P1. Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y periódicas con período $T > 0$, es decir,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t+T) = a(t), \quad b(t+T) = b(t).$$

Considere la ecuación diferencial

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t).$$

(a) Demuestre que el problema de Cauchy dado por

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

posee solución única para todo $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

Primero recordamos las 2 condiciones del TEU

1ro: Continua respecto a la primera variable

2da: L-Lipschitz respecto a la segunda variable

- Lo primero es directo pues a y b son continuas
- Veamos la segunda condición

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |a(t)x_1 + b(t) - [a(t)x_2 + b(t)]|$$

$$= |a(t)[x_1 - x_2]|$$

Pero $a(t)$ es periódica

$$\Rightarrow |a(t)| \leq \max a(t) = L$$

$$\Rightarrow |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$ //

(b) Sea u una solución de la ecuación (1) tal que $u(0) = u(T)$. Demuestre que

$$\varphi(t) = u(t+T) - u(t)$$

es solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(t)x(t), \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(c) Sea u solución de la ecuación (1). Aplicando los resultados de las partes anteriores, pruebe que u es periódica con período $T > 0$ si y solo si $u(0) = u(T)$.

Indicación: Analice la existencia y unicidad de solución de la ecuación (2).

Sea $\varphi(t) = u(t+T) - u(t) \quad / ()'$

$\Rightarrow \varphi'(t) = u'(t+T) - u'(t)$ / usamos que es sol del P.C

$\Leftrightarrow \varphi'(t) = a(t+T)u(t+T) - a(t)u(t)$ / $a(t)$ periódica

$\Leftrightarrow \varphi'(t) = a(t)[u(t+T) - u(t)]$

$\Leftrightarrow \varphi'(t) = a(t)\cdot \varphi(t)$

Además $\varphi(0) = u(T) - u(0) = 0$

$\therefore$ $\varphi(t)$ es sol. del P.C

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a(t)\varphi(t) \\ \varphi(0) &= 0 \end{aligned}$$

(b) Sea u una solución de la ecuación (1) tal que $u(0) = u(T)$. Demuestre que

$$\varphi(t) = u(t+T) - u(t)$$

es solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(t)x(t), \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(c) Sea u solución de la ecuación (1). Aplicando los resultados de las partes anteriores, pruebe que u es periódica con período $T > 0$ si y solo si $u(0) = u(T)$.

Indicación: Analice la existencia y unicidad de solución de la ecuación (2).

