

Pauta Auxiliar 9 P2
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Francisco Castro y Rocío Yañez

P2. Considere el sistema dado por un oscilador armónico

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix} X$$

donde $b > 0, k > 0$ y con masa $m = 1$.

- a) Indique para qué valores de k y b el sistema tiene
 - 1) Valores propios imaginarios
 - 2) Valores propios repetidos
 - 3) Valores propios reales y distintos
- b) Encuentra la solución general en cada caso.
- c) Describa el movimiento cuando la masa es liberada desde la posición inicial $x = 1$ con velocidad inicial nula para cada caso.

Pauta:

Parte a.

Para sacar los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix}$ calculamos el determinante de $A - \lambda I$ y vemos qué valores de λ lo hacen 0:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff -\lambda(-\lambda - b) + k = 0$$

$$\iff \lambda^2 + \lambda b + k = 0$$

Luego los valores propios vienen dados por

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}$$

Ahora podemos analizar en qué casos son reales, imaginarios o repetidos.

Para tener valores propios imaginarios se necesita que $b^2 - 4k < 0 \iff b^2 < 4k$.

Para que sean repetidos se necesita que $b^2 - 4k = 0 \iff b^2 = 4k$.

Y para que sean reales distintos es necesario que $b^2 - 4k > 0 \iff b^2 > 4k$.

Parte b.

Antes que nada nos conviene calcular los vectores propios.

Sea λ un valor propio entonces, su vector propio asociado cumplirá

$$(A - \lambda I)v = 0 \iff -\lambda v_1 + v_2 = 0 \wedge -k v_1 - b v_2 - \lambda v_2 = 0$$

Lo que resulta en el vector propio $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Asumiendo valores propios imaginarios, tenemos que $b^2 < 4k$. Notemos que siguen siendo valores propios distintos así que podemos usar la fórmula

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

con $\lambda_1 = \frac{-b+i\sqrt{4k-b^2}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{-b-i\sqrt{4k-b^2}}{2}$. Por simplicidad escribamoslos como $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Y por lo que vimos al inicio sabemos que los vectores propios serán $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$. Reemplazando todo esto en la solución tenemos

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} v_1 + c_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} v_2$$

Desarrollándolo como senos y cosenos y reemplazando los vectores:

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha + i\beta \end{pmatrix} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + c_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - i\beta \end{pmatrix} (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))$$

Juntando vectores

$$X(t) = (c_1 + c_2) e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \alpha \cos(\beta t) - \beta \sin(\beta t) \end{pmatrix} + i(c_1 - c_2) e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \beta \cos(\beta t) + \alpha \sin(\beta t) \end{pmatrix}$$

Como las constantes se absorben esto lo podemos escribir como

$$X(t) = \overline{c_1} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \alpha \cos(\beta t) - \beta \sin(\beta t) \end{pmatrix} + \overline{c_2} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \beta \cos(\beta t) + \alpha \sin(\beta t) \end{pmatrix}$$

Ahora sigamos con el caso donde tiene igual valores propios, es decir, $b^2 = 4k$.

Sabemos que el valor propio será $\lambda = \frac{-b}{2}$ y que su vector propio será $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$. Con esta información ya podemos resolver el sistema.

Mirando el resumen sabemos que la matriz A no tiene una forma conocida, pero nos podemos aprovechar de que conocemos su valor propio y aplicar la fórmula que si conocemos:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda t} v + c_2 e^{\lambda t} (tv + u)$$

Para usarla necesitamos encontrar u . Partimos con algún vector linealmente independiente con v , por ejemplo $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Luego calculamos Aw :

$$Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \end{pmatrix}$$

La idea es escribir esto de la forma $\mu v + \lambda w$ por algún μ . Una vez encontrado ese μ ya tendremos u . Para esto notamos que el único μ que hace esto posible es $\mu = -\lambda$:

$$-\lambda v + \lambda w = -\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b^2}{4} \end{pmatrix}$$

Como teníamos que $b^2 = 4k$, entonces se tiene que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \end{pmatrix} = Aw$$

Por lo que efectivamente $\mu = -\lambda$ servía (si le cuesta encontrar μ siempre puede resolver el sistema $\mu v = (A - \lambda)w$, su única incógnita es μ).

