Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 9

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Francisco Castro y Rocío Yañez

Resumen

- Sea el sistema
$$X' = AX$$
Donde A tiene dos valores propios distintos λ_1 y λ_2, con vectores propios v_1 y v_2 respectivamente. Entonces la solución general del sistema viene dada por
$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} v_1 + \beta e^{\lambda_2 t} v_2$$
donde α y β son constantes.

- **[Valores propios repetidos]**
Si A es de la forma $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ entonces todo vector $v \neq 0$ será un vector propio y las soluciones del sistema tendrán la forma
$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} v, \quad v \in \mathbb{R}^2$$

- Si A es de la forma $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ entonces su único vector propio (salvo ponderaciones) será $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y la solución vendrá dada por
$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si A no es de las formas anteriores y tiene valores propios repetidos λ con un vector propio asociado v (salvo ponderaciones), entonces sea w un vector linealmente independiente a v que cumpla
$$Aw = \mu v + \lambda w$$
para algún μ, definimos $u = \frac{1}{\mu} w$. La solución general vendrá dada por:
$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} v + \beta e^{\lambda t} (tv + u)$$

P1. Para cada uno de los siguientes sistemas de la forma $X' = AX$

(a) Encuentre los valores propios y vectores propios de A.

(b) Encuentre la matriz T que lleva A a su forma canónica.

(c) Encuentre la solución general tanto de $X' = AX$ como de $Y' = \left(T^{-1}AT\right) Y$.

(d) Dibuje los retratos de fase de ambos sistemas.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

(v) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

P2. Considere el sistema dado por un oscilador armónico

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix} X$$

donde $b > 0, k > 0$ y con masa $m = 1$.

a) Indique para qué valores de k y b el sistema tiene

1) Valores propios imaginarios
2) Valores propios repetidos
3) Valores propios reales y distintos

b) Encuentra la solución general en cada caso.

c) Describa el movimiento cuando la masa es liberada desde la posición inicial $x = 1$ con velocidad inicial nula para cada caso.

P3. (Propuesto) Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones del oscilador armónico:

(a) $x'' + x' + x = 0$

(b) $x'' + 2x' + x = 0$