Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
28 de abril de 2025

Auxiliar 6: Análisis Cualitativo de EDOs no lineales

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Benjamín Gallardo - Rocío Torres

Resumen

- Consideremos una EDO de primer orden en un intervalo I:

$$y'(t) = F(t, y(t)), \qquad t \in I \tag{1}$$

donde $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función. (Notamos que esto es más general que el caso de una EDO lineal, siendo esta última un caso particular del presentado en este resumen).

Ejemplo:

$$\text{Si } F(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^2 + \cos(x_2), \text{la edo asociada corresponde a } y' = ty^2 + \cos(y)$$

- **[EDO Autónoma]:** Diremos que (1) es autónoma si F es constante respecto a x_1.

Ejemplos:

  - $y' = 4e^y$ es una EDO autónoma.
  - $y' = \sin(ty)$ no es EDO autónoma.

Consideraremos la EDO autónoma de (1)

$$y'(t) = F(y(t)), \qquad t \in I \tag{2}$$

- **[Punto de equilibrio]:** Diremos que una función constante $y_0 \equiv y \in C^1(I)$ es un punto de equilibrio de (2), si se cumple que $F(y_0) = 0$.

Claramente todo punto de equilibrio es una solución de la EDO autónoma.

- **[Fuente/Vertedero/Bifurcación]:** Sea y un punto de equilibrio de (2). Informalmente,

  - Diremos que es un punto de fuente si las otras soluciones de la EDO tienden a alejarse de y hacia la derecha del intervalo.
  - Diremos que punto de vertedero si las otras soluciones de la EDO tienden a acercarse de y hacia la derecha del intervalo.
  - En caso que las otras soluciones no se comporten de una misma manera cerca de él conforme avanzamos por el intervalo, se dirá que el punto es una bifurcación.

- **[Diagrama de fase]:** Un diagrama de fase de (1) es un bosquejo del plano que a cada punto $(t, y(t)) \in \mathbb{R}^2$ le asigna una pendiente de la función y, la cual viene dada por la identidad $y' = F(t, y)$.

- Si la EDO es autónoma, las pendientes serán idénticas por secciones horizontales del plano.
- Las pendientes del diagrama siempre serán tangentes a las soluciones de la EDO. Esto ayuda a visualizar la familia de soluciones.

- **[Diagrama de bifurcación]:** Entendemos el diagrama de bifurcación de una familia de EDOs con parámetro a, como una representación visual de cómo cambia la naturaleza de los puntos de equilibrio de cada EDO de la familia, según el valor de a.

P1. Considere la siguiente familia de EDOs no lineales autónomas, indexadas por a:

$$y' = ay + \sin(y)$$

a) Dibuje el diagrama de fase para la EDO dada por $a = 0$.

b) Use las gráficas de ax y $\sin x$ para determinar el comportamiento cualitativo de todas las bifurcaciones que ocurren cuando a aumenta desde -1 hasta 1.

c) Dibuje el diagrama de bifurcación para esta familia de EDOs

P2. Sin resolver las EDOs, encuentre sus puntos de equilibrio, fuentes y vertederos correspondientes. Luego, determine el diagrama de fase de cada una

$y' = y^3 + -3y$

$y' = \sin^2(y)$

$y' = |1 - y^2|$

P3. Grafique los diagramas de bifurcación de las siguientes familias de EDOs indexadas por a, sin encontrar una solución:

$y' = y^2 - ay$

$y' = y^3 - ay$

$y' = y^3 - y + a$

P4. La evolución en el tamaño de la población de dos tipos de bacterias se puede modelar por el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

a) Resuelva el sistema lineal e indique la evolución de cada población.

b) Muestre que para cualquier solución inicial la población de bacterias desaparece cuando el tiempo $t \to \infty$.