Auxiliar 4: Derivadas de orden superior

Profesor: Francisco Ortega Culaciati
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $y'' - 4y' + 4y = 0$
- $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$
- $y''' + 4y'' + 3y' + 12y = cos(2x)$

P2. Para $x > 0$, verifique que $y_1 = x$ e $y_2 = x\ln(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea, demuestre que son linealmente independiente y resuelva:

$$x^2y'' - xy' + y = \frac{ln(x)}{x}, \quad para \quad x > 0.$$

P3. Considere las ecuaciones diferenciales en todo $\mathbb{R}$:

$$y'' + p_1(x)y = 0 \tag{1}$$
$$y'' + p_2(x)y = 0 \tag{2}$$

donde p_1 y p_2 son funciones continuas en $\mathbb{R}$ que satisfacen $0 < p_1(x) < p_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. El problema consiste en demostrar lo siguiente: **Entre dos ceros sucesivos de una solución de (1), cualquier solución de (2) debe anularse**. Para ello, se proponen los siguientes pasos:

a) Suponga que z_1 es una solución de (1), que es positiva en el intervalo (a, b) y que satisface $z_1(a) = 0$ y $z_1(b) = 0$. ¿Qué se puede decir de $z_1'(a)$ y $z_1'(b)$?

b) Suponga que z_2 es una solución de (2) y que es positiva en el intervalo (a, b). Si consideramos $W(x) = W(z_1, z_2)(x)$ el Wronskiano de las funciones z_1 y z_2, demuestre que $W(a) \leq 0$ y $W(b) \geq 0$.

c) Demuestre que $W(x)$ es estrictamente decreciente en (a, b).

d) De b) y c), concluya que z_2 no puede ser positiva en (a, b).

e) ¿Podrá ser z_2 negativa en (a, b)? Concluya que se anula en (a, b).

f) Si z_1 fuese negativa en (a, b), ¿qué podemos decir?

g) Concluya la demostración.

Resumen

Wronskiano: Para una EDO lineal de orden 2 con soluciones linealmente independientes $y_1, y_2 \in C^2(I)$ se define su Wronskiano como

$$W(x; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

Variación de parámetros Para una EDO lineal de orden 2 no homogénea, se tiene una solución particular de la forma

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{Q(x)y_2(x)}{W(x)}\,dx + y_2(x) \int \frac{Q(x)y_1(x)}{W(x)}\,dx$$

Donde $y_1, y_2 \in C^2(I)$ son soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea y $W(x) = W(x; y_1, y_2)$.

Coeficientes Indeterminados: Corresponde a un método de resolución de EDOs lineales a coeficientes constantes no homogéneas, vale de decir, que se puede escribir de la siguiente forma:

$$P(D)y = (D - \lambda_1)^{m_1} \cdots (D - \lambda_l)^{m_l} = q_{k_0} e^{\lambda_0 x}$$

donde dependiendo si λ_0 es real o complejo se tendrán combinaciones lineales de senos, cosenos, polinomios y/o exponenciales. Es necesario identificar el caso correspondiente para usar el anulador pertinente.

Tipo de función	Función (o combinación lineal) anuladora
$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$	D^n
$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{n-1}e^{\lambda x}$	$(D - \lambda)^n$
$e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$((D - \alpha)^2 + \beta^2)^n$
$e^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$((D - \alpha)^2 + \beta^2)^n$