P1. Identifique y resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

(a) $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$.

(b) $y' = \frac{1-x-y}{x+y}$.

(c) $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$.

(d) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

(e) $y' + \cot(x)y + \frac{y^2}{\sin(x)} = 0$.

(f) $3y' + ty^4e^{t^2} = 2ty$.

- $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

$\Leftrightarrow \quad y' - 2 = \sqrt{y - 2x + 3}$ / notar que el lado izq es la derivada del derecho

C.V $\quad u = y - 2x + 3$

$\Rightarrow \quad u' = y' - 2$

$\Rightarrow \quad u' = \sqrt{u}$ / Var. Separables

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{u'}{\sqrt{u}} = 1$ / $\int$

$\Leftrightarrow \quad \int u^{-1/2}\, du = \int dx$

$\Leftrightarrow \quad u^{1/2} \cdot 2 = x + C$ / Devolvemos el C.V

$\Rightarrow \quad \sqrt{y - 2x + 3} \cdot 2 = x + C$ / $()^2$

$\Leftrightarrow \quad [y - 2x + 3] \cdot 4 = (x + C)^2$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{(x + C)^2}{4} + 2x - 3$ //

P1. Identifique y resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

(a) $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$.

(b) $y' = \frac{1-x-y}{x+y}$.

(c) $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$.

(d) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

(e) $y' + \cot(x)y + \frac{y^2}{\sin(x)} = 0$.

(f) $3y' + ty^4e^{t^2} = 2ty$.

- $y' = \dfrac{1-x-y}{x+y}$

$\Leftrightarrow y' = \dfrac{1-(x+y)}{x+y}$

$\Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{x+y} - 1$

$\Leftrightarrow y' + 1 = \dfrac{1}{x+y}$ / mismo caso anterior

C.V $u = x + y$

$\Rightarrow u' = 1 + y'$

$\Rightarrow u' = \dfrac{1}{u}$ / Var. Separables

$\Leftrightarrow u' \cdot u = 1$ / $\int$

$\Leftrightarrow \int u\, du = \int dx$

$\Leftrightarrow \dfrac{u^2}{2} = x + C$

$\Rightarrow u = \pm\sqrt{2x + \tilde{C}}$ / Devolvemos el C.V

$\Rightarrow y + x = \pm\sqrt{2x + \tilde{C}} \Rightarrow y = -x \pm \sqrt{2x + \tilde{C}}$ //

P1. Identifique y resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

(a) $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$.

(b) $y' = \frac{1-x-y}{x+y}$.

(c) $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$.

(d) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

(e) $y' + \cot(x)y + \frac{y^2}{\sin(x)} = 0$.

(f) $3y' + ty^4e^{t^2} = 2ty$.

- $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$

Notar que tiene la forma de Ricatti, así que necesitamos una sol. particular.

Como es una suerte de polinomio, proponemos un $y_p(x) = \alpha x^n \Rightarrow y_p'(x) = n\cdot\alpha\cdot x^{n-1}$

Reemplazando queda

$$n\cdot\alpha\cdot x^{n-1} + \alpha^2\cdot x^{2n+1} - 2\alpha x^{n+2} - \alpha x^n + x^3 + x - 1 = 0$$

Tiene sentido probar $n=1$ para obtener una ec.

$$\Rightarrow \alpha + \alpha^2\cdot x^3 - 2\alpha x^3 - \alpha x + x^3 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \\ 1 - \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\therefore y_p = x \Rightarrow y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$$

P1. Identifique y resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

(a) $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$.

(b) $y' = \frac{1-x-y}{x+y}$.

(c) $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$.

(d) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

(e) $y' + \cot(x)y + \frac{y^2}{\sin(x)} = 0$.

(f) $3y' + ty^4e^{t^2} = 2ty$.

