P1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $y'' - 4y' + 4y = 0$
- $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$
- $y''' + 4y'' + 3y' + 12y = cos(2x)$

- $y'' - 4y' + 4y = 0$ / Pol. característico

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2,\ m = 2$

$\Rightarrow y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-2x}$

- $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$ / Lo escribimos con el operador diferencial

$\Leftrightarrow (D^2 + 3D + 2)y = 4x^2$

$\Leftrightarrow (D+2)(D+1)\,y = 4x^2 \quad / D^3$

$\Leftrightarrow D^3 (D+2)(D+1)\,y = 0$

$\Rightarrow D = -1,\ m = 1;\ D = -2,\ m = 1;\ D = 0,\ m = 3$

$\Rightarrow y = K_1 \cdot e^{-x} + K_2 \cdot e^{-2x} + A + Bx + Cx^2$

Calculamos los valores de A, B y C

$y_p = A + Bx + Cx^2$

$\Rightarrow y_p' = B + 2Cx$

$\Rightarrow y_p'' = 2C$

P1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $y'' - 4y' + 4y = 0$
- $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$
- $y''' + 4y'' + 3y' + 12y = cos(2x)$

$\Rightarrow \quad 2C + 3[B + 2Cx] + 2[A + Bx + Cx^2] = 4x^2$

$\Leftrightarrow \quad 2Cx^2 + [6C + 2B]x + 2C + 2A = 4x^2$

$\Rightarrow \quad 2C = 4$

$6C + 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -6$

$2C + 3B + 2A \quad \Rightarrow \quad A = 7$

$\therefore \quad y = k_1 \cdot e^{-x} + k_2 \cdot e^{-2x} + 2x^2 - 6x + 7$ //

- $y''' + 4y'' + 3y' + 12y = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow \quad (D^3 + 4D^2 + 3D + 12)y = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow \quad [D^2(D+4) + 3(D+4)]y = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow \quad [D^2 + 3][D+4]y = \cos(2x) \quad / (D^2 + 4)$

$\Leftrightarrow \quad [D^2 + 3][D+4][D^2 + 4]y = 0$

$\Rightarrow \quad D = \pm\sqrt{3}\,i, \; m = 1; \; D = -4, \; m = 1; \; D = \pm 2i, \; m = 1$

$\Rightarrow \quad y = k_1 \cdot \sin(\sqrt{3}x) + k_2 \cos(\sqrt{3}x) + k_3 \cdot e^{-4x}$

$+ A \cdot \sin(2x) + B\cos(2x)$

Si $y_p = A \cdot \sin(2x) + B\cos(2x)$

$\Rightarrow y_p' = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$

$\Rightarrow y_p'' = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$

$\Rightarrow y_p''' = -8A\cos(2x) + 8B\sin(2x)$

$$\Rightarrow -8A\cos(2x) + 8B\sin(2x) + 4[-4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)]$$

$$+ 3[2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)]$$
$$+ 12A\sin(2x) + 12B\cos(2x) = \cos(2x)$$

$\Rightarrow [-8A - 16B + 6A + 12B]\cos(2x) = \cos(2x)$

$[8B - 16A - 6B + 12A]\sin(2x) = 0$

$\Rightarrow -2A - 4B = 1$

$2B - 4A = 0 \quad \Rightarrow B = 2A$

$\Rightarrow -10A = 1 \quad \Rightarrow A = -1/10 \ , \ B = -1/5$

$$\therefore y = k_1 \cdot \sin(\sqrt{3}x) + k_2\cos(\sqrt{3}x) + k_3 \cdot e^{-4x}$$
$$- \frac{1}{10}\sin(2x) - \frac{1}{5}\cos(2x) \,//$$

P2. Para $x > 0$, verifique que $y_1 = x$ e $y_2 = x\ln(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea, demuestre que son linealmente independiente y resuelva:

$$x^2y'' - xy' + y = \frac{ln(x)}{x}, \quad para \quad x > 0.$$

- Probemos que $y_1 \wedge y_2$ son sol.

$y_1 = x \;,\; \Rightarrow y_1' = 1 \;,\; \Rightarrow y_1'' = 0$

Reemplazando queda

$$x^2 \cdot 0 - x \cdot 1 + x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = 0 \;//$$

$\therefore$ y_1 es solución.

