P2. Sin resolver las EDOs, encuentre sus puntos de equilibrio, fuentes y vertederos correspondientes. Luego, determine el diagrama de fase de cada una

$y' = y^3 + -3y$

$y' = \sin^2(y)$

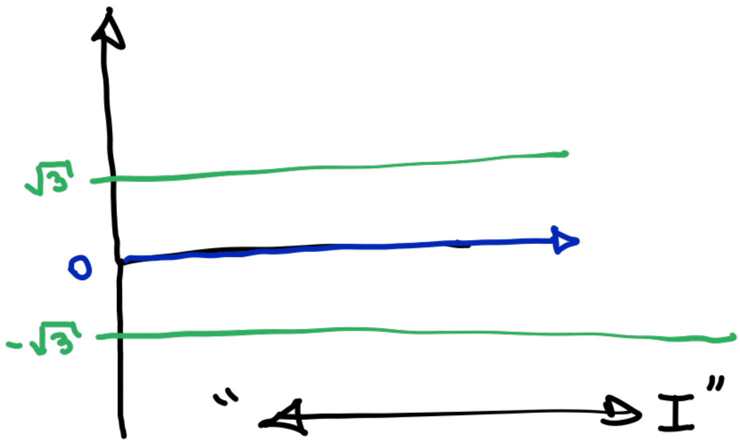
$y' = |1 - y^2|$

F podemos pensarla como la pendiente en función de $t, y(t)$.

$$1: \quad y' = \underbrace{y^3 - 3y}_{0}$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 3y = 0 \Leftrightarrow y(y^2-3) = 0 \Rightarrow y_0 \equiv 0,\ y_1 \equiv \sqrt{3},\ y_2 \equiv -\sqrt{3}$$

son puntos de eq.



Teorema de existencia y unicidad!

No ocurrirá nunca.

Estudiamos y' para $y \in (0, \sqrt{3})$. Acá $y^2 < 3 \Rightarrow y^2 - 3 < 0$ ①

$\Rightarrow y(y^2-3) < 0$. (pues $y > 0$)

$y' < 0$ para $y \in (0, \sqrt{3})$

Estudiamos y' para $y \in (\sqrt{3}, \infty)$. Acá $y^2 > 3 \Rightarrow y^2 - 3 > 0$ ②

$\Rightarrow y(y^2-3) > 0$ (pues $y > 0$)

$y' > 0$ para $y \in (\sqrt{3}, \infty)$

y' para $y \in (-\sqrt{3}, 0)$. Aquí $-\sqrt{3} < y < 0 \Rightarrow 3 > y^2 \Rightarrow y^2 - 3 < 0$

$\Rightarrow y(y^2-3) > 0$ $(y < 0)$

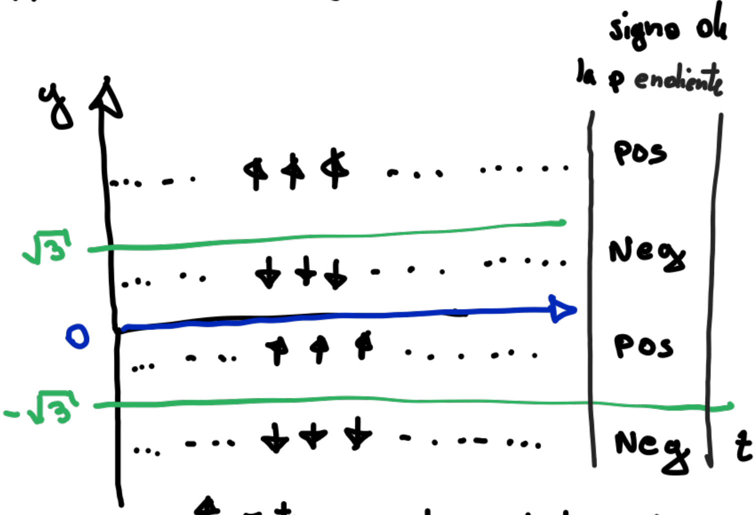
$\Rightarrow y' > 0$ en $(-\sqrt{3}, 0)$

y' para $y \in (-\infty, -\sqrt{3})$. Acá $y < -\sqrt{3} \Rightarrow y^2 > 3 \Rightarrow y^2 - 3 > 0$

