$R\omega^{(4)} = p - \rho g h$$

$$\omega(-L) = \omega(L) = \omega'(-L) = \omega'(L) = 0$$

Donde R es es la rigidez flexural de la capa de la corteza, ρ su densidad, g la aceleración de gravedad, h el espesor de la capa de la corteza y p la presión ejercida por la intrusión magmática. R, ρ, g, pyh se consideran constantes positivas y que la presión es suficientemente grande para que $p > \rho g h$.

- Encuentre la solución general de la EDO.
- Usando las condiciones de borde encuentre la forma exacta del *lacolito* $\omega(x)$.
- Muestre que el alzamiento máximo ocurre en $x = 0$ y determine su valor. Justifique que es un máximo.

- Recordamos que $\omega(x) = \omega_h + \omega_p$

ω_h: $R\omega^{(4)} = 0$ / Integramos 4 veces

$\Rightarrow \omega_h = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$

ω_p: $R\omega^{(4)} = p - \rho g h$ / : R y usamos op. diferencial

$\Rightarrow D^4[\omega] = \dfrac{p - \rho g h}{R}$ / D

$\Rightarrow D^5[\omega] = 0$

$$\Rightarrow \omega = \underbrace{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}_{\text{ya es la sol. homogénea}} + \underbrace{E \cdot x^4}_{\text{sol. particular}}$$

Reemplazamos en la EDO para calcular E

$$\Rightarrow \quad R \cdot 4! \cdot E = P - \rho \cdot g h$$
$$\Rightarrow \quad E = \frac{P - \rho g h}{4! \cdot R}$$

$$\therefore \quad w(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \left[\frac{P - \rho g h}{4! \cdot R}\right] x^4 \;//$$

- Reemplazamos en la solución

$$w(L) = A + BL + CL^2 + DL^3 + EL^4 = 0 \quad (1)$$
$$w(-L) = A - BL + CL^2 - DL^3 + EL^4 = 0 \quad (2)$$
$$w'(L) = B + 2CL + 3DL^2 + 4EL^3 = 0 \quad (3)$$
$$w'(-L) = B - 2CL + 3DL^2 - 4EL^3 = 0 \quad (4)$$

$$(1) - (2) = 2BL + 2DL^3 = 0$$
$$(3) + (4) = 2B + 6DL^2 = 0 \; / \cdot L$$

$$\begin{cases} 2BL + 2DL^3 = 0 \\ 2BL + 6DL^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D = 0 \;\wedge\; B = 0$$

Ahora tomamos $(1) + (2) \;\wedge\; (3) - (4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A + 2CL^2 + 2EL^4 = 0 \\ \quad 4CL + 8EL^3 = 0 \; / : 2/L \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 2A + 2CL^2 + 2EL^4 = 0 \\ 2CL^2 + 4EL^4 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad A = EL^4 \;\wedge\; C = -2EL^3$$

$\therefore \omega(x) = EL^4 - 2EL^2x^2 + Ex^4$ //

- P.D.Q el máx está en $x=0$

necesitamos buscar $\omega'(x)=0 \wedge \omega''(x)<0$

$$\Rightarrow \omega'(x) = -4EL^2x + 4Ex^3 = 4Ex(x^2-L^2)$$
$$\omega''(x) = -4EL^2 + 12Ex^2 = 4E(3x^2-L^2)$$

$\omega'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm L$

$\omega''(\pm L) = 4E\cdot 2L^2 > 0$

$\omega''(0) = -4EL^2 < 0$

$\therefore$ El máximo ocurre en $x=0$ //

P3. Sea $L > 0$ y sean y_1 e y_2 dos soluciones linealmente independientes de

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad \text{para } x \in (0, L),$$

tales que

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(L) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(L) = 1,$$

con a_1 y a_0 funciones continuas en $[0, L]$.

Pruebe que el valor medio del coeficiente a_1 está dado por:

$$\frac{1}{L}\int_0^L a_1(x)\,dx = \ln\left(\left(\frac{y_2'(0)}{y_1'(L)}\right)^{1/L}\right).$$

Indicación: puede usar propiedades del Wronskiano.

Usamos la fórmula de abel:

$$W'(x) = -a_1(x) \cdot W(x) \quad / : W(x) \neq 0 \text{ porque } y_1 \text{ y } y_2 \text{ son l.i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{W'(x)}{W(x)} = -a_1(x) \quad / \int_0^L$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^L \frac{W'(x)}{W(x)} = \int_0^L -a_1(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad -\ln\left|\frac{W(L)}{W(0)}\right| = \int_0^L a_1(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{W(0)}{W(L)}\right| = \int_0^L a_1(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{\cancelto{1}{y_1(0)}\, y_2'(0) - y_1'(0)\,\cancelto{0}{y_2(0)}}{\cancelto{0}{y_1(L)}\, y_2'(L) - y_1'(L)\,\cancelto{1}{y_2(L)}}\right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y_2'(0)}{y_1'(L)}\right| = \int_0^L a_1(x)\,dx \quad / \cdot \frac{1}{L}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln \left| \left(\frac{y_2'(0)}{y_1'(L)} \right)^{1/L} \right| = \frac{1}{L} \int_0^L a_1(x)\,dx$$

//