$y_2 = x\ln(x) \;,\; \Rightarrow y_2' = \ln(x) + 1 \;,\; \Rightarrow y_2'' = 1/x$

Reemplazando queda

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} - x[\ln(x) + 1] + x\ln(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x - x\ln(x) - x + x\ln(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

$\therefore$ y_2 es solución.

Para resolver la EDO usamos var. de parámetros.

$$x^2 y'' - x y' + y = \frac{\ln(x)}{x} \quad / : x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^3}$$

Importante! Var. de parámetros necesita que la EDO esté normalizada.

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{Q(x)y_2(x)}{W(x)}\,dx + y_2(x)\int \frac{Q(x)y_1(x)}{W(x)}\,dx$$

Sabemos que $y_1 = x$, $y_2 = x\ln(x)$

$\wedge$ $Q(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^3}$, Falta calcular $W(x)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x\ln(x) \\ 1 & \ln(x)+1 \end{vmatrix} = x[\ln(x)+1] - x\ln(x)$$

$$= x \neq 0$$

$\therefore$ y_1, y_2 son l.i

$$\Rightarrow y_p = -x \int \frac{\ln(x)}{x^3} \cdot \frac{\cancel{x} \cdot \ln(x)}{\cancel{x}}\, dx \Bigg\} *$$

$$+ x \ln(x) \int \frac{\ln(x)}{x^3} \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\, dx \Bigg\} *$$

$$* \int \frac{\ln^2(x)}{x^3}\, dx$$

C.V $\ln(x) = u$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{x} = du$

$$\Rightarrow \int \frac{u^2}{x^2}\, du$$

¿Qué hacemos?

Si $\ln(x) = u \Leftrightarrow x = e^u$

$\Rightarrow x^2 = e^{2u}$

$$\Leftrightarrow \int \frac{u^2}{e^{2u}}\, du$$

Usamos I.P.P de forma iterada

	D	I
$+$	u^2	e^{-2u}
$-$	$2u$	$e^{-2u}/-2$
$+$	2	$e^{-2u}/4$
$-$	0	$e^{-2u}/-8$

$$\Rightarrow \int \frac{u^2}{e^{2u}}\, du = -\frac{1}{2} u^2 e^{-2u} - \frac{1}{2} u e^{-2u} - \frac{1}{4} e^{-2u}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\ln^2(x)}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln^2(x)}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right]$$

* $\int \frac{\ln(x)}{x^3}\, dx$ mismo procedimiento

C.V: $u = \ln(x)$

$\Rightarrow du = \frac{dx}{dx}$

$\Rightarrow \int \frac{u}{e^{2u}}\, du =$

	D	I
$+$	u	e^{-2u}
$-$	1	$e^{-2u}/-2$
$+$	0	$e^{-2u}/4$

$$\Leftrightarrow \int \frac{u}{e^{2u}}\, du = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right]$$

$$\therefore y_p = -x \cdot -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln^2(x)}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right] //$$

$$+ x \ln(x) \cdot -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right] //$$

P3. Considere las ecuaciones diferenciales en todo $\mathbb{R}$:

$$y'' + p_1(x)y = 0 \tag{1}$$
$$y'' + p_2(x)y = 0 \tag{2}$$

donde p_1 y p_2 son funciones continuas en $\mathbb{R}$ que satisfacen $0 < p_1(x) < p_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. El problema consiste en demostrar lo siguiente: **Entre dos ceros sucesivos de una solución de (1), cualquier solución de (2) debe anularse**. Para ello, se proponen los siguientes pasos:

a) Suponga que z_1 es una solución de (1), que es positiva en el intervalo (a, b) y que satisface $z_1(a) = 0$ y $z_1(b) = 0$. ¿Qué se puede decir de $z_1'(a)$ y $z_1'(b)$?

b) Suponga que z_2 es una solución de (2) y que es positiva en el intervalo (a, b). Si consideramos $W(x) = W(z_1, z_2)(x)$ el Wronskiano de las funciones z_1 y z_2, demuestre que $W(a) \leq 0$ y $W(b) \geq 0$.

