Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 7

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: José Ignacio Calderón y Francisco Castro

P1. Sobre un cuerpo que cae en un fluido relativamente denso, aceite por ejemplo, actúan tres fuerzas: el peso debido a la gravedad g, una fuerza de empuje E que actúa en sentido contrario al peso y una fuerza de resistencia R que actúa en sentido contrario al sentido del movimiento. La magnitud de la fuerza de empuje es igual al peso del fluido desplazado por el objeto.

Supongamos que una esfera de radio a y densidad ρ cae libremente en un fluido viscoso de densidad ρ_0 y coeficiente de viscosidad μ. En estas condiciones la fuerza de resistencia está dada por la Ley de Stokes:

$$R = 6\pi\mu a v,$$

donde v es la velocidad de la esfera.

Plantee la EDO de orden 2 que rige el movimiento de la esfera y determine la velocidad límite que alcanza en función de los parámetros del problema. Explique su respuesta.

Ind: Recuerde que si a es el radio de la esfera, entonces su volumen es $\frac{4\pi}{3}a^3$.

P2. *a)* Considera la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y^{(4)} + 2y''' + 11y'' + 2y' + 10y = 0.$$

Si la función $\cos x$ es una solución de la ecuación, ¿puedes encontrar una base para el espacio vectorial de soluciones de la ecuación?

b) Encuentra la solución general, es decir $y = y_h + y_p$, para la ecuación

$$y'' - 6y' + 5y = f(x),$$

donde la función f está definida como $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$.
Indicación: Puede servirte recordar que la integral definida $\int_0^x g(t)dt$ es una primitiva de la función $g(x)$ para cualquier g integrable.

P3. Resuelva las siguientes ecuaciones de Cauchy-Euler:

i) Mediante sustitución con $y = x^m$:

$$x^2y'' + xy' - 9y = 0$$

ii) Mediante cambio de variable con $x = e^t$:

$$x^2y'' - xy' + y = \ln x$$

P4. Obtenga los gráficos para algunos a, y determine en lo posible el diagrama de bifurcación de la familia de EDOs:

i) $y' = (y^2 - a^2)(y - 3)(y + 2)$
ii) $y' = (y - a)(y - 4a)(y + 1)$