$\Rightarrow y(y^2-3) < 0$ $(y < 0)$

$\Rightarrow y' < 0$ en $(-\infty, \sqrt{3})$

Así nuestro diagrama de pendiente irá quedando mas o menos así:



↑ Esto es análogo al diag de Fase

Como la edo es autónoma, y' no depende de t por lo que el comportamiento de y' será igual a lo largo de cada Franja horizontal. Luego en cada intervalo de equilibrio, las sols siempre crecen/decrecen monótonamente a los puntos de eq.

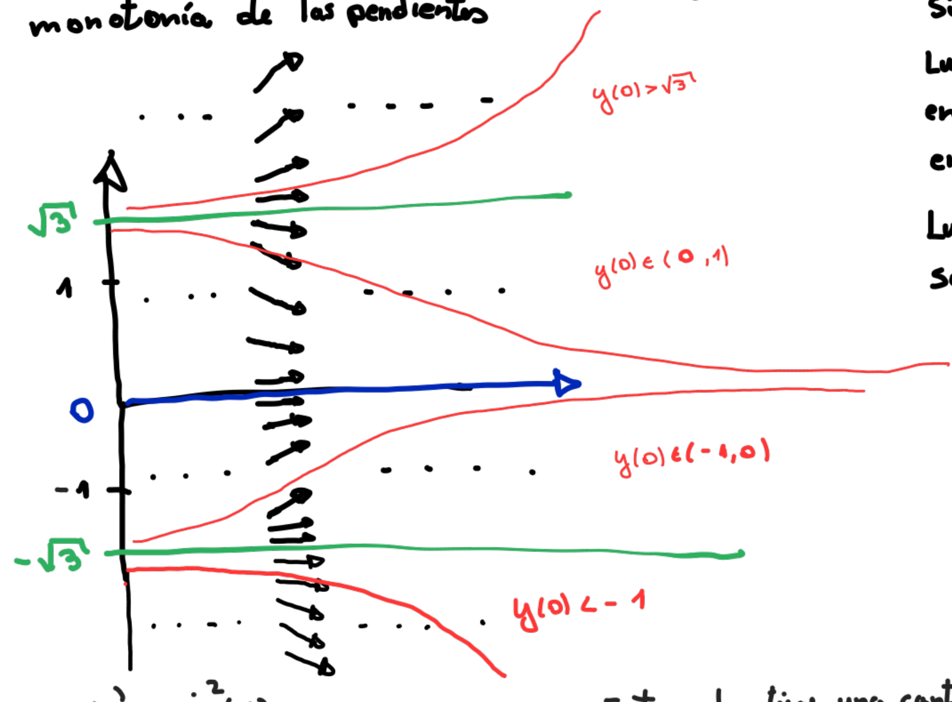
- y_1, y_2 son Fuentes
- y_0 es sumidero

Por el mismo argumento basta graficar como varían las pendientes verticalmente, pues para los lados serán las mismas.

Vemos la monotonía de las pendientes

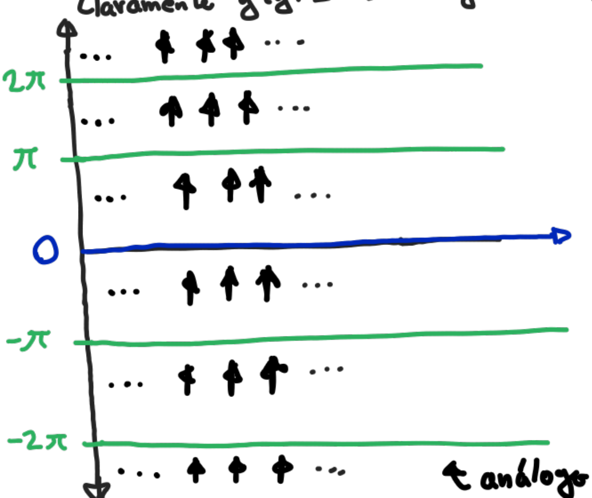
$$F(y) = y^3 - 3y \Rightarrow F'(y) = 3y^2 - 3.$$
$$= 3(y^2 - 1)$$