Entonces nos queda

$$1 - \frac{z'}{z^2} + x\left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - (2x^2+1)\left(x + \frac{1}{z}\right) + x^3 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1} - \frac{z'}{z^2} + x\left[\cancel{x^2} + \cancel{\frac{2x}{z}} + \frac{1}{z^2}\right] - \left[\cancel{2x^3} + \cancel{x} + \cancel{\frac{2x^2}{z}} + \frac{1}{z}\right]$$

$$+ \cancel{x^3} + \cancel{x} - \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} + \frac{x}{z^2} - \frac{1}{z} = 0 \quad / \cdot -z^2$$

$$\Leftrightarrow z' - x + z = 0$$

$$\Leftrightarrow z' + z = x \quad / \text{ factor integrante } e^{\int dx}$$

$$\Leftrightarrow z'e^x + z \cdot e^x = x \cdot e^x$$

$$\Leftrightarrow \left[z \cdot e^x\right]' = x \cdot e^x \quad / \text{ TFC}$$

$$\Leftrightarrow z \cdot e^x = \int x e^x \, dx \rightarrow$$

D	I
$+ \; x$	e^x
$- \; 1$	e^x
$+ \; 0$	e^x

$= xe^x - e^x$

$$\Leftrightarrow z \cdot e^x = xe^x - e^x + C \quad /:e^x$$

$$\Rightarrow z = x - 1 + C \cdot e^{-x}$$

$$\therefore y = x + \left[x - 1 + C \cdot e^{-x}\right]^{-1} //$$

P1. Identifique y resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

(a) $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$.

(b) $y' = \frac{1-x-y}{x+y}$.

(c) $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$.

(d) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

(e) $y' + \cot(x)y + \frac{y^2}{\sin(x)} = 0$.

(f) $3y' + ty^4e^{t^2} = 2ty$.

- $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ / Como es una ec. de Ricatti:

probamos con un $y_p = \alpha \cdot x^n \Rightarrow y_p' = \alpha n \cdot x^{n-1}$

Reemplazando queda

$$\alpha \cdot n \cdot x^{n-1} = \alpha^2 \cdot x^{2n} - 2x^{-2}$$

Entonces necesitamos que $n-1 = -2 = 2n$

$\therefore n = -1$

$$\Leftrightarrow -\alpha \cdot x^{-2} = \alpha^2 \cdot x^{-2} - 2 \cdot x^{-2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$$

Reemplazamos

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right]^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{-\frac{1}{x^2}} - \frac{z'}{z^2} = \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2} - \cancel{\frac{2}{x^2}} \quad / \cdot z^2$$

$$z' = \frac{-2z}{x} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad z' + \frac{2z}{x} = -1 \quad / \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\int \frac{2}{x} dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad z' x^2 + 2x \cdot z = -x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad [z x^2]' = -x^2 \quad / \text{ TFC}$$

$$\Leftrightarrow \quad z \cdot x^2 = -\frac{x^3}{3} + C \quad / : x^2$$

$$\Rightarrow \quad z = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{x} + \left[\frac{-x}{3} + \frac{C}{x^2} \right]^{-1} \text{ "}$$

P1. Identifique y resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

(a) $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$.

(b) $y' = \frac{1-x-y}{x+y}$.

(c) $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$.

(d) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

(e) $y' + \cot(x)y + \frac{y^2}{\sin(x)} = 0$.

(f) $3y' + ty^4e^{t^2} = 2ty$.

$$y' + \cot(x)\, y + \frac{y^2}{\sin(x)} = 0$$

notamos que tiene forma de Ec. de Ricatti,

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2}$$

Reemplazando queda

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{\cot(x)}{z} + \frac{1}{z^2 \cdot \sin(x)} = 0 \quad / \cdot -z^2$$

$$\Leftrightarrow \quad z' - \cot(x) \cdot z - \frac{1}{\sin(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z' - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot z = \frac{1}{\sin(x)} \quad / \text{ Factor integrante}$$

$$\int -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx \qquad \text{c.v } u = \sin(x)$$
$$\Rightarrow du = \cos(x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \int -\frac{du}{u} = -\ln|u| \Rightarrow e^{\int -\cot(x)} = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} z = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{z}{\sin(x)} \right]' = \frac{1}{\sin^2(x)} \quad / \text{ TFC}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{\sin(x)} = \int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx \quad \text{C.V } u = \cot(x) \Rightarrow du = \frac{-1}{\sin^2(x)} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{\sin(x)} = \int -du$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{\sin(x)} = -u + C \quad / \text{ Devolvemos el C.V}$$

$$\wedge \cdot \sin(x)$$

$$\Rightarrow z = -\cot(x) \cdot \sin(x) + C \cdot \sin(x)$$

Recordar que $y = 1/z$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{-\cos(x) + C \cdot \sin(x)} \quad //$$

P1. Identifique y resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

(a) $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$.

