P1. Considere el siguiente problema de Cauchy para $y_0 \in \mathbb{R}$:

$$y' = \frac{t}{1+t^2}\arctan(y)\cos(y), \quad t \in \mathbb{R},$$

con la condición inicial

$$y(0) = y_0.$$

a) Encuentre todas las soluciones constantes de la ecuación diferencial.

• Consideramos $y(t) = C \Rightarrow y'(t) = 0$

Reemplazando queda

$$0 = \frac{t}{1+t^2} \tan^{-1}(C) \cdot \cos(C)$$

$$\Rightarrow \quad C = 0 \;\vee\; C = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi \;,\; n \in \mathbb{Z} \;//$$

b) Pruebe que, para cada $y_0 \in \mathbb{R}$, el problema de Cauchy posee solución única.

c) Demuestre que las soluciones para cada $y_0 \in \mathbb{R}$ son acotadas.
Indicación: Analice diferentes tipos de condiciones iniciales. Suponga que y no es acotada superiormente y deduzca que existe $T > 0$ tal que $y(T)$ es igual a una solución constante.

Llamemos $f(t,y) = y'$

Primero es directo notar que $f(t,y)$ es continua respecto a "t"

Veamos si es L-lipschitz $\Leftrightarrow$ derivada acotada

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{\frac{t}{1+t^2}}_{\text{acotada}} \left[\underbrace{\frac{\cos(y)}{1+y^2}}_{\text{acotada}} - \underbrace{\sin(y)\cdot \tan^{-1}(y)}_{\text{acotada}} \right]$$

$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$ i.e: tiene derivada acotada

$\therefore$ cumple los 2 requisitos del TEU.

b) Pruebe que, para cada $y_0 \in \mathbb{R}$, el problema de Cauchy posee solución única.

c) Demuestre que las soluciones para cada $y_0 \in \mathbb{R}$ son acotadas.
Indicación: Analice diferentes tipos de condiciones iniciales. Suponga que y no es acotada superiormente y deduzca que existe $T > 0$ tal que $y(T)$ es igual a una solución constante.

Es directo ver que si $y_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ $\vee$ $y_0 = 0$ la sol. es constante y por lo tanto acotada

Ahora si $y_0 \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ $\wedge$ $y_0 \neq 0$ vamos a proceder por contradicción.

Suponemos que y no es acotada superiormente

$\Rightarrow \exists T \mid y(T) = \left(\frac{K}{2} + 1\right)\pi = a_K$ para algún $K \in \mathbb{Z}$

Se tiene la única sol del problema es $y(t)$

$$y' = \frac{t}{1+t^2} \tan^{-1}(y) \cdot \cos(y)$$

$$y(T) = a_k,$$

Dado que $y(t) = a_k$ es sol. del problema, se concluye que y es cte. Lo cual contradice que no sea acotada superiormente.

P2. Considere el problema de Cauchy:

$$(*) \begin{cases} y' = \frac{cos(y)}{1+y^4} \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. Demuestre que existe una constante K tal que:

$$\left| \frac{cos(r)}{1+r^4} - \frac{cos(s)}{1+s^4} \right| \leq K|r-s|, \forall r, s \in \mathbf{R}$$

Ind: Aplicar TVM a la función $h(x) = \frac{cos(x)}{1+x^4}$ y luego estudie $|h'(x)|$

• Calculamos $h'(y)$

$$\Rightarrow h'(y) = \frac{-\sin(y)(1+y^4) - \cos(y)(3y^2)}{(1+y^4)^2}$$

usando TVM nos queda

$$\frac{\cos(y_1)}{1+y_1^4} - \frac{\cos(y_2)}{1+y_2^4} = \underbrace{\frac{-\sin(c)(1+c^4) - \cos(c)3c^2}{(1+c^4)^2}} \cdot (y_1 - y_2)$$

notemos que es continua, el denominador nunca se anula y tiene un grado mayor al numerador

$\Rightarrow |h'(y)| \leq K$. Entonces tomamos valor absoluto y usamos que esa derivada es acotada nos queda.

$$\left| \frac{\cos(y_1)}{1+y_1^4} - \frac{\cos(y_2)}{1+y_2^4} \right| \leq K|y_1 - y_2| \,//$$

2. Use la parte anterior para demostrar que el problema (*) tiene solución única, es decir, la funcion $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$. **Ind:** Para demostrar la unicidad considere φ_1, φ_2 dos soluciones de (*) y analice el proble que satisface $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$

Tomemos $f(x,y) = \dfrac{\cos(y)}{1+y^4}$

Con esto es directo notar que es continua respecto a x y es L-Lipschitz respecto a "y" por lo que vimos antes.