Si $y > 1$, $F'(y) > 0$.
Por paridad $y < -1$, $F'(y) > 0$.
Si $|y| < 1$, $F'(y) < 0$.
Luego las pendientes crecen en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y decrecen en $(-1, 1)$.
Luego nuestro diagrama de fase se verá así:



2. $y' = \underbrace{\sin^2(y)}_{0} \Rightarrow y_k = k\pi.$ Esta edo tiene una cantidad infinita numerable de funciones que la solucionan!

Claramente $y'(y) \geq 0$. Luego el diagrama de pendientes se irá viendo así:



Acá $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ son semiestables, pues por un lado las sols se alejan y por el otro se acercan.
Mismo argumento de antes, edo autónoma por lo que basta graficar la variación vertical de las pendientes para obtener todo el diagrama de Fase.

Notamos también que por esto mismo las soluciones crecen monótonamente (lo mismo de antes) y a la derecha del intervalo $(-t, \infty)$ las soluciones no parecen tener un mismo comportamiento alrededor de cada equilibrio.

↑ análogo a diag de Fase

Vemos la monotonía de las pendientes:

$F(y) = \sin^2(y) \Rightarrow F'(y) = \sin(2y)$.

Si $2y \in (0,\pi) \bmod 2\pi$, $F'(y) > 0$.

$\Rightarrow 0 < 2y + 2k\pi < \pi$

$\Rightarrow 2k\pi < 2y < \pi + 2k\pi$

$\Rightarrow k\pi < y < k\pi + \frac{\pi}{2}$

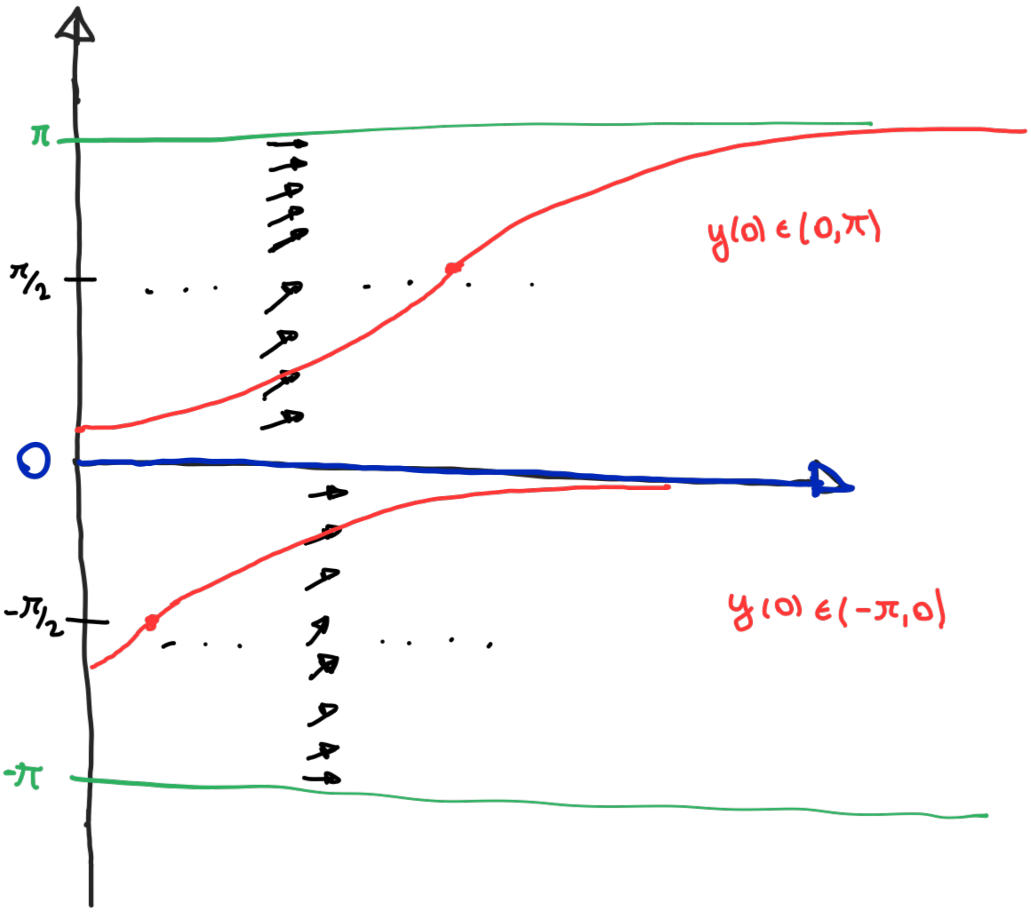
Si $2y \in (\pi, 2\pi) \bmod 2\pi$, $F'(y) < 0$.