(b) $y' = \frac{1-x-y}{x+y}$.

(c) $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$.

(d) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

(e) $y' + \cot(x)y + \frac{y^2}{\sin(x)} = 0$.

(f) $3y' + ty^4 e^{t^2} = 2ty$.

• $3y' + t\cdot y^4 \cdot e^{t^2} = 2ty$

Notar que tiene forma de Ec. de Bernoulli

$\Rightarrow$ usamos el C.V $z = y^{1-4} \Rightarrow z' = -3y^{-4}\cdot y'$

Reescribamos la EDO

$$3y' + t\cdot y^4 \cdot e^{-t^2} = 2t\cdot y \quad / \cdot -y^{-4}$$

$$\Leftrightarrow -3y'\cdot y^{-4} - t\cdot e^{-t^2} = -2t\, y^{-3} \quad / \text{ usamos el CV}$$

$$\Leftrightarrow z' - te^{-t^2} = -2tz$$

$$\Leftrightarrow z' + 2t\cdot z = t\cdot e^{-t^2} \quad / \text{ Factor integrante } e^{\int 2t\,dt}$$

$$\Leftrightarrow z'e^{t^2} + 2t\cdot e^{t^2}\cdot z = t$$

$$\Leftrightarrow \left[z\cdot e^{t^2}\right]' = t \quad / \text{ TFC}$$

$$\Leftrightarrow z e^{t^2} = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow z = \frac{t^2}{2e^{t^2}} + \frac{C}{e^{t^2}}$$

Recordar que $z = y^{-3} \Leftrightarrow z^3 = y$

$$\Rightarrow y = \left[\frac{t^2}{2e^{t^2}} + \frac{C}{e^{t^2}}\right]^3 \;//$$

P2. Tomando la sustitución $u = \ln(y)$, resuelva la ecuación diferencial:

$$y'(x) + xy(x) = -\frac{2}{x} y \ln(y), \quad \text{para } x > 0.$$

usando el C.V nos queda $u = \ln(y)$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{y} y'$$

Entonces reescribimos la EDO

$$y' + xy = \frac{-2}{x} \cdot y \cdot \ln(y) \quad / : y$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} + x = -\frac{2\ln(y)}{x} \quad / \text{usamos el C.V}$$

$$\Rightarrow u' + x = -2\frac{u}{x} \quad / -x + 2\frac{u}{x}$$

$$\Leftrightarrow u' + \frac{2u}{x} = -x \quad / \cdot x^2 \Leftrightarrow e^{\int \frac{2}{x} dx}$$

$$\Leftrightarrow u' \cdot x^2 + 2x \cdot u = -x^3$$

$$\Leftrightarrow [u \cdot x^2]' = -x^3 \quad / \text{TFC}$$

$$\Rightarrow u \cdot x^2 = -\frac{x^4}{4} + C \quad / : x^2$$

$$\Leftrightarrow u = -\frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2} \quad / \text{Devolvemos C.V}$$

$$\Rightarrow \ln(y) = -\frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2} \quad / e^{()} \Leftrightarrow y = e^{\left[-\frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}\right]}$$ //

P3. Considere la EDO

$$g'(y)\frac{dy}{dx} + p(x)g(y) = f(x).$$

(a) Probar que el cambio de la variable dependiente $z(x) = g(y)$ transforma la ecuación anterior en una ecuación diferencial lineal.

$$Z(x) = g(y(x)) \quad /()'$$

$$\Rightarrow Z'(x) = g'(y(x)) \cdot y'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad Z'(x) = g'(y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}$$

Reemplazando queda

$$Z'(x) + P(x) \cdot Z(x) = f(x) \,_{//}$$

nos queda una EDO lineal no homogénea.

(b) Calcular la solución general en forma implícita de la ecuación:

$$e^{y^2}\left(2y\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

(c) Encontrar la solución particular tal que $y(2) = -\sqrt{\ln(2)}$.