$\therefore$ Se cumple el TEU

Si tomamos $\varphi(x) = \pi/2$ veremos que es sol. del P.C.

$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\cos(\pi/2)}{1+(\pi/2)^4} = 0$

$\therefore$ Se cumple $\varphi'(x) = \dfrac{\cos(\varphi(x))}{1+\varphi(x)^4}$

y además $\varphi(0) = \pi/2 \Rightarrow$ Es sol. de (*)

Ahora tomemos $\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$

$\Rightarrow \psi'(x) = \varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)$

$= \dfrac{\cos(\varphi_1(x))}{1+\varphi_1(x)^4} - \dfrac{\cos(\varphi_2(x))}{1+\varphi_2(x)^4}$

Pero de la parte uno sabemos que

$$\left|\frac{\cos(\varphi_1(x))}{1+\varphi_1(x)^4} - \frac{\cos(\varphi_2(x))}{1+\varphi_2(x)^4}\right| \leq K\,|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|$$

$$\Leftrightarrow |\psi'(x)| \leq K\,|\psi(x)|$$

$\therefore$ nos quedo que $\psi(x)$ es continua por composición de continuas y es globalmente Lipschitz $\Rightarrow$ se cumple el TEU

Con lo cual nos queda

$$(*)' \begin{cases} \psi'(x) = \varphi_1'(x) - \varphi_2'(x) \\ \psi(0) = \underbrace{\varphi_1(0)}_{\pi/2} - \underbrace{\varphi_2(0)}_{\pi/2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$$ //

P3. Resuelva las siguientes ecuaciones difirenciales de segundo orden:

- $mx''(t) = -Kx(t)$
- $xy'' = y'$
- $y'' - 2y(y')^3 = 0$

- $m x'' = -k x$ / Tenemos una EDO sin variable dependiente

$\Rightarrow$ C.V $\quad P = x' \Rightarrow P' = x''$

Pero $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{dP}{dx} \cdot \underbrace{\dfrac{dx}{dt}}_{P}$ por regla de la cadena

$\Rightarrow P' = \dfrac{dP}{dx} \cdot P$, con esto nuestra EDO queda así

$$m \cdot \frac{dP}{dx} \cdot P = -k \cdot x$$ / llamamos $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ e integramos

$$\Rightarrow \int P\,dP = \int -\omega_0^2\, x\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{P^2}{2} = \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + C \quad / \cdot 2$$

$$\Rightarrow P^2 = -\omega_0^2 x^2 + \tilde{C} \quad / \sqrt{}$$ me quedaré solo con el positivo

$$\Rightarrow P = \sqrt{\tilde{C} - \omega_0^2 x^2}$$ / Recordar que $P = \dfrac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{\tilde{C}}{\omega_0^2} - x^2}$$ / Var. separables

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \int \omega_0 \, dt \quad / \ \alpha^2 = \frac{\tilde{c}}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \omega_0 \cdot t + \phi \quad / \sin()$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{\alpha} = \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad x = \alpha \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) \, //$$

P3. Resuelva las siguientes ecuaciones difirenciales de segundo orden:

- $mx''(t) = -Kx(t)$
- $xy'' = y'$
- $y'' - 2y(y')^3 = 0$

- $xy'' = y'$ acá usamos $y' = P$
$\Rightarrow y'' = P'$

$\Rightarrow xP' = P \quad / : xP$

$\Leftrightarrow \dfrac{P'}{P} = \dfrac{1}{x} \quad / \int$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dP}{P} = \int \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \ln|P| = \ln|x| + C \quad / e^{()}$

$\Rightarrow P = K \cdot x$, Devolvemos el C.V

$\Rightarrow y' = K \cdot x \quad / \int$

$\Rightarrow y = \dfrac{Kx^2}{2} + C$ //

P3. Resuelva las siguientes ecuaciones difirenciales de segundo orden:

- $mx''(t) = -Kx(t)$
- $xy'' = y'$
- $y'' - 2y(y')^3 = 0$

- Mismo caso que el primer caso.

$$y' = P \Rightarrow y'' = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy} y'$$

Reemplazando queda

$$\frac{dP}{dy} P - 2y \cdot P^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{dy} \cdot P = 2yP^3 \quad / : P^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{dy} \cdot \frac{1}{P^2} = 2y \quad / \int$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dP}{P^2} = \int 2y\, dy$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{P} = y^2 + C$$

$$\Leftrightarrow -1 = P(y^2 + C)$$

$$\Leftrightarrow -1 = y'(y^2 + C) \quad / \int$$

$$\Leftrightarrow \quad \int -dx = \int y^2 + C \; dy$$

$$\Rightarrow \quad -x + C_2 = \frac{y^3}{3} + C \cdot y \; //$$