$\Rightarrow \pi < 2y + 2k\pi < 2\pi$

$\Rightarrow \pi + 2k\pi < 2y < 2k\pi + 2\pi$

$\Rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2} < y < \pi + k\pi$

Luego $\forall k \in \mathbb{Z}$, la pendiente crece en $(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2})$ y decrece en $(k\pi + \frac{\pi}{2}, \pi + k\pi)$.



3. $y' = \underbrace{|1 - y^2|}_{0}$. Los puntos de equilibrio serán $y_1 \equiv 1$, $y_2 \equiv -1$.

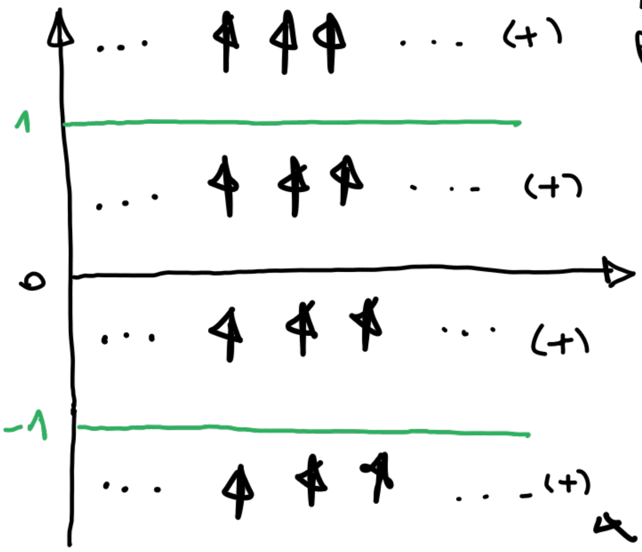
Además notamos que y' es no negativa, así el gráfico irá viendo así:

Ahora estudiamos la monotonía de las pendientes.