De resolver el P.C anterior obtenemos que $\varphi(t) \equiv 0$

$\iff \varphi(t) = 0$

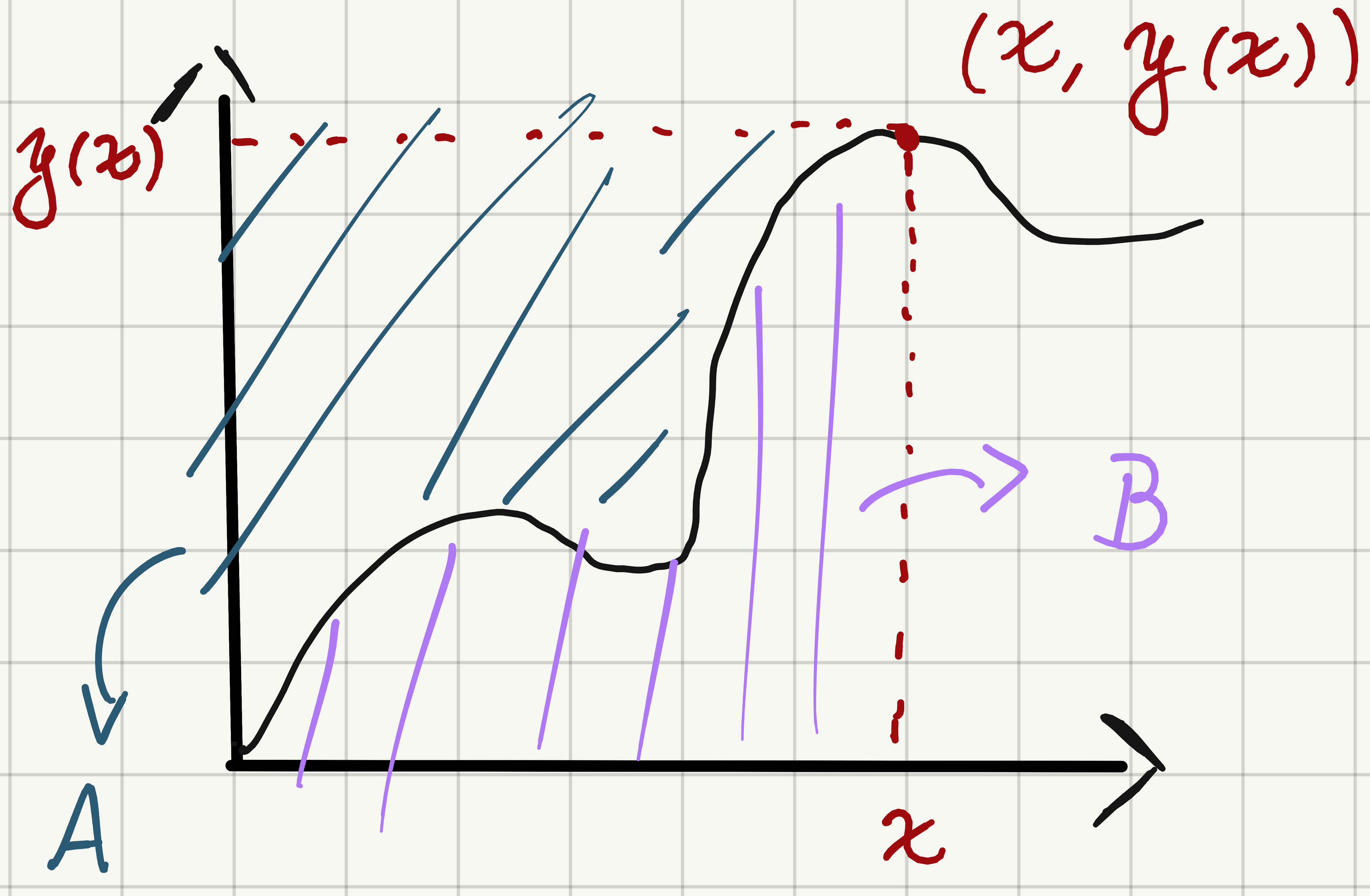
$\iff u(t+T) = u(t)$ //

$\therefore$ $u(t)$ es una función T-periódica.

P2. Sea una curva C definida en $([0,\infty))$ por la ecuación $y = y(x)$ que pasa por el origen. Las líneas dibujadas paralelas a los ejes coordenados que pasan por un punto arbitrario de la curva forman un rectángulo con dos lados sobre los ejes. La curva divide cada uno de estos rectángulos en dos regiones A (sobre la curva) y B (bajo la curva), donde el área de A es α veces la de B.

Encuentre la función $y(x)$.

Nuestro problema sería algo así:



$$\Rightarrow \quad x \cdot y(x) = A + B$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot y(x) = \alpha B + B$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot y(x) = [\alpha + 1] \cdot B$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot y(x) = [\alpha + 1] \cdot \int_0^x y(s)\, ds$$

Ahora derivamos para obtener la EDO derivamos esta ecuación:

$$\Rightarrow \quad y + x \cdot y' = [\alpha + 1]\, y$$

$$\Leftrightarrow \quad x\, y' = \alpha\, y \quad / : x\, y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \quad / \int$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \frac{\alpha}{x} + C$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \alpha \ln|x| + C \quad / \; e^{()}$$

$$\Rightarrow \quad y = k\, x^{\alpha} \;//$$

P2.- **Diagrama de pendientes**

La siguiente ecuación diferencial se utiliza para modelar la densidad de una población de peces $P(t)$, considerando que son capturados con una tasa de pesca constante:

$$\frac{dP}{dt} = P(1-P) - \frac{1}{4}$$

(a) Bosqueje el diagrama de pendientes asociado a la EDO en el plano (P, t). **Indicación**: Le será útil estudiar el signo de la función $P(1-P) - \frac{1}{4}$.

