

Pauta Auxiliar 11-P1
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Francisco Castro y Rocío Yañez

P1. Supongamos que hay dos masas m_1 y m_2 unidas a resortes y paredes, como se muestra en la Figura. Los resortes que conectan m_j a las paredes tienen constantes elásticas k_1 , mientras que el resorte que conecta m_1 y m_2 tiene constante elástica k_2 . Este acoplamiento significa que el movimiento de una masa afecta el comportamiento de la otra.

Sea x_j el desplazamiento de cada masa desde su posición de reposo, además supongamos que ambas masas son iguales a 1. Las ecuaciones diferenciales para estos osciladores acoplados se dan entonces por

$$\begin{aligned}x_1'' &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \\x_2'' &= k_2x_1 - (k_1 + k_2)x_2.\end{aligned}$$

a) Escriba estas ecuaciones como un sistema matricial de primer orden.

Pauta: Dadas las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases}x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \\x_2'' = k_2x_1 - (k_1 + k_2)x_2\end{cases}$$

Definimos el vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$.

En forma matricial esto sería:

$$X' = AX, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & 0 \\ k_2 & -(k_1 + k_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Determine los valores y vectores propios asociados a la matriz correspondiente.

Pauta:

Calculamos $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2) & k_2 & -\lambda & 0 \\ k_2 & -(k_1 + k_2) & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Como

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2) & k_2 & -\lambda & 0 \\ k_2 & -(k_1 + k_2) & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 + 2(k_1 + k_2)\lambda^2 + k_1(k_1 + 2k_2)$$

Tenemos

$$\lambda^4 + 2(k_1 + k_2)\lambda^2 + k_1(k_1 + 2k_2) = 0$$

Tomando $\mu = \lambda^2$ para que nos quede de grado 2:

$$\mu^2 + 2(k_1 + k_2)\mu + k_1(k_1 + 2k_2) = 0$$

Las soluciones de este polinomio son

$$\mu = \frac{-2(k_1 + k_2) \pm \sqrt{4(k_1 + k_2)^2 - 4k_1(k_1 + 2k_2)}}{2} = -(k_1 + k_2) \pm k_2$$

Por tanto las soluciones serían

$$\mu_1 = -k_1, \quad \mu_2 = -(k_1 + 2k_2)$$

Ahora, volvemos a λ para obtener los valores propios.

Valores propios:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 = \mu_1 &\implies \lambda_1 = \pm i\sqrt{k_1} \\ \lambda_2^2 = \mu_2 &\implies \lambda_2 = \pm i\sqrt{k_1 + 2k_2} \end{aligned}$$

Por conveniencia para el resto de preguntas definiremos

$$\omega_1 = \sqrt{k_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{k_1 + 2k_2}$$

Así los valores propios son

$$\lambda_1 = \pm i\omega_1, \quad \lambda_2 = \pm i\omega_2$$

Vectores propios

Para $\lambda = i\omega_1$ se tiene:

$$(A - i\omega_1 I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} -i\omega_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i\omega_1 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2) & k_2 & -i\omega_1 & 0 \\ k_2 & -(k_1 + k_2) & 0 & -i\omega_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies -a_1 i\omega_1 + a_3 = 0, -a_2 i\omega_1 + a_4 = 0, -a_1(k_1 + k_2) + a_2 k_2 - a_3 i\omega_1 = 0, a_1 k_2 - a_2(k_1 + k_2) - a_4 i\omega_1 = 0$$

Usando $a_3 = a_1 i\omega_1$ en $a_1(k_1 + k_2) + a_3 i\omega_1 = a_2 k_2$ tenemos

$$a_1(k_1 + k_2) - a_1 \omega_1^2 = a_2 k_2 \implies a_1 = a_2$$

Donde se usó que $\omega_1^2 = k_1$.

