P2

SNL $\begin{cases} x' = x^2 + y \\ y' = x - y + a \end{cases}$

Pts de eq $x', y' = 0 \Rightarrow x, y$ ctes

$$\begin{matrix} x_0^2 + y_0 = 0 \\ x_0 - y_0 + a = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_0^2 + x_0 + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0^{+,-} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \\ y_0^{+,-} = x_0^{+,-} + a \end{cases}$$

Para $a = \frac{1}{4}$ hay un punto de eq, para $a < 1/4$ hay dos. (En otro caso no hay)

Calculamos la ecuación variacional; $\dot{U} = DF(\bar{x})U$

Acá $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ x-y+a \end{pmatrix} \Rightarrow DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Evaluando en los pts crit:

$DF(x_0^+, y_0^+) = \begin{pmatrix} 2x_0^+ & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $DF(x_0^-, y_0^-) = \begin{pmatrix} 2x_0^- & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(+)

$\begin{cases} u_1' = 2x_0^+ u_1 + u_2 \\ u_2' = u_1 - u_2 \end{cases}$

(-)

$\begin{cases} u_1' = 2x_0^- u_1 + u_2 \\ u_2' = u_1 - u_2 \end{cases}$

Estudiamos los sistemas lineales relacionados a cada punto de equilibrio:

(+) $\begin{pmatrix} 2x_0^+ & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Como nos interesa únicamente conocer el signo de los valores propios, utilizamos props bacanes de lineal. Para matriz 2x2 diagonalizable:

$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $Det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, donde λ_i son sus vps.

Así: $2x_0^+ - 1 = \lambda_1^+ + \lambda_2^+$

$-2x_0^+ - 1 = \lambda_1^+ \cdot \lambda_2^+$

(Usamos que es simétrica, y por lo tanto $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$).

Luego: $\lambda_1^+, \lambda_2^+ > 0 \Leftrightarrow 2x_0^+ - 1, -2x_0^+ - 1 > 0$

$\Leftrightarrow -2 > 0$ $\Rightarrow\Leftarrow$

$\lambda_1^+, \lambda_2^+ < 0 \Leftrightarrow 2x_0^+ - 1 < 0, -2x_0^+ - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x_0^+ < 1/2, \; x_0^+ < -1/2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \sqrt{1-4a} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-4a} < 0$ $\Rightarrow\Leftarrow$

Existen 3 casos; (no hay otro)

$\underbrace{\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 > 0}_{(1)}$, $\underbrace{\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0}_{(2)}$, $\underbrace{\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0 \text{ o bien } \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0}_{(3)}$

Aquí asumí que no son 0, lo vi más abajo.

Como ya vimos que (1) y (2) son Falsos, entonces se tiene (3) para todo x_0^+.

Análogamente,

$$(-) \begin{pmatrix} 2x_0^- & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x_0^- - 1 = \lambda_1^- + \lambda_2^- \\ -2x_0^- - 1 = \lambda_1^- \cdot \lambda_2^- \end{array}\right\}$$

$$(3) \iff -2x_0^- - 1 < 0$$
$$\iff x_0^- > -\frac{1}{2}$$
$$\iff -\frac{1}{2} - \sqrt{1-4a} > -\frac{1}{2}$$
$$\iff \sqrt{1-4a} < 0 \;\; \text{\#\#}$$

$$(1) \iff 2x_0^- - 1 > 0, \; -2x_0^- - 1 > 0$$
$$\iff -2 > 0 \;\; \text{\#\#}$$

Luego, se tiene (2) para todo x_0^-.

Por lo tanto, para $a < 1/4$:

(x_0^+, y_0^+) es un punto de silla del sistema linealizado.

(x_0^-, y_0^-) es un equilibrio estable del sistema linealizado.

Por el teorema de linealización, para que estas naturalezas del problema lineal aproximen bien a la naturaleza del problema original en cercanías de cada punto, estos deben ser equilibrios hiperbólico. Ya vimos que los vp son reales por lo que basta ver que no son nulos. (Propuesta)

<u>Caso $a = 1/4$</u>, se tiene $(x_0^+, y_0^+) = (x_0^-, y_0^-) = (-1/2, -\frac{1}{4})$

y se trata de una biFurcación. (Si a varía un poco, ya sea para arriba o para abajo, ocurre un cambio brusco en la estructura de las soluciones)

Esto se puede notar ya que para $a \to \frac{1}{4}^+$ no hay equilibrios, pero para $a \to \frac{1}{4}^-$ si los hay.

Graficamos el sistema usando nulclinas: sabemos lo siguiente

región donde $x'=0$

En la x-nulclina, la pendiente será vertical.
En la y-nulclina, la pendiente será horizontal.

región donde $y'=0$

$$SNL_a \begin{cases} x' = x^2 + y \\ y' = x - y + a \end{cases}$$

$y = -x^2$ x-nulclina

$y = x + a$ y-nulclina

Escogemos puntos donde sea fácil calcular la pendiente, y rellenamos desde ahí.

