Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Pauta Auxiliar 13 P1-P2

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Francisco Castro y Rocío Yañez

P1. Calcule los primeros términos de las iteraciones de Picard para cada EDO. Obtenga la solución por el método que estime conveniente.

a) $x' = x - 2; \quad x(0) = 1$
Pauta: Se tiene que

$$u_0(t) = 1$$

$$u_1(t) = 1 + \int_0^t (1-2)ds = 1 - t$$

$$u_2(t) = 1 + \int_0^t ((1-s)-2)ds = 1 - t - \frac{t^2}{2}$$

Para este caso es fácil encontrar la forma general de la sucesión. Sea $u_k(t) = 1 - \sum_{n=1}^{k} \frac{t^n}{n!}$, demostremos por inducción que se tiene para $k+1$:

$$u_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t ((1 - \sum_{n=1}^{k} \frac{s^n}{n!}) - 2)ds = 1 - \int_0^t ds - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!} \int_0^t s^n ds$$

$$1 - t - \sum_{n=1}^{k} \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} = 1 - t - \sum_{n=2}^{k+1} \frac{s^n}{n!} = 1 - \sum_{n=1}^{k+1} \frac{s^n}{n!}$$

Queda demostrado que la forma general viene dada por $u_k(t) = 1 - \sum_{n=1}^{k} \frac{t^n}{n!}$, luego la solución de la EDO será el límite de $u_k(t)$:

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 - (e^t - 1) = 2 - e^t$$

Puede verificar que esta es la solución (usando polinomio característico por ejemplo) y además note que $x(0) = 2 - e^0 = 1$.

b) $x' = x^{4/3}; \quad x(0) = 0$
Pauta: Se tiene que

$$u_0(t) = 0$$

$$u_1(t) = 0 + \int_0^t 0^{4/3} ds = 0$$

y en general se tendrá siempre que

$$u_k(t) = 0$$

Luego la única solución que cumple ese valor inicial es $x(t) = 0$.

c) $x' = x^{4/3}$; $\quad x(0) = 1$

Pauta: Se tiene que

$$u_0(t) = 1$$

$$u_1(t) = 1 + \int_0^t 1^{4/3} ds = 1 + t$$

$$u_2(t) = 1 + \int_0^t (1+s)^{4/3} ds = 1 + \int_1^{t+1} u^{4/3} du = 1 + \frac{3t^{7/3}}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3t^{7/3}}{7} + \frac{4}{7}$$

Calculamos hasta acá las iteraciones de Picard. Un método para resolverla puede ser pasar dividiendo a la izquierda e integraar

$$\frac{x'}{x^{4/3}} = 1 \iff \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dt}{t^{4/3}} = \int_0^t dt \iff -3x(t)^{-1/3} + 3 = t \iff x(t) = \left(1 - \frac{t}{3}\right)^{-3}$$

d) $x' = \cos x$; $\quad x(0) = 0$

Pauta: Se tiene que

$$u_0(t) = 0$$

$$u_1(t) = \int_0^t \cos(0) ds = t$$

$$u_2(t) = \int_0^t \cos(s) ds = \sin(t)$$

$$u_3(t) = \int_0^t \cos(\sin(s)) ds$$

Calculamos hasta aquí las iteraciones de Picard. Para obtener la solución, podemos proceder como en el problema anterior, pasamos dividiendo e integramos:

$$\frac{x'}{\cos(x)} = 1 \iff \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dt}{\cos(t)} = \int_0^t ds \iff \ln|\sec(x) + \tan(x)| = t$$

Que nos deja solamente la solución implícita (no se puede despejar).

e) $x' = \frac{1}{2x}$; $\quad x(1) = 1$

Pauta: Se tiene que

$$u_0(t) = 1$$

$$u_1(t) = 1 + \int_1^t \frac{1}{2} ds = 1 + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = \frac{t+1}{2}$$

$$u_2(t) = 1 + \int_1^t \frac{ds}{2((s+1)/2)} = 1 + \int_1^t \frac{ds}{s+1} = 1 + \ln(t+1) - \ln(2) = 1 + \ln\left(\frac{t+1}{2}\right)$$

Calculamos hasta acá las iteraciones de Picard. Igual que antes, vamos a pasar dividiendo e integrar:

$$2x'x = 1 \iff 2\int_{x(1)}^{x(t)} t dt = \int_1^t ds = x^2 - 1 = t - 1 \iff x^2 = t \iff x(t) = \sqrt{t}$$

(Válido para $t \in I = (0, +\infty)$, lo cual no es problema pues el valor inicial está en I.)

P2. Para cada una de las siguientes funciones, encuentra una constante de Lipschitz en la región indicada o demuestra que no existe.

a) $f(x) = |x|; -\infty < x < \infty$
Pauta: Pongamonos en casos.
Si $x, y \geq 0$

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

Si $x \geq 0, y \leq 0$

$$|f(x) - f(y)| = |x + y| \leq |x| + |y| = x - y \leq |x - y|$$

Si $x, y \leq 0$

$$|f(x) - f(y)| = |-x + y| = |y - x| = |x - y|$$

Luego en todos los casos se tiene que f es Lipschitz con $L = 1$.

b) $f(x) = x^{1/3}; -1 \leq x \leq 1$
Pauta: Esta función no es Lipschitz en torno al 0, una forma de intuirlo es que su derivada explota en 0.
Por contradicción asumamos que es Lipschitz, luego existe $L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [-1, 1]$$

Elegimos $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tal que $2^{2k} > L$, notamos que $\frac{1}{2^{3k}} \in [-1, 1]$, también notamos que

$$2^{2k} > L \iff \frac{2^{2k}}{2^{3k}} > \frac{L}{2^{3k}} \iff \frac{1}{2^k} > \frac{L}{2^{3k}}$$

Luego si la función fuera Lipschitz, entonces se tendría que para $x = \frac{1}{2^{3k}}$, $y = 0$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \iff \left|\frac{1}{2^k} - 0\right| \leq L\left|\frac{1}{2^{3k}} - 0\right| \iff \frac{1}{2^k} \leq \frac{L}{2^{3k}}$$

Una contradicción con como elegimos a k, luego f no puede ser Lipschitz en el intervalo $[-1, 1]$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}; 1 \leq x < \infty$
Pauta: Notemos que

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - x}{xy}\right|$$

Luego como estamos en el intervalo $I = [1, +\infty)$ tenemos que $z \in I \implies \frac{1}{z} \leq 1$, luego sean $x, y \in I$, entonces $xy \in I$ y tenemos que $\frac{1}{xy} \leq 1$, luego podemos acotar

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{y - x}{xy}\right| \leq |y - x| = |x - y|$$

Por lo tanto es Lipschitz con constante $L = 1$.

d) **[Propuesto]** $f(x, y) = \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}; x^2 + y^2 \leq 4$
Hint: Use TVM versión varias variables.