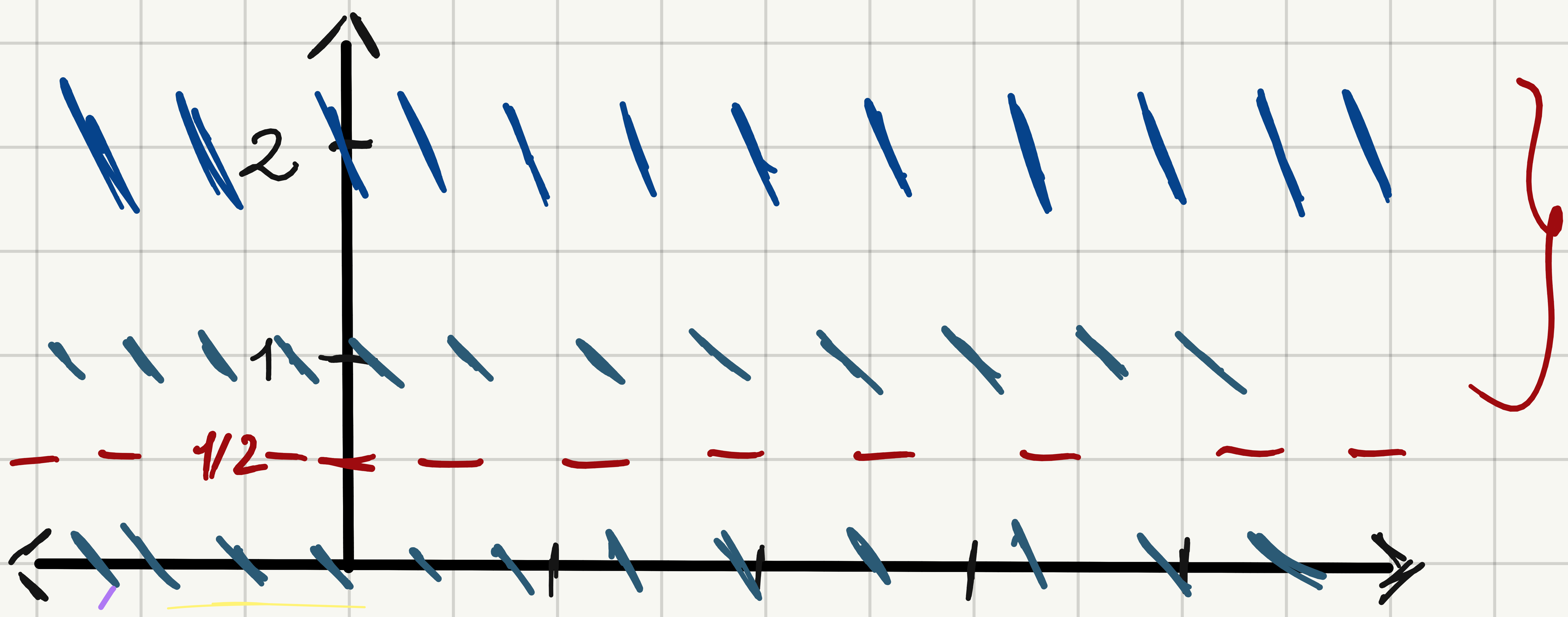
(b) Sea P una solución de la EDO, con condición inicial $P(0) \geq 0$. A partir del diagrama, conjeture si la población se extingue, es decir, $P(T) = 0$ para algún T, o sobrevive, es decir, $P(t) > 0$ para todo t. **Indicación**: Distinga los casos $P(0) > \frac{1}{2}$, $P(0) = \frac{1}{2}$, $0 < P(0) < \frac{1}{2}$.

- Notar que $P(1-P) - \frac{1}{4} = P - P^2 - \frac{1}{4}$

$= -(P - 1/2)^2$ //

$\Rightarrow \frac{dP}{dt} < 0 \quad \forall P \setminus \{1/2\}$ y $\frac{dP}{dt} = 0$ para $P = 1/2$