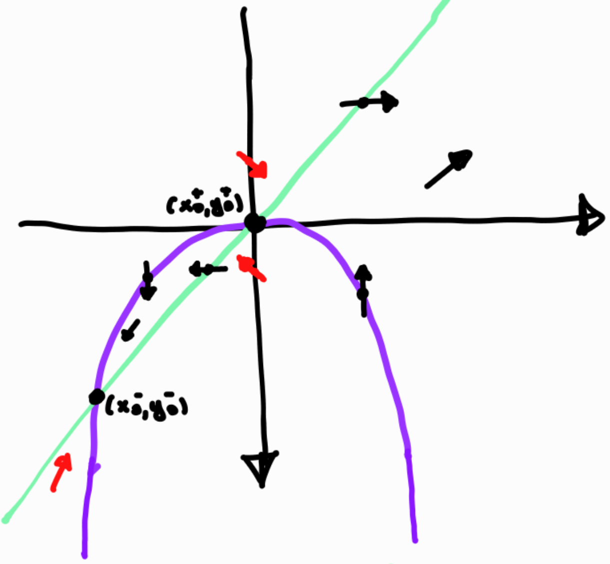
Ej: $(\bar{x},\bar{y}) = (0,1) \Rightarrow x' = 1, y' = -1+a$:

$(\underline{x},\underline{y}) = (0,-1) \Rightarrow x' = -1, y' = 1+a$

Esto es para saber si en la x-nulc la flecha va ↑ ó ↓
también en la y-nulcl → ó ←

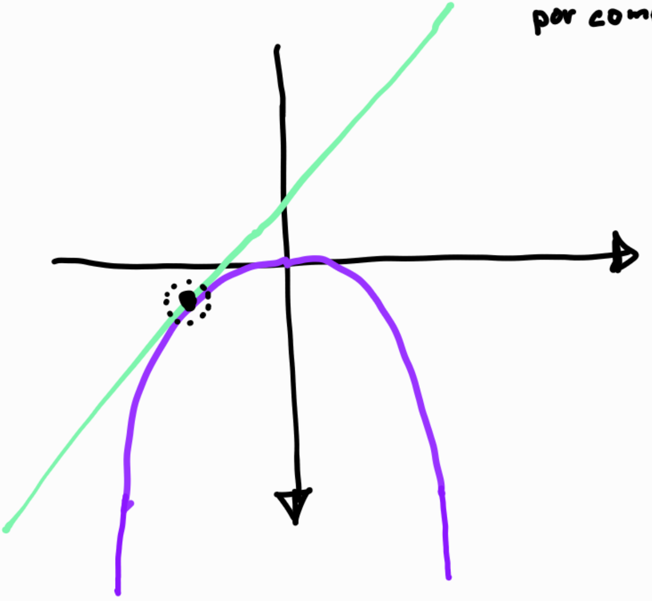
$a=0$

SNL_0



$SNL_{1/4}$, bifurcación!

Si lo subo/bajo un poco, el sistema cambia por completo!



"Bifurcación tipo silla"

$SNL_{a>1/4}$

No hay puntos de eq!

P1) $\begin{cases} x' = \sin(x) \\ y' = \cos(y) \end{cases}$ $\sin(x_0) = 0, \cos(y_0) = 0.$

$\Rightarrow$ $x_0^k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$y_0^k = \pi(k + 1/2), k \in \mathbb{Z}$

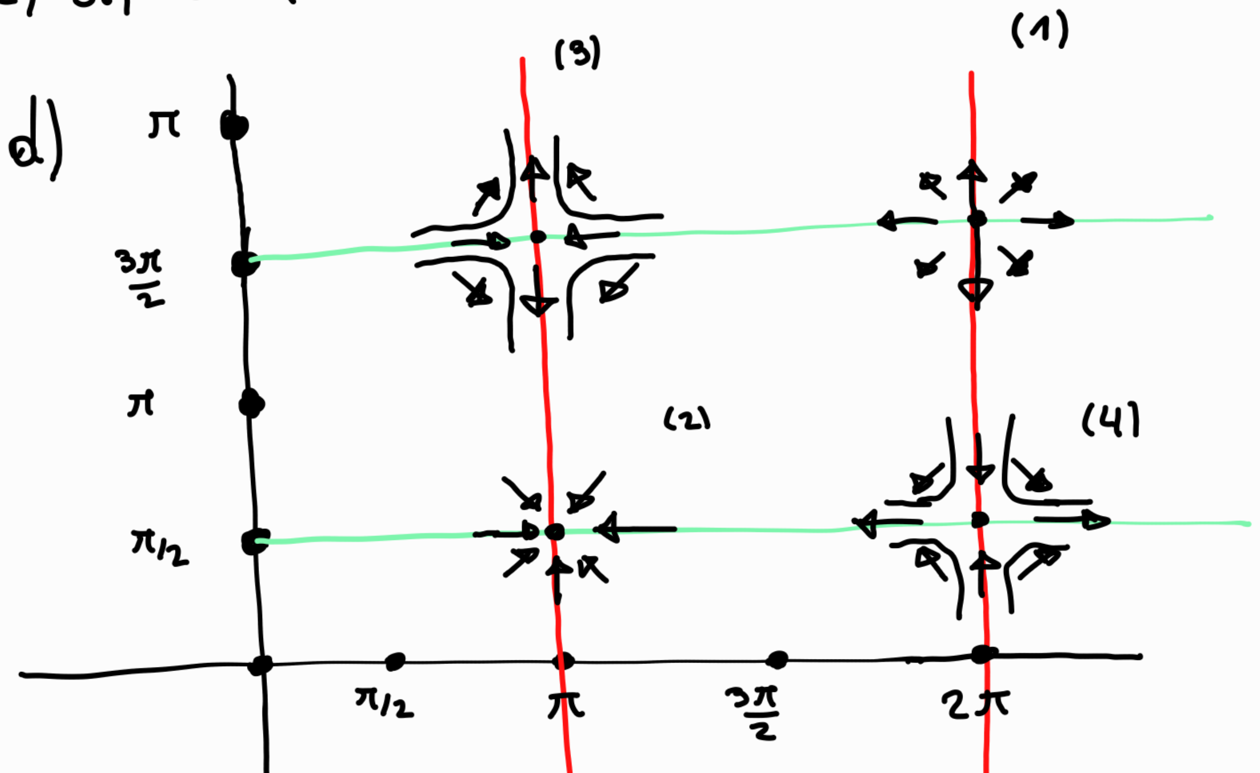
$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(y) \end{pmatrix} \Rightarrow DF(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 \\ 0 & -\sin(y) \end{pmatrix}$$