- Estudiemos las derivadas con límites laterales para trabajar en el dominio que nos dan.

$$z'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{z(a+h) - z(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{z(a+h)}{h} \begin{array}{l} \to \text{Es positivo} \\ \to \text{Es positivo} \end{array}$$

$$\Rightarrow z'(a) > 0$$

Lo mismo con $z'(b)$

$$z'(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{z(b+h) - z(b)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{z(b+h)}{h} \begin{array}{l} \to \text{Es positivo} \\ \to \text{Es negativo} \end{array}$$

$$\Rightarrow z'(b) < 0$$

Calculamos $W(Z_1, Z_2)$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} Z_1(x) & Z_2(x) \\ Z_1'(x) & Z_2'(x) \end{vmatrix} = Z_1(x) Z_2'(x) - Z_2(x) Z_1'(x)$$

Evaluamos en $x = 0$

$$W(a) = \cancelto{0}{Z_1(a) \cdot Z_2'(a)} - \overset{>0}{Z_2(a)}\, \overset{>0}{Z_1'(a)}$$

$$\Rightarrow \quad W(a) < 0$$

$$W(b) = \cancelto{0}{Z_1(b) Z_2'(b)} - \overset{>0}{Z_2(b)}\, \overset{<0}{Z_1'(b)}$$

$$\Rightarrow \quad W(b) > 0 \quad //$$

c) Demuestre que $W(x)$ es estrictamente decreciente en (a, b).

d) De b) y c), concluya que z_2 no puede ser positiva en (a, b).

e) ¿Podrá ser z_2 negativa en (a, b)? Concluya que se anula en (a, b).

f) Si z_1 fuese negativa en (a, b), ¿qué podemos decir?

g) Concluya la demostración.

- Que $W(x)$ sea decreciente $\Leftrightarrow W'(x) < 0$

$$\Rightarrow W'(x) = [z_1(x) z_2'(x)]' - [z_1'(x) z_2(x)]'$$

$$= \cancel{z_1'(x) z_2'(x)} + z_1(x) z_2''(x) - z_1''(x) z_2(x) \cancel{- z_1'(x) z_2'(x)}$$

Sabemos que z_1 y z_2 son sol. de las EDO

$$\Rightarrow z_1''(x) = -P_1(x) z_1(x) \wedge z_2''(x) = -P_2(x) z_2(x)$$

$$\Leftrightarrow W'(x) = -z_1(x) z_2(x) P_2(x) + z_1(x) z_2(x) P_1(x)$$

$$= \underset{>0}{z_1(x)}\, \underset{>0}{z_2(x)} \underset{P_1(x) < P_2(x)}{[P_1(x) - P_2(x)]}$$

$\Rightarrow W'(x) < 0$ //

- De b) se tiene que $W(b) > 0 > W(a)$

pero c) dice que $W'(x) < 0 \Rightarrow W(b) < W(a)$

$\Rightarrow z_2$ no puede ser positivo en (a, b)

c) Demuestre que $W(x)$ es estrictamente decreciente en (a, b).

d) De b) y c), concluya que z_2 no puede ser positiva en (a, b).

e) ¿Podrá ser z_2 negativa en (a, b)? Concluya que se anula en (a, b).

f) Si z_1 fuese negativa en (a, b), ¿qué podemos decir?

g) Concluya la demostración.

- En el caso de ser negativo tendríamos

$$W(a) = -\underbrace{z_1'(a)}_{<0} \cdot \underbrace{z_2(a)}_{<0} \Rightarrow W(a) > 0$$

$$W(b) = -\underbrace{z_1'(b)}_{>0} \underbrace{z_2(b)}_{<0} \Rightarrow W(b) < 0$$

y tendríamos que $W'(x) = \underbrace{z_1(x)}_{>0} \underbrace{z_2(x)}_{<0} \underbrace{[P_1(x) - P_2(x)]}_{<0}$

$\Rightarrow W'(x) > 0$

Pero si $W'(x) > 0 \Rightarrow W(b) > W(a)$

Lo cual sería otra contradicción

$\Rightarrow z_2$ no puede ser negativa.

$\therefore \quad z_2 = 0 \quad \forall x \in (a, b)$