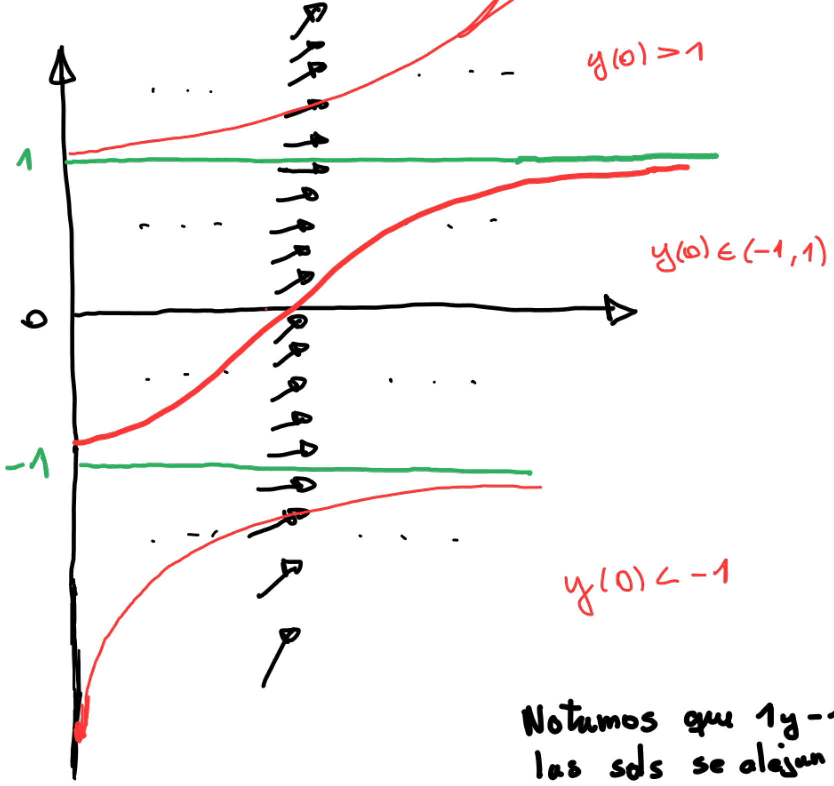
Para $F(y) = |1 - y^2|$, tenemos que

$$F'(y) = \begin{cases} -2y & , y \in (-1, 1) \\ 2y & , y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \nexists & , y \in \{1, -1\} \end{cases}$$

Luego la pendiente decrece en $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$ y crece en $(-1, 0] \cup (1, \infty)$.



análogo al diag de fase



Notamos que 1 y -1 son semi-estables, pues por un lado las sols se alejan y por el otro se acercan

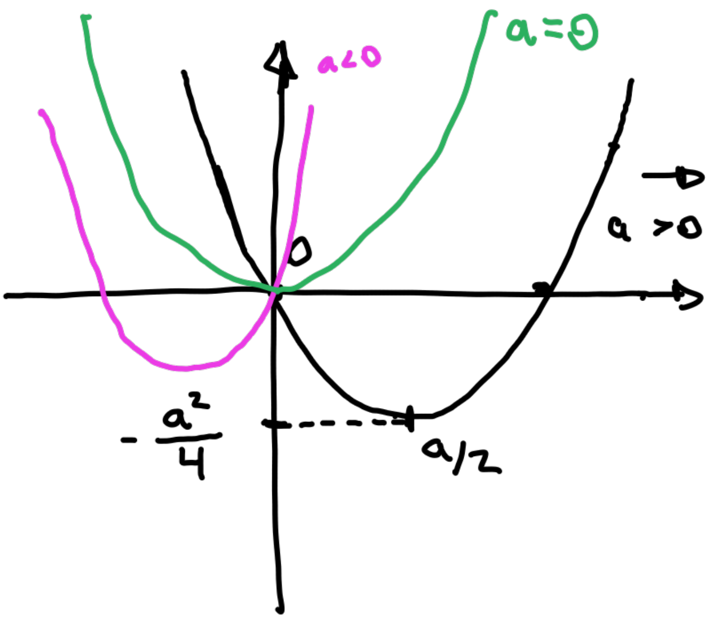
P3

1. $y' = y^2 - ay \iff y' = y(y-a)$. Ptos de eq: $a, 0$.

Dibujemos como se verá la curva de pendiente de la edo á-esima:

$$y' = \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4},$$

vertice en $\left(a/2, \frac{-a^2}{4}\right)$



Forma 1, viendo signos de F con el dibujo (funciones fáciles de graficar)

Forma 2, viendo signos de F con su derivada en los ptos de eq.

Para el diagrama de bifurcación graficamos el lugar geométrico dado por los puntos de equilibrio de la familia de edos $\{(a,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(a,y)=0\}$.
Además pondremos el parámetro como abcisa.

