Auxiliar 3: TEU y segundo orden

Profesor: Francisco Ortega Culaciati
Auxiliar: Iñaki Escobar Cano

P1. Considere el siguiente problema de Cauchy para $y_0 \in \mathbb{R}$:

$$y' = \frac{t}{1+t^2} \arctan(y)\cos(y), \quad t \in \mathbb{R},$$

con la condición inicial

$$y(0) = y_0.$$

a) Encuentre todas las soluciones constantes de la ecuación diferencial.

b) Pruebe que, para cada $y_0 \in \mathbb{R}$, el problema de Cauchy posee solución única.

c) Demuestre que las soluciones para cada $y_0 \in \mathbb{R}$ son acotadas.
Indicación: Analice diferentes tipos de condiciones iniciales. Suponga que y no es acotada superiormente y deduzca que existe $T > 0$ tal que $y(T)$ es igual a una solución constante.

P2. Considere el problema de Cauchy:

$$(*) \begin{cases} y' = \frac{cos(y)}{1+y^4} \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. Demuestre que existe una constante K tal que:

$$\left|\frac{cos(r)}{1+r^4} - \frac{cos(s)}{1+s^4}\right| \leq K|r-s|, \forall r, s \in \mathbf{R}$$

Ind: Aplicar TVM a la función $h(x) = \frac{cos(x)}{1+x^4}$ y luego estudie $|h'(x)|$

2. Use la parte anterior para demostrar que el problema (*) tiene solución única, es decir, la funcion $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$. **Ind:** Para demostrar la unicidad considere φ_1, φ_2 dos soluciones de (*) y analice el proble que satisface $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$

P3. Resuelva las siguientes ecuaciones difirenciales de segundo orden:

- $mx''(t) = -Kx(t)$
- $xy'' = y'$
- $y'' - 2y(y')^3 = 0$
- **Teorema de Existencia y Unicidad Global (o Picard-Lindelöf):** Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en su primera variable y globalmente Lipschitz en su segunda variable. Entonces, para cada $x_0 \in I$ y $y_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución global $y \in C^1(I)$ del problema de Cauchy (PC):

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- **Definición:** Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Lipschitz de constante $L > 0$ si para todo $x, y \in I$ se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

- **Teorema del Valor Medio:** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

- **Teorema de Existencia y Unicidad Local:** Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en su primera variable en x_0 y que existen $r, \delta, L > 0$ tales que para todo $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e $y, z \in [y_0 - r, y_0 + r]$ se tiene la desigualdad $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$. Denotemos:

$$M = \max_{x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] y \in [y_0 - r, y_0 + r]} |f(x, y)| \qquad \delta_0 = \min\left(\delta, \frac{r}{M}\right) \qquad J = I \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0).$$

Entonces existe una única solución local $y \in C^1(J)$ del problema de Cauchy (PC).