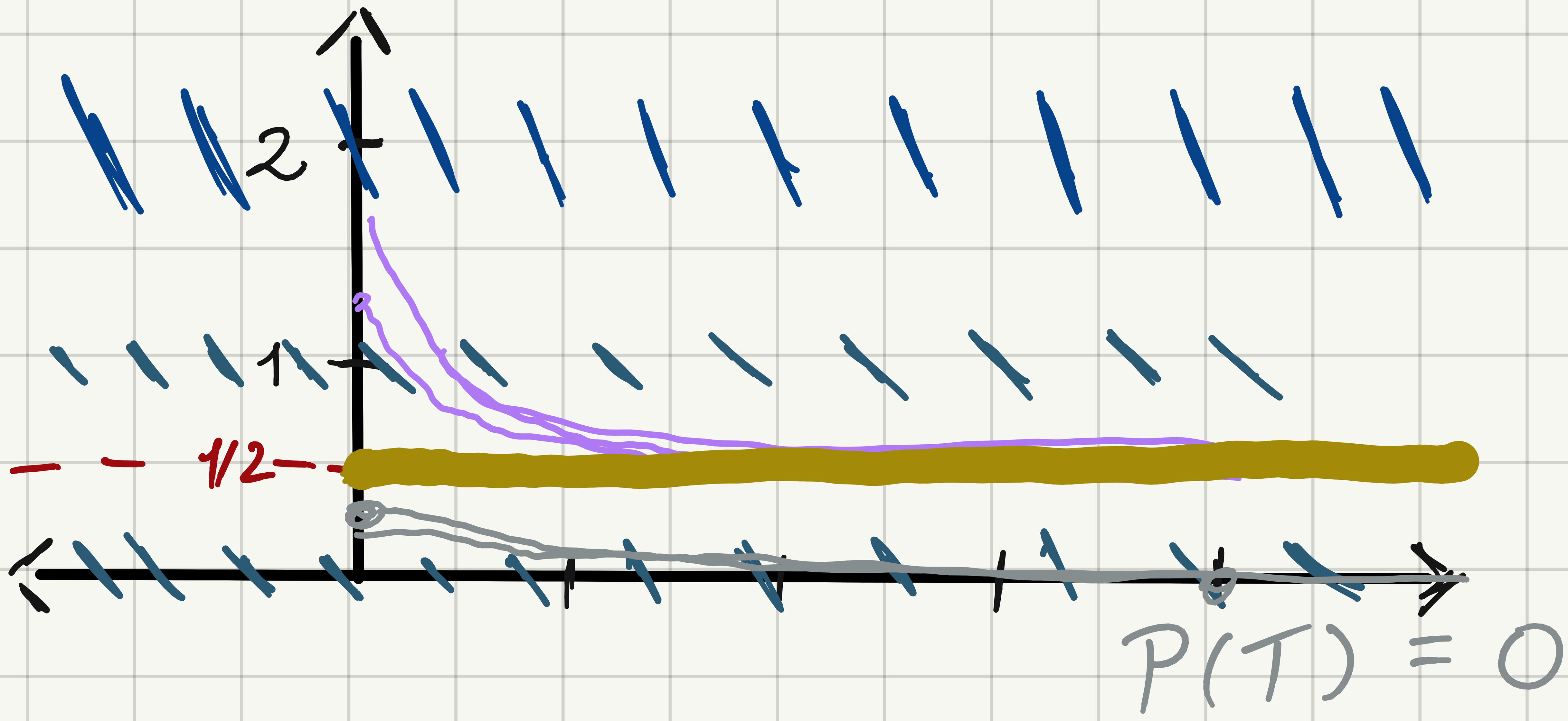
Con esto podemos tener una noción de nuestro diagrama de pendientes.



P	P'
0	$-1/4$
1	$-1/4$
2	$-9/4$

• Ahora tomaremos los 3 casos posibles

$P(0) > 1/2$; $P(0) = 1/2$; $P(0) < 1/2$



Con esto podemos notar que los peces se extingen si $P(0) < 1/2$ y que $\lim_{t \to \infty} P(t) = 1/2$

si $P(0) \geq 1/2$

(c) Determine todas las soluciones (expresiones matemáticas) de la ecuación, explicitando el mayor intervalo donde están definidas.

(d) Para $P(0) \geq \frac{1}{2}$, determine $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

• Tenemos $\frac{dP}{dt} = -(P - 1/2)^2$, suponemos $P(t_0) \neq 1/2$

$$\Leftrightarrow \int_{P(t_0)}^{P(t)} \frac{dP}{(P-1/2)^2} = \int_{t_0}^{t} -dt \qquad u = P - 1/2 \quad du = dP$$

$$\Leftrightarrow -\left[P(t) - \frac{1}{2}\right]^{-1} + \left[P(t_0) - \frac{1}{2}\right]^{-1} = -t + t_0 \,//$$

$$-\left[P(t)-\tfrac{1}{2}\right]^{-1}+\left[P(t_0)-\tfrac{1}{2}\right]^{-1} = -t+t_0$$

$$\Leftrightarrow \left[P(t)-\frac{1}{2}\right]^{-1} = \left[P(t_0)-\tfrac{1}{2}\right]^{-1}+t-t_0 \quad /()^{-1}$$

$$\Leftrightarrow P(t)-\frac{1}{2} = \frac{1}{\left[P(t_0)-1/2\right]^{-1}+t-t_0}$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\left[P(t_0)-1/2\right]^{-1}+t-t_0} \,//$$

notemos que si definimos $\alpha = \left[P(t_0)-1/2\right]^{-1}-t_0$

Si $P(t_0)>1/2 \Rightarrow (P(t_0)-1/2)^{-1}>0$

$\Rightarrow \alpha<t_0$ y su solución está definida en $]\alpha,\infty[$

Si $P(t_0)<1/2 \Rightarrow (P(t_0)-1/2)^{-1}<0$

$\Rightarrow \alpha>t_0$ y la solución está definida entre $]-\infty,\alpha[$

Si $P(t_0)=1/2 \Rightarrow P(t)=1/2 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

- Si $P(t_0) = 1/2 \Rightarrow P(t) = 1/2$

Si $P(t_0) > 1/2$, la solución está definido en

$]\alpha, \infty[$, $\lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t - \alpha} = 1/2$ //