Auxiliar 5: Más derivadas de orden superior

Profesor: Francisco Ortega Culaciati
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Encuentre la única solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(3x), \\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{5}, \\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

P2. Cuando bajo la capa m as superficial de la corteza terrestre se produce una intrusi on magm atica, esta se levanta, produciendo un fenómeno llamado *lacolito* debido a la presión que genera el material que se introduce.

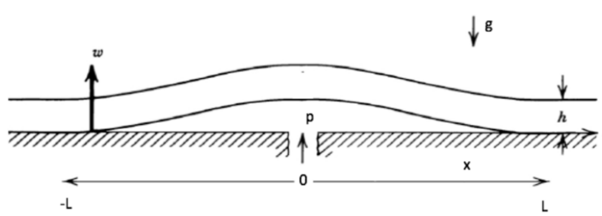

Figura 1: Lacolito

La forma del *lacolito* $\omega(x)$ se puede modelar como:

$$R\omega^{(4)} = p - \rho g h$$

$$\omega(-L) = \omega(L) = \omega'(-L) = \omega'(L)$$

Donde R es es la rigidez flexural de la capa de la corteza, ρ su densidad, g la aceleración de gravedad, h el espesor de la capa de la corteza y p la presión ejercida por la intrusión magmática. R, ρ, g, pyh se consideran constantes positivas y que la presión es suficientemente grande para que $p > \rho g h$.

- Encuentre la solución general de la EDO.
- Usando las condiciones de borde encuentre la forma exacta del *lacolito* $\omega(x)$.
- Muestre que el alzamiento máximo ocurre en $x = 0$ y determine su valor. Justifique que es un máximo.

P3. Sea $L > 0$ y sean y_1 e y_2 dos soluciones linealmente independientes de

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad \text{para } x \in (0, L),$$

tales que

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(L) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(L) = 1,$$

con a_1 y a_0 funciones continuas en $[0, L]$.

Pruebe que el valor medio del coeficiente a_1 está dado por:

$$\frac{1}{L}\int_0^L a_1(x)\,dx = \ln\left(\left(\frac{y_2'(0)}{y_1'(L)}\right)^{1/L}\right).$$

Indicación: puede usar propiedades del Wronskiano.

P4 (Propuesto). Considere el siguiente problema de segundo orden con condiciones de borde:

Encontrar $y \not\equiv 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

(a) Encuentre la solución general de la ecuación anterior (sin condiciones de borde) en los casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$.

(b) Si $\lambda \leq 0$, demuestre que las condiciones de borde sólo pueden satisfacerse para una solución nula.

(c) Si $\lambda > 0$, demuestre que las condiciones de borde sí pueden satisfacerse para alguna solución no nula, siempre que λ tome los valores de una sucesión $\lambda_k \to +\infty$ que debe determinar. Escriba las soluciones correspondientes a estos casos.

(d) Más generalmente, multiplicando la ecuación por $y(x)$ e integrando por partes entre $x = 0$ y $x = \pi$, demuestre que λ es necesariamente positivo si

$$y \not\equiv \text{cte} \quad \text{y} \quad y(0)y'(0) - y(\pi)y'(\pi) \geq 0.$$