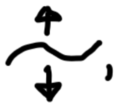
Esto pasa en $a=y$, o bien $y=0$, $a\in\mathbb{R}$. Ahora incluimos el diagrama de las edos para cada a. Estudiaremos como varían las pendientes en los ptos de eq. Esto es:

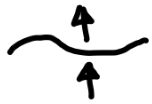
$$F'(y)=2y-a \implies \begin{cases} F'(a)=a & \text{crece en } a>0\text{, decrece en } a<0. \\ F'(0)=-a & \text{crece en } a<0\text{, decrece en } a>0. \end{cases}$$

Para $F'(\bar{y})<0$, las pendientes están "decreciendo cerca de la pendiente cero" por lo que abajo del punto crítico serán positivas y arriba serán negativas.

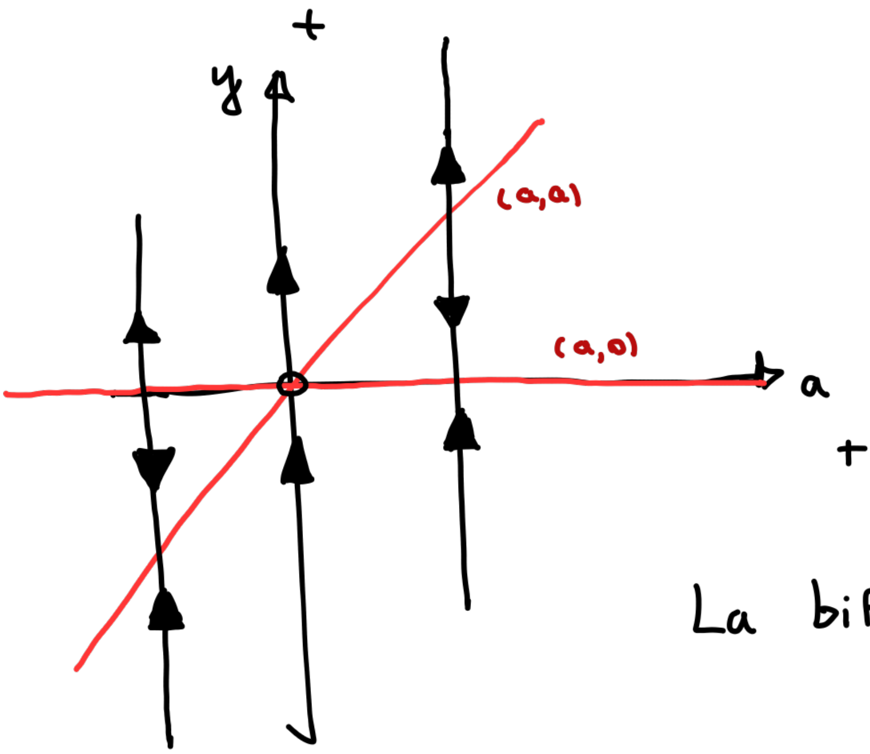
Se verá así , luego $\bar{y}$ es vertedero.

Para $F'(\bar{y})>0$, las pendientes están "creciendo cerca de la pendiente cero" por lo que arriba serán positivas y abajo negativas

Se verá así , luego $\bar{y}$ es fuente.

En el caso $a=0$, F' no nos permite ver el crecimiento local de F, pero podemos notar que F es no negativa en ese caso, luego se verá así .

Con estos criterios el diagrama se verá así:



La bifurcación está en $(0,0)$

2. $y' = y^3 - ay = y(y^2 - a) \Rightarrow$ Equilibrios: $\underbrace{\begin{array}{l} a>0 \Rightarrow 0, \sqrt{a}, -\sqrt{a} \\ a=0 \Rightarrow 0 \ (3) \\ a<0 \Rightarrow 0 \ (1) \end{array}}$