Si desarrollamos la EDO nos queda

$$\underbrace{e^{y^2} \cdot 2y}_{g'(y)} \frac{dy}{dx} + \underbrace{e^{y^2}}_{g(y)} \underbrace{\frac{2}{x}}_{P(x)} = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{f(x)}$$

$\Rightarrow$ Usamos el C.V $Z(x) = e^{y^2}$

$$\Rightarrow \quad z'(x) + z(x) \cdot \frac{2}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad / \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad z'(x) \cdot x^2 + z(x) \cdot 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad [z(x) \cdot x^2]' = 1 \quad / \int$$

$$\Leftrightarrow \quad z(x) \cdot x^2 = x + C$$

$$\Rightarrow \quad z(x) = \frac{x + C}{x^2} \qquad / \text{Recordar } z(x) = e^{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{y^2} = \frac{x + C}{x^2} \qquad / \ln()$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \ln\left(\frac{x + C}{x^2}\right) \qquad / \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm \sqrt{\ln\left(\frac{x + C}{x^2}\right)}$$

necesitamos $y(2) = -\sqrt{\ln(2)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{2 + C}{2^2} = 2 \qquad \Rightarrow \quad C = 6$$

$$\therefore \quad y(x) = -\sqrt{\ln\left(\frac{x + 6}{x^2}\right)}$$

P4. Considere la ecuación diferencial $y' + 2(1-x)y - y^2 = x(x-2)$

1. Encuentre una solución particular de la forma $y_p = ax + b$.
2. Determine la solución general de la ecuación. Luego, obtenga la solución que satisface $y(2) = 2$ y el intervalo maximal donde está definida.

1.- $y_p = ax + b \Rightarrow y_p' = a$

Reemplazando en la EDO queda

$$a + 2(1-x)(ax+b) - (ax+b)^2 = x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow a + (2-2x)(ax+b) - a^2x^2 - 2abx - b^2 = x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow a + 2ax + 2b - 2ax^2 - 2bx - a^2x^2 - 2abx - b^2 = x^2 - 2x + 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a^2 - 2a = 1 & (1) \\ 2a - 2b - 2ab = -2 & (2) \\ a + 2b - b^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

De (1) tenemos $a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

Reemplazamos en (3)

$$-1 + 2b - b^2 = 0 \Leftrightarrow -(b-1)^2 = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$\therefore y_p = -x + 1$$

P4. Considere la ecuación diferencial $y' + 2(1-x)y - y^2 = x(x-2)$

1. Encuentre una solución particular de la forma $y_p = ax + b$.
2. Determine la solución general de la ecuación. Luego, obtenga la solución que satisface $y(2) = 2$ y el intervalo maximal donde está definida.

2.: Ahora usamos Ricatti

$$\Rightarrow \quad y = -x + 1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -1 - \frac{z'}{z^2}$$

Reemplazamos

$$-1 - \frac{z'}{z^2} + 2(1-x)\left(-x+1+\frac{1}{z}\right) - \left[-x+1+\frac{1}{z}\right]^2 = x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow -1 - \frac{z'}{z^2} + \cancel{2}(1-x)^2 + \cancel{\frac{2(1-x)}{z}} - \left[\cancel{(1-x)^2} + \cancel{\frac{2(1-x)}{z}} + \frac{1}{z^2}\right] = x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow -1 - \frac{z'}{z^2} + (1-x)^2 - \frac{1}{z^2} = x(x-2) \quad / \cdot -z^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 + z' - (1-x)^2 z^2 + 1 = -z^2 x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{z^2} + z' - (\cancel{1} - \cancel{2x} + \cancel{x^2}) z^2 + 1 = -z^2(\cancel{x^2} - \cancel{2x})$$

$$\Rightarrow z' + 1 = 0$$

$$\Rightarrow z = -x + C \qquad \therefore \; y = -x + 1 + \frac{1}{C-x}$$

Evaluamos en $x = 2$

$$\Rightarrow \quad y(2) = -2 + 1 + \frac{1}{C-2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 = \frac{1}{C-2} \quad / \cdot \frac{C-2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad C - 2 = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad C = 2 + \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{7}{3}$$

$\therefore$ La sol. del PVI es $y = -x + 1 + \dfrac{1}{\frac{7}{3} - x}$

El dominio de y es $(-\infty, \frac{7}{3}) \cup (\frac{7}{3}, \infty)$

Como nos da el valor $x = 2$, el intervalo maximal es $(-\infty, 7/3)$ //