Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 13

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Francisco Castro y Rocío Yañez

Resumen

- **Def. 1 (Sist. dinámico suave)** Un sistema dinámico suave en $\mathbb{R}^n$ es una función clase $C^1, \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donde $\phi(t, X) = \phi_t(X)$ setisface
  1. $\phi_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la identidad: $\phi_0(X_0) = X_0$
  2. $\forall$ t,s tenemos $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$
- **Def. 2** Consideramos el sist. de ecuaciones (no lineales) $X' = F(X)$ donde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Recordamos que una solución de este sist. es una función $X : J \to \mathbb{R}^n$ donde J un intervalo tal que $\forall t \in J$: $X'(t) = F(X(t))$ la condición inicial $X_0 = X(t_0), t_0 \in J, X_0 \in \mathbb{R}^n$ (usualmante tenemos $t_0 = 0$). Problema de valor inicial: Encontrar $X(t)$ tal que

$$\begin{cases} X' = F(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

- **Teorema de Existencia y Unicidad.** Sea el problema de valor inicial

$$X' = F(X), \quad X(t_0) = X_0,$$

  donde $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1. Entonces, primero, existe una solución para este problema de valor inicial, y segundo, esta es la única solución. Más precisamente, existe un $a > 0$ y una única solución,

$$X : (t_0 - a, t_0 + a) \to \mathbb{R}^n,$$

  de esta ecuación diferencial que satisface la condición inicial $X(t_0) = X_0$.
- **Iteraciones de Picard.** Dado el problema de valor inicial

$$X' = F(X), \quad X(t_0) = X_0$$

  se definen las siguientes funciones

$$U_0(t) = X_0$$

$$U_{k+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(U_k(s))ds$$

  Cuando F es C^1, $U_k(t)$ converge a una solución $X(t) : I \to \mathbb{R}^n$, tal que $X(t_0) = X_0$.

P1. Calcule los primeros términos de las iteraciones de Picard para cada EDO. Obtenga la solución por el método que estime conveniente.

a) $x' = x - 2; \quad x(0) = 1$

b) $x' = x^{4/3}; \quad x(0) = 0$

c) $x' = x^{4/3}; \quad x(0) = 1$

d) $x' = \cos x; \quad x(0) = 0$

e) $x' = \frac{1}{2x}; \quad x(1) = 1$

P2. Para cada una de las siguientes funciones, encuentra una constante de Lipschitz en la región indicada o demuestra que no existe.

a) $f(x) = |x|; -\infty < x < \infty$

b) $f(x) = x^{1/3}; -1 \leq x \leq 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}; 1 \leq x < \infty$

d) **[Propuesto]** $f(x, y) = \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}; x^2 + y^2 \leq 4$

P3. Considere la ecuación diferencial

$$x' = x^{\frac{1}{3}}$$

¿Cuántas soluciones satisfacen $x(0) = 0$?¿Qué sucede si $X(0) > 0$?

P4. ¿Qué se puede decir sobre las soluciones de la ecuación diferencial $x' = \frac{x}{t}$?

P5. **[Propuesto]** Considere el problema de valor inicial:

$$\text{(PC)}\ u'' + \frac{2}{t}u' + V(t)u = 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = 1,$$

donde el potencial V es continuo y acotado para $t \geq 1, u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

(a) Compruebe que el problema (PC) tiene única solución local definida positivamente en una vecindad a la derecha de $t_0 = 1$.

(b) Muestre que si u es una solución positiva de (PC) en $(1, R)$ con $u(R) = 0$ entonces $u'(R) < 0$.