Finalmente tendremos que $u = \frac{1}{\mu}w = \begin{pmatrix} -1/\lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/b \\ 0 \end{pmatrix}$ y reemplazando todo en la solución general llegamos a

$$X(t) = c_1 e^{\lambda t} v + c_2 e^{\lambda t} (tv + u) = c_1 e^{-\frac{b}{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -b/2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{b}{2}t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -b/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/b \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Por último para el caso con dos soluciones reales distintas tendremos que $b^2 > 4k$.

Los valores propios serán $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4k}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4k}}{2}$. Sus vectores propios serán $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ respectivamente.

Reemplazando esto en la fórmula general tenemos:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = c_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4k}}{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-b+\sqrt{b^2-4k}}{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4k}}{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4k}}{2} \end{pmatrix}$$

Parte c.

Es importante recordar que en este caso como estamos trabajando con un oscilador armónico la interpretación que se le da es que la posición va en la primera coordenada de $X(t)$, es decir, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.

Para el caso $b^2 < 4k$ la primera coordenada de nuestra solución nos deja

$$x(t) = \overline{c}_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \overline{c}_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Con la derivada dada por

$$x'(t) = \overline{c}_1 e^{\alpha t} (\alpha \cos(\beta t) - \beta \sin(\beta t)) + \overline{c}_2 e^{\alpha t} (\beta \cos(\beta t) + \alpha \sin(\beta t))$$

La posición inicial nos dice que

$$x(0) = \overline{c}_1 = 1$$

y la velocidad inicial nos dice

$$x'(0) = \alpha + \overline{c}_2 \beta = 0 \implies \overline{c}_2 = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Luego la masa se mueve siguiendo la siguiente trayectoria

$$x(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Para el caso $b^2 = 4k$ tenemos que la posición y velocidad vienen dadas por

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2}t} + c_2 e^{-\frac{b}{2}t} t + \frac{2c_2}{b} e^{-\frac{b}{2}t}$$

$$x'(t) = -\frac{b}{2} e^{-\frac{b}{2}t} (c_1 + c_2 t)$$

Evaluando las condiciones iniciales

$$x(0) = c_1 + \frac{2c_2}{b} = 1$$

$$x'(0) = -\frac{bc_1}{2} = 0 \iff c_1 = 0$$

Y por lo tanto

$$c_2 = \frac{b}{2}$$

Al final la trayectoria de la masa queda determinada por la siguiente función

$$x(t) = \frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}t} + e^{-\frac{b}{2}t}$$

Por último nos queda el caso $b^2 > 4k$ el cual nos da las siguientes ecuaciones de movimiento

$$x(t) = c_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4k}}{2}t} + c_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4k}}{2}t}$$

$$x'(t) = c_1 \frac{-b+\sqrt{b^2-4k}}{2} e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4k}}{2}t} + c_2 \frac{-b-\sqrt{b^2-4k}}{2} e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4k}}{2}t}$$

Evalutando las condiciones iniciales

$$x(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$$x'(0) = c_1 \frac{-b+\sqrt{b^2-4k}}{2} + c_2 \frac{-b-\sqrt{b^2-4k}}{2} = 0$$

Reemplazando en la segunda

$$c_1 \frac{-b+\sqrt{b^2-4k}}{2} + (1-c_1) \frac{-b-\sqrt{b^2-4k}}{2} = 0$$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4k}}{2} + c_1 \sqrt{b^2-4k} = 0$$

$$c_1 = \frac{b+\sqrt{b^2-4k}}{2\sqrt{b^2-4k}} = \frac{b}{2\sqrt{b^2-4k}} + \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} - \frac{b}{2\sqrt{b^2-4k}}$$

con lo que la trayectoria de la masa sería

$$x(t) = \left(\frac{b}{2\sqrt{b^2-4k}} + \frac{1}{2} \right) e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4k}}{2}t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2\sqrt{b^2-4k}} \right) e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4k}}{2}t}$$