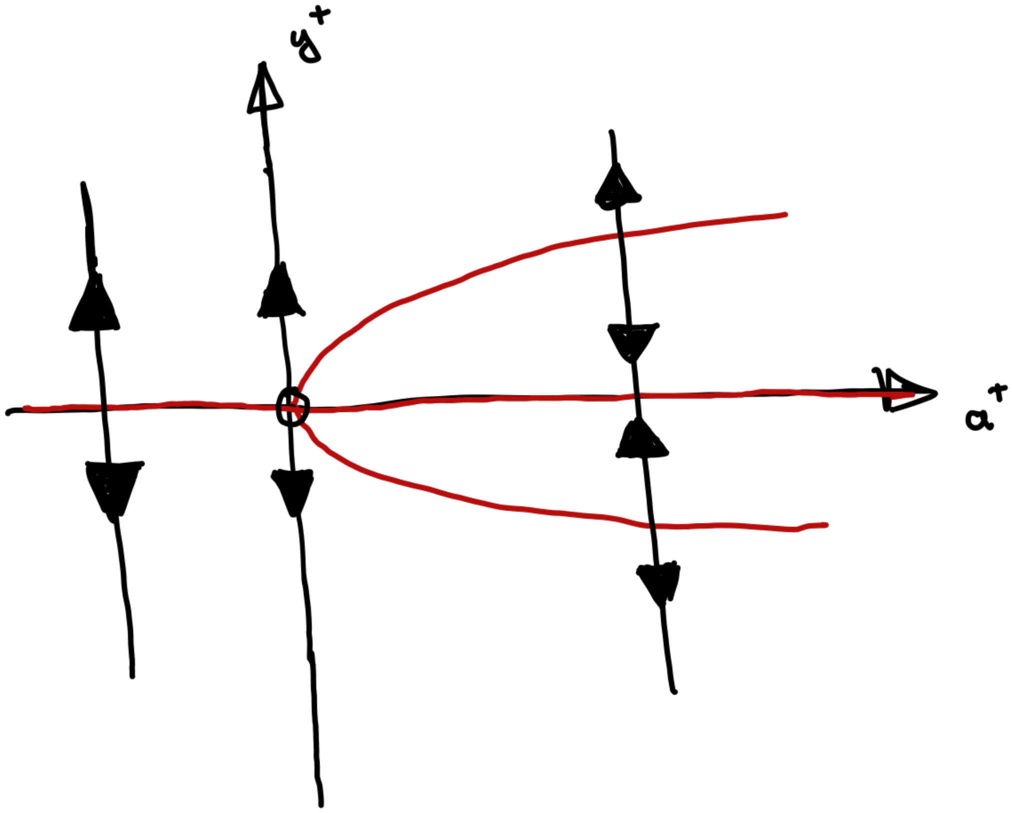
$y_1 = \sqrt{a}$
$y_2 = -\sqrt{a}$
$y_3 = 0$

Acá usamos derivada $F'(y) = 3y^2 - a$.

$F'(0) = -a \left(\begin{array}{l} \text{Si } a<0,\ F'(0)>0 \text{ Fuente} \\ \text{Si } a>0,\ F'(0)<0 \text{ sumidero} \end{array} \right)$

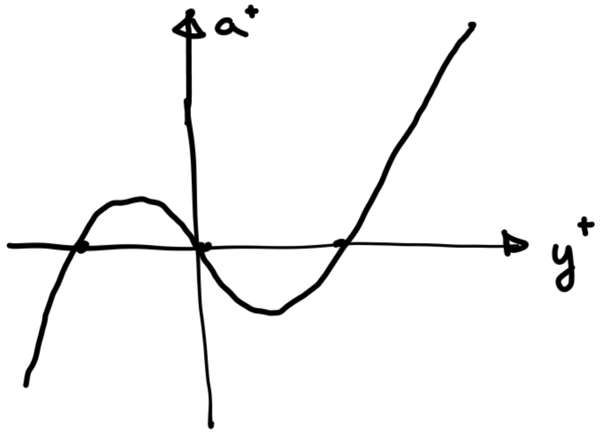
$F'(\sqrt{a}) = 2a = F'(-\sqrt{a})$ (valido solo para $a>0$)

Para $a=0$, la derivada no nos permite ver el crecimiento local, sin embargo $F(y) = y^3$ grafica conocida. Negativo para $y<0$, positivo para $y>0$.



La bifurcación está en $(0,0)$ (donde se intersectan ambas curvas de equilibrios)

3. Propuesto. Como hint considerar que el gráfico de F_0 es el siguiente



y pensar en como cambia este grafo según se eligen otros a's.