Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 10+1

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Francisco Castro y Rocío Yañez

Resumen

- Solución general - Caso diagonalizable Supongamos que A es diagonalizable, es decir, existe matriz P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{k_1} & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & B_{k_2} \end{pmatrix}$$

donde λ_j corresponden a sus vectores propios reales y $\alpha_j + i\beta_j$ corresponden a sus vectores propios complejos. Con las matrices B_j dadas por

$$B_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

Entonces, la solución general de $X' = AX$ es TY(t) donde Y(t) tiene la forma:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_k e^{\lambda_{k_1} t} \\ a_1 e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t + b_1 e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t \\ -a_1 e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t + b_1 e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t \\ \vdots \\ a_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t}\cos\beta_{k_2} t + b_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t}\sin\beta_{k_2} t \\ -a_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t}\sin\beta_{k_2} t + b_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t}\cos\beta_{k_2} t \end{pmatrix}$$

P1. Supongamos que hay dos masas m_1 y m_2 unidas a resortes y paredes, como se muestra en la Figura. Los resortes que conectan m_j a las paredes tienen constantes elásticas k_1, mientras que el resorte que conecta m_1 y m_2 tiene constante elástica k_2. Este acoplamiento significa que el movimiento de una masa afecta el comportamiento de la otra.

Sea x_j el desplazamiento de cada masa desde su posición de reposo, además supongamos que ambas masas son iguales a 1. Las ecuaciones diferenciales para estos osciladores acoplados se dan entonces por

$$x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$
$$x_2'' = k_2 x_1 - (k_1 + k_2)x_2.$$

a) Escriba estas ecuaciones como un sistema matricial de primer orden.

b) Determine los valores y vectores propios asociados a la matriz correspondiente.

c) Encuentre la solución general.

d) Sean $\omega_1 = \sqrt{k_1}$ y $\omega_2 = \sqrt{k_1 + 2k_2}$. ¿Qué puede decir de la periodicidad de las soluciones con respecto a ω_j? Demuestrelo.

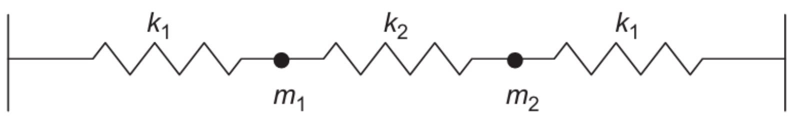

Figura 1: Oscilador acoplado

P2. Considere el sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} X$$

que depende de dos parámetros a y b.

(a) Encuentre la solución general de este sistema.

(b) Dibuje la región en el plano ab donde este sistema presenta distintos tipos de diagramas de fase.

P3. Considere el sistema

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$$

(a) Encuentre la solución general de este sistema.

(b) Dibuje el diagramas de fase.