a)
$$DF(x_0^k, y_0^k) = \begin{cases} I & x_0^k \text{ con } k \text{ par}, y_0^k \text{ con } k \text{ impar} \quad (1) \\ -I & x_0^k \text{ con } k \text{ impar}, y_0^k \text{ con } k \text{ par} \quad (2) \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & x_0^k \text{ con } k \text{ impar}, y_0^k \text{ con } k \text{ impar} \quad (3) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & x_0^k \text{ con } k \text{ par}, y_0^k \text{ con } k \text{ par} \quad (4) \end{cases}$$

b)
(1) inestable
(2) estable
(3) y (4) silla

x-nulclina: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
y-nulclina: $y = (k + 1/2)\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Si, cada punto de equilibrio es hiperbólico.

d)


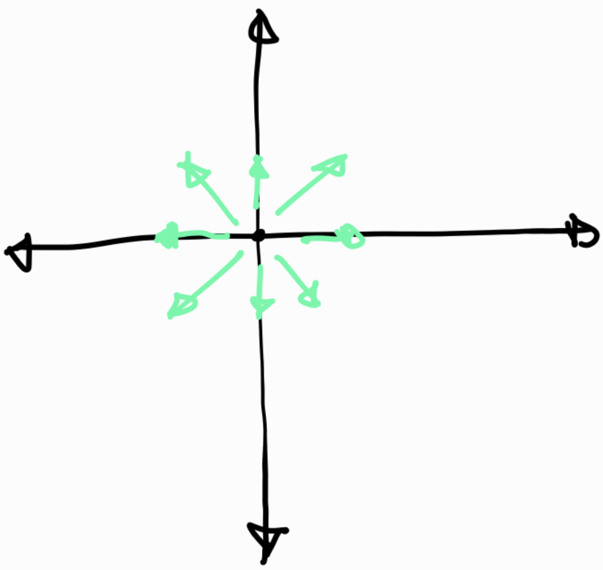
$$\begin{cases} x' = x(x^2+y^2) \\ y' = y(x^2+y^2) \end{cases} \quad \begin{matrix} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} r'\cos(\theta) - r\sin(\theta)\theta' = r\cos(\theta)\cdot r^2 \\ r'\sin(\theta) + r\cos(\theta)\theta' = r\sin(\theta)\cdot r^2 \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (0,0)$ es el equilibrio del sistema. Acá

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x(x^2+y^2) \\ y(x^2+y^2) \end{pmatrix} \Rightarrow DF(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+y^2 & 2yx \\ 2xy & x^2+3y^2 \end{pmatrix}$$

$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Los valores propios de la matriz son 0, no aplica la linearización. (El equilibrio no es hiperbólico). Dibujamos el sistema con coordenadas polares:

$$\Rightarrow \begin{cases} r' = r^3 \\ \theta' = 0 \end{cases} \quad r_0 = 0 \text{ pto de eq}$$



Es completamente radial

a) $\begin{cases} x' = x + y^2 \\ y' = 2y \end{cases}$ $\qquad \begin{matrix} x_0 + y_0^2 = 0 \\ 2y_0 = 0 \end{matrix} \Rightarrow (x_0, y_0) = (0,0)$ es pto de eq

b) $F(x,y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow DF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$U' = DF(0,0)\,U$ el sistema variacional.

c)

$\Rightarrow DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Luego $(0,0)$ es fuente del sistema linealizado.

d)

Notamos que es un punto de equilibrio hiperbólico, por lo que aproxima bien al sistema original.

e) x-nulclina: $x = -y^2$

y-nulclina: $y = 0$

$(0,1) \to x' = 1,\ y' = 2$

$(0,-1) \to x' = 1,\ y' = -2$

$(-2,1) \to x' = -1,\ y' = 2$