Así el vector propio queda

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\omega_1 \\ i\omega_1 \end{pmatrix}$$

Ahora para $\lambda = i\omega_2$ similarmente llegaremos a estas ecuaciones

$$a_3 = a_1 i\omega_2$$

$$a_4 = a_2 i\omega_2$$

$$a_1(k_1 + k_2) + a_3 i\omega_2 = a_2 k_2$$

$$a_2(k_1 + k_2) + a_4 i\omega_2 = a_1 k_2$$

Reemplazando $a_3 = a_1 i\omega_2$ en $a_1(k_1 + k_2) + a_3 i\omega_2 = a_2 k_2$ tenemos

$$a_1(k_1 + k_2) - a_1 \omega_2^2 = a_2 k_2 \implies a_1(k_1 + k_2) - a_1(k_1 + 2k_2) = -a_1 k_2 = a_2 k_2 \implies -a_1 = a_2$$

Luego el vector propio asociado será

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\omega_2 \\ -i\omega_2 \end{pmatrix}$$

Tomando la parte real e imaginaria de u y v , podemos obtener 4 vectores propios l.i:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \\ -\omega_2 \end{pmatrix}$$

c) Encuentre la solución general.

Pauta: Con los 4 vectores propios que encontramos podemos obtener la matriz T que nos permitirá resolver el sistema

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & \omega_2 \\ 0 & \omega_1 & 0 & -\omega_2 \end{pmatrix}$$

Si calculamos su inversa llegaremos a que es

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_1} & \frac{1}{\omega_1} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_2} & -\frac{1}{\omega_2} \end{pmatrix}$$

Luego calculando $T^{-1}AT$ se llega a:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos (resumen aux 10) que para este caso, la solución general del sistema $Y' = (T^{-1}AT)Y$ viene dada por

$$Y(t) = \begin{pmatrix} a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t \\ -a_1 \sin \omega_1 t + b_1 \cos \omega_1 t \\ a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t \\ -a_2 \sin \omega_2 t + b_2 \cos \omega_2 t \end{pmatrix}$$

Luego la solución X vendrá dada por $X = TY$:

$$X = TY = \begin{pmatrix} a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \sin(\omega_2 t) \\ a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) - a_2 \cos(\omega_2 t) - b_2 \sin(\omega_2 t) \\ -\omega_1 a_1 \sin(\omega_1 t) + \omega_1 b_1 \cos(\omega_1 t) - \omega_2 a_2 \sin(\omega_2 t) + \omega_2 b_2 \cos(\omega_2 t) \\ -\omega_1 a_1 \sin(\omega_1 t) + \omega_1 b_1 \cos(\omega_1 t) + \omega_2 a_2 \sin(\omega_2 t) - \omega_2 b_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

Con lo que obtenemos que

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \sin(\omega_2 t)$$

$$x_2(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) - a_2 \cos(\omega_2 t) - b_2 \sin(\omega_2 t)$$

- d) Sean $\omega_1 = \sqrt{k_1}$ y $\omega_2 = \sqrt{k_1 + 2k_2}$. ¿Qué puede decir de la periodicidad de las soluciones con respecto a ω_j ? Demuestrelo.

Pauta:

Las frecuencias $\omega_1 = \sqrt{k_1}$ y $\omega_2 = \sqrt{k_1 + 2k_2}$ determinan la periodicidad:

Para que $X(t)$ sea periódica, $x_1(t)$ y $x_2(t)$ deben tener igual período.

Notamos que para que x_1 y x_2 sean ambas periódicas, de período T se necesita cumplir

$$\cos(\omega_1(t+T)) = \cos(\omega_1 t) \implies \cos(\omega_1 t + \omega_1 T) = \cos(\omega_1 t) \implies \omega_1 T = 2\pi n$$

$$\cos(\omega_2(t+T)) = \cos(\omega_2 t) \implies \cos(\omega_2 t + \omega_2 T) = \cos(\omega_2 t) \implies \omega_2 T = 2\pi m$$

donde n y m son enteros.

Luego de ahí obtenemos

$$T = \frac{2\pi n}{\omega_1}$$

$$T = \frac{2\pi m}{\omega_2}$$

Es decir,

$$\frac{2\pi n}{\omega_1} = \frac{2\pi m}{\omega_2} \iff \frac{2\pi n}{2\pi m} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \iff \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m} \iff \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$$

Luego tenemos que para que haya periodicidad es necesario